OUEDATE SUP GOVT. COLLEGE, LIBRARY

KOTA (Raj)

Students can retain library books only for two weeks at the most

BORROWER'S	DUE DTATE	SIGNATURE
Í		1
		Į.
		[
1		!
1		ì
		ļ.
))
		1
1		
		ļ
i		1
- {		[
1		
Ì		
1		1
1		l
i		1

सांख्यिकी के सिद्धान्त ग्रीर ग्रनुप्रयोग

सांख्यिकी के सिद्धान्त ग्रौर ग्रनुप्रयोग

डों बी एल. सप्तवास एम एससी , एम. स्टैट., बीएच डी. साव्यिकी विमाग, उदयपुर विवविधालय, उदयपुर



राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी नयपुर शिक्षा तथा समाज-रूत्याम मंत्रालय, भारत सरकोर को विश्वविद्यालय स्तरीय सन्य-निर्माण योजना के मन्तर्गत, राजस्थान हिन्दी चन्य सकादमी द्वारा प्रकाशित ।

प्रपम संस्करल : 1977 प्रपमावृत्ति : 1983 Sankhyıki Ke Sıdhanta Aur Anuprayoga

मारत सरकार द्वारा रियायती मूल्य पर उरलब्द करावे गये कागज से निर्मित ।

मूल्य: 45.00

C राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ श्वकादमी, जयपुर

प्रकाशक : राजध्यान हिन्दी प्रन्य स्नकादमी ए-26/2, विद्यालय मार्ग, तिलक नगर जनपर-302004

मुद्रकः गायत्रो घॉफसेट प्रेस नई दिल्नी

माता-पिता

की

पुष्य स्मृति में

प्राक्कथन

विश्व विषिध्र भाषाधो तथा सस्कृतियो वा रयश्यस है। यह रगः विरो कृतो ना स्पयन है। विविधता हो हसका सीर्य है। भाषाएँ धीर सस्कृतियों प्रदेश विवेध के भूगोल तथा इतिहास की देन हैं। एक देश या स्देश की जलवायु से ही मनुष्य का गरीर धीर मानस करता है, उसका रहन-सहन, भाषा-मोतों भी जलवायु से प्रमावित होंगी है। किर अनेक वर्यों से एक विविध्य कार रहन सहन, भाषा-मोतों भी जलवायु से प्रमावित होंगी है। किर अनेक वर्यों से एक विविध्य कार रहन सीर होते हैं। किर अनेक वर्यों से एक विविध्य कार के सहन सिर होते हैं। इसके वर्यों से एक विविध्य में से सहन सिर होते हैं। इसके प्रतिहास नी प्रमाय में से मनुष्य को भीर हतिहास नी पराय अवद्यान होती है। इसके प्रतिहास नी प्रमाय के हो नहुष्य की सर्वाध्य कर से निव्यत्न हों। यह सर्वक यह क्षाक्ष कि मनुष्य का स्विध्य की स्वयत्न हों। सहन स्वयत्न सहन स्वयत्न स्वयं कर से निव्यत्न हों। साम सर्वक यह स्वयत्न हों साम स्वयं के ही होंगी वाहिए।

इसके प्रतिरिक्त विश्व का समस्त ज्ञान घनेक भाषाघों में सप्रहीत है चौर सभी लोग समस्त ज्ञान की प्राप्ति के लिए घनेक भाषाघों का प्रत्यस्त नहीं कर सकते हैं। ऐसा करते में के केवल लापा-दिन ही रह जायेषे, न कि विश्व-दिन्न। भाषा तो एक साधन मात्र है। मत. यह मात्रस्वक है कि सभी भाषाघों में विश्विद्ध ज्ञान सब्बो बीमद्रा एव बुलमता से प्रयोगभाषा में ही उचतत्व्य हो पर्यात् ज्ञान के धादान-प्रदान का भाष्यय भातु-मापा हो।

स्वतात्रता प्राप्ति ने पश्चात् जब इस दिशा में केन्द्र सरकार के शिक्षा-मन्त्रात्य में नार्थं करते का विचार किया तो यह तथ्य सामने वाव्या नि माध्यम-गरिवर्शन के मार्ग में बहुत दहा प्रवरोध है सम्बद्ध भाषाओं में निमित्र विषयों के मानक दन्तें का द्रमात्र, जिसे समाप्तीप्र पूर्ण क्या जाना चाहिए। इसी उट्टेंच की पूर्ण के लिए विद्यम्पित्र राज्यों मे समाप्तीम् प्रोप्त कि स्थापना जी गई। राजस्थान हिन्दी ग्रम्थ सकादयी इसी योजना ने सम्याप्त विक्रत वत वर्ष से मानक ग्रम्थ प्रकालन वा कार्य कर रही है सौर प्रव तक इसने विश्वित्र विवयी (क्या, वाणिन्य, कितान, हिप्स साही) ने त्यस्थ 285 प्रन्थ प्रकालित निये है जो विद्यात्यालय ने वरिष्ठ प्राप्यापको द्वारा सिसे गये हैं।

"साध्यिनी के सिद्रान्त भीर धनुप्रयोग" पुस्तक नी पुनराबृति प्रस्तुन करते हुए हमें प्रसप्तता है। इस पुस्तन में साध्यिनीय सिद्धान्तों भीर उनके स्थावहारित अनुप्रयोगा ना वर्णन/विदेशन सरक रीति से दिन्या गया है। साध्यिनीय प्रतिश्वियों नी प्रयोग-विधि एवं सम्प्राप्त सस्थारमा मानो ना निर्वेशन भी सोदाहरण दिया गया है। इस्ति विद्यान, साधुदितान, सर्पतास्त्र, बाणिन्य, समाजनास्त्र मादि विष्या ने छात्रा ने निष्यह पुस्तक उपयोगी है। हम इसके सेखक थी बाँ. व्यन्तनाल प्रवचान, दुर्गापुरा तथा समीसक डाँ. वी. के. सेठी के प्रति प्रदेत सहयोग हेतु पाभारी हैं।

MM

(श्रीमती कमता) विद्या मन्त्री, राजस्थान सरकार एवम धम्यदा, राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ मकादमी

जयपुर

्रे भे भिक्ता कार्गाः (हाँ. पुरुषोत्तम नागरः) निदेशक राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ भकादमी

जपपुर

भूमिका

संस्थियों वर्तमात युग म एक घाँत महत्त्व वा विषय है बयोति अनुसद्यान, योजता एव सामाय जानवारों के लिए सांस्थितनेय विविधी अत्यात उपयोगी सिद्ध हुई हैं। साथ हो, भारत में द्वि वा प्रयोग दिन प्रतिदिन बदता जा रहा है धौर धाला को जाती है ति कुछ वर्षों म हिन्दी हो पठन पाठन काए का मान्य पद आयोगी। प्रत मुक्ते हिन्दी सा सांदिवकी के पहिन्दी सा सांदिवकी के पहिन्दी सा सांदिवकी में पूर्व एसी प्रतिविधी के जिन्दी के साववार व्यक्तियों के प्रतिविधी के प्याचित के प्रतिविधी के प्

मैं इस पुस्तन को पूर्ण करने में सहयोग देने के लिए साल्यिकी विभाग, इपि महा-विद्यालय, उदयपुर विश्वविद्यालय, उदयपुर के बुख सदस्थो—टा की श्री लग्छे (शेक्ट स विभागाध्यक्ष) श्री एक सी मासूर (शिक्ट) शी झार पी पुष्पा थी एक एन गर्मा व श्री एक की गर्मों के प्रति प्रत्यिक माश्रार प्रकट करता हूं। इसके स्वितिक मैं हों भी के रोठी का विभेग रुप से झामारी हूं जिन्होंने इस पुस्तक की समीजा करने मुक्त श्रीस्ताहित किया। इपि महाविद्यालय, उदयपुर के हों भी पी पृष्पा को भी लेखन कार्य म सहयोग के लिए स्वयाल देवा हूं। श्री कार्यिक सम्बद्ध स्वया माश्री को इस पुस्तर ने सिरान वार्य में किसी भी कर ने सहयव रहे हूँ उन्हें धाववाद देवा स्वया क्साव

में घरने भाई डॉ एम भी अध्याल तथा अपनी बता क्लाज अध्यात द्वारा दिये सुधे फ्रोस्साहन एवं सहयान के निप् उनके प्रति विशेष आभार प्रवट करता हु।

इस मानृत्ति को पूर्णनया परिमुद्ध करके छापा गया है। भाषा है कि पाटर इसरी भौर भिपन उपयोगी पायेंगे।

I am indebted to the Literary Executor of the late Sir Ronald A Fisher, FRS, to Dr Frank Yates, FRS, and to Long nan Group Ltd, London, for permission to reprint Tables 1, 2, 3, 4, 5, 13, 14, 16 and 17 from their book Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research.

I am also indebted to all other publishers and writers for permission to reprint their original Tables.

-वसन्तलाल ग्रग्रवाल

विषय-सूची

भ्रद्या	य विवरण	qu
1.	साब्यिकी का परिचय	1-
2.	बारम्बारता धीर उसका निरूपण	3- 2
0	केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप	24- 4
4	विक्षेपण-माप	44- 6
5,	प्रारम्भिक प्रायिकता सिद्धान्त	69- 89
6,	कुछ मुख्य भसतत प्रायिकता बटन	90-103
7	बुछ मुह्य सतत प्राधिकता बटन	103-129
8	सीमा प्रमेष	130-13
9.	सोस्यिकीय परिकल्पना-परीक्षा	139-194
10.	प्रप्राचल विधियाँ	195-215
11.	माकलन सिद्धान्त भीर अधिकतम समाविता परीक्षा	216-232
12)	प्रतिचयन सिद्धान्त	233-273
13	समाध्ययण मामान्य विवेचन तथा गणितीय फलन	274-322
(सहसम्बन्ध	323-367
(1)(C)(C)(C)(C)(C)(C)(C)(C)(C)(C)(C)(C)(C)	गूच र ांक	368-389
6	_मान-श्रेणी विश्लेषण	390-425
Ō	धन्तर्वेतन भीर बहिर्वेशन	426-450
18	बहुषर सटन भीर बहुषर परीक्षाएँ	451-470
19.	विविक्तकर फ्लन	471-485
20,	प्रॉविट विश्लेषण	486-511
21	प्रसरण-विश्लेषण	512-597
22	स्यान्तरण	598-603
23.	सहप्रसरण-विश्लेषण	606-622
	-रिक्षिण्ट	
		622 622

(xii)

पवुछ वरयोगी सूत्र	633-635
ग-समुच्चय सिद्धान्त का परिचय	636-637
घ—साध्यिकीय सारणियाँ	638~681
Further Read In	682-684
धनु त्रमणिकाः	685~690
पारिभाषिक शब्दावली	691-694
मृद्धि-पन	695-698

मास्मिरी विचान ना सन सम है जिसना प्रयोग प्राधीन नाम महाना धारहा है किन्तु दगरा विराग मुख्यन बीमवी जनान्धी मही पृता है। प्राधन वाद मंगारियधी का प्रयास जनवणना राज्यस्य या धन्य ध्रावश्यन बस्तुधी की रणना तक ही गीमित या सिन्तु ध्रय यह विषय घाधुरिक ध्रमुमधान ना ध्रम्भिद्र ध्रय वक्त यह है। प्राधान का ध्रम्भिद्र ध्रय वक्त यह है। प्राधान प्रम्या एय प्रयोग मारियभी को बिना उपयाग मंगायि ध्रद्दे तथा क्षम विवस्तानि सम्मे जाते है। उदाहरण वे तिरुप भेना मंज्यन वा प्रभाव दरना ही विशी कारवाने मं यह भी बीधान गी तुका करती हा जननमुद्राय के विषय मंगि प्रशास की जानकारी प्राप्त करती हा। जिसी उदादिन वन्तु की गुणारमा परिसृद्धि की परिशा करती हा। वा विस्ती प्रमाप पर प्रभाव धारना हा तो दन सभी प्रयोग मंगायियोग विश्ववा का महत्त्रपुण स्थान है।

समाज पर फ्राविक स्थितिया वा प्रवार पत्राव वन्ता है और अवकाश्त्र इसका मार्ग दर्गत करता है। वेतमान समय अ साथियी समाजकाश्त्र व अर्थकाश्त्र से एक मुख्य स्थान प्राप्त कर चुकी है। इसके अभिश्तिक भावी योजनाथा की स्वरूप देने या योजना मा प्राप्ति एक सामाजित पहलुका पर प्रभाव दक्षी के निए साश्विकी हो एक उपयुक्त विकास है।

सानियनी वो इन प्रवार परिभाषित विया जा सवता है । मास्यिवीय विपात जन विधिया या प्रविधिया पा एवं निवाय है निवला उपयान विसी विषय वा सानित ज्ञान होने वी विश्वति मं यथापित जानवारी भीर निवय वे हेर्द्व विया जाता है। इनवा उपयोग विभिन्न स्वतिधाना भएन सहायव उपरस्था वे रूप महोता है।

मान्यियों नो बहुत से बिडाना ने परिभाषित नरने के प्रयत्न क्ये हैं किन्तु किसी भी एक परिभाषा को प्राथन विस्ताया नहीं साता जा सकता है। यिन भी सारक एक विकार (R. A. Fisher) डारा से वर्ड वरिजाया का जर्नोत्तक माना जना है थी निजन प्रकार है —

रिसी जातराची अथवा प्रतृप्तधान के जिए मास्थियी को प्रयोग गरने मा निस्त चार मध्य क्यार करनी शोधी है —

- (1) प्राधार रामग्री (न्याम) वा मग्रह करना ।
- (2) उम मामग्री रा उनित रीति से मारणीयन (Tibulation) करना ।
- (The science of statistics is escantially a blanch of applied mathematics and may be regarded as mathematics applied to observational data)

- (3) ग्रावस्थरतानुसार उसना विश्लेषण करना।
- (4) मत मे जो सस्यात्मक परिणाम प्राप्त हो, उनका निर्वचन करना।

उपर्युक्त चार त्रियामो का यथोजित रूप से प्रयोग करने के लिए विभिन्न प्रविधियो भीर सामनो को भ्रमनाना पढता है जिनका पर्यान्त कर्णन इस मुस्तक में दिया गया है।

सांक्यिन की सहायता से किसी पूरे जनसमुदाय (Population) के विषय मे पूर्ण या माशिक जानवारी प्राप्त को जाती है। इसने लिए या तो पूरे जनसमूह (समय) वे प्राप्तेक एकक (unit) का माथ लेना होता है या प्रतिदर्श (sample) से सम्मिलत एक्कों के माथ लेकर जानकारी प्राप्त कर ली जाती है। प्रयोजन विजय के भ्रमुसार निर्मारित एककों के किसी भी पूर्णसोग को समय कहते हैं। प्रतिवर्श से प्रभिन्नाय समय के कुछ एककों से हैं को किसी प्रतिवयन यिथि द्वारा नमूने ने तीर पर समय में से पयन किये जाते हैं। प्रतिवर्श द्वारा प्राप्त जानकारी का समय के प्रति जानकारों के रूप में उपयोग किया जाता है। जैसे किसी भीषधि का प्रभाव जानने के लिए, एक रोग के कुछ रोगियो (प्रतिवर्श) को हो यह भोषधि यो जाती है भीर जो परिचाम प्राप्त होते हैं, उन्हें इस रोग के सब रोगियो (समय) के प्रति सरय माना जाता है।

ऐमी दशा मे समग्र के विषय मे जो परिकल्पनाएँ हैं उनकी औव प्रतिदर्शपर निये गये प्रेसणो के प्राधार पर की जाती है। समग्र के विभिन्न प्राचलो का प्रतुमान भी प्रतिदर्श के प्राधार पर ही सनाया जाता है। (समग्र के क्सिंग अवर को प्राचल कहते हैं।)

इन दोनों समस्यामो मे सास्थिती का उपयोग कैसे किया जाता है यह इस पुस्तक के मध्यायी 9, 10, 11 मे दिया गया है। प्रतिदर्ग किस प्रकार निया जाय या प्रयोग-मिन-करना किस प्रकार की हो जिससे कि कम खर्च भीर कम श्रुटि हो—ये भी सास्थिकी के ही विषय है। इनका वर्णन मध्याय 12 मे दिया गया है।

सास्थिकी एक गृह विषय है। इसको धन्छी तरह पढना धौर समम्मना चाहिये धन्यमा इसका उपयोग उचित रूप मे नहीं हो संयेगा धौर उस स्थिति मे हानिकारक परिणाम भी प्राप्त हो सकते हैं। धत पाठको से धनुरोध है कि इस विषय का कम जान होने की स्थिति में, इसका प्रयोग करने से पूर्व ने किसी सास्थिकी विद् से परामर्थ करतें। किसी समय मे एकक के विशेष गुण या लक्षण की पूर्ण या घाजिक जानकारी प्राप्त करते के लिए समय के प्रमो का माधन विया जाता है। इस प्रकार जो माध प्राप्त होते हैं, उनको विशिष्ट एवं निश्चित रूप में व्यवस्थित करते सारणीवद्ध करता एवं उनका निरूपण करना प्रावस्थक है।

परिभाषाएँ

किसी लक्षण के लिए समान मान वाले एकको की सस्या को उस मान की बारव्बारता कहते हैं।

विभिन्न मानो की बारम्बारता को व्यवस्थित रूप देने की किया को बारम्बारता बटन (Frequency distribution) कहा जाता है, जैसा कि उदाहरण (21) में दिखाया गया है।

हम सैद्धान्तिक रूप में बारम्बाच्या बठन को इस प्रकार समझ सकते हैं -

माना कि चर के विनिध्न मान x_1, x_2, x_3,x_L है और प्रेशन x_1, i_2 बार पटिन होता है; स्रमांद्र x_1 को नारम्बारता i_1 है। हती प्रचार प्रेशनों x_2 x_3, x_4,x_L की तक्तुसार वारम्बारताएँ i_2 i_3 i_4 i_4 i_5 i_5 i_6 i_6

वेशन (X)	बारम्बारता (f)	
x ₁	f ₁	
x _k	f _a	
x ₂	$f_{\mathbf{S}}$	
i	I	
X ₁	f_i	
ž	ž	
xg	f_K	

बारम्बारता बटन के रूप में प्रेष्ठणों को प्रस्तुत करने से किन्ही आनों की बारम्बारता गणना-चिद्वों द्वारा मुक्तमता से जात की जा सकती है। यणना चिद्व लेगाने की विधि इस प्रकार है '---

पहले ज्यास के प्रदेक मान को कम में लिखा लिया जाता है। फिर एन-एन नरने प्रेसित मान को देस कर कम में दिने गये मानों से में चले मोज भर उनके सामने एन छोटा मा दण्ड गणना चिह्न के रूप मे लगा दिया जाता है। जब किसी मान के मम्मुल चार चिह्न लग चुने होने हैं थौर यौजनों चिह्न समाना होता है तो प्रथम चार चिह्नो को बाउता हुपा एक चिह्न भीर लगा देते हैं। इस प्रकार यह एक चौन नणना चिह्नो का ममूह वन जाता है। यदि छठा चिह्न इसी मान के सम्मुल नयाना हो तो इसे मन्या से सपाते हैं। यह त्रम्म तब तक चभता रहता है कर तक कि सब प्रीस्त मानों के लिए चिह्न न राग जाएँ। इस प्रकार चौच चिह्नो के समूह या समूहों को बनाने स प्रयोक मान के लिए पणना-चिह्नों को सक्या सुगमना से जात हो जाती है। इसी विधि का उपयोग उदाहरण (21) में विधारण्या है।

सचयी बारम्बारता

प्राय मह रानने की धावत्यकता हाती है कि उन प्रेक्षणों की संख्या क्या है जिनका मान एवं निश्चित प्रेशान-मान के समान या इसमें क्या है। इन प्रेसणों की मत्या को सबयी वारम्बारता कहें है। सबयी बारम्बारता को बारम्बारता-बदन की सहायता से सुगमता से सात कर सकते हैं। बर्गित बारम्बारता-बदन-रारणों के किसी प्रेशित मान कि बयी बारम्बारता, उसकी धपनी बारम्बारता में पूर्ववर्ती बारम्बारता में योग जोड देने से हात हो जानी है। बर्गित प्रेशित मान \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_3 , \mathbf{r}_4 , \mathbf{r}_4 , \mathbf{r}_5 , \mathbf{r}_6 ,

ঈ≋িৱ দাব (x)	बाश्यक्ता (f)	सं• बार• (F)
x ₁	f ₁	$f_1=F_1$
x ₂	$\mathbf{f_2}$	$f_1+f_2=F_1+f_2=F_2$
x _s	fg	$f_1+f_2+f_3=F_2+f_3=F_3$
•	•	1
x _K	\mathbf{f}_{K}	$f_1+f_2+ +f_K=F_{K-1}+f_K=F_K$

इम विधि ना प्रयोग करके उदाहरण (2 1) में संघयी बारम्बारताएँ घीचे स्तम्भ में दिलाई गई हैं।

उदाहरण 2.1 एक अस्पताल में जन्म के समय 50 बच्चा के भार लिये गये थे। ये भार क्लिबेशम में निम्न प्रकार थे

51, 28, 32, 26, 28, 34, 26, 30, 31, 32, 35, 37, 28, 31, 20, 27, 31, 30, 29, 26,

30, 31, 23, 27, 32, 34, 36, 28, 30, 38,

30, 31, 23, 27, 32, 34, 36, 28, 30, 38

25, 36, 38, 29, 34, 23 25, 29, 34, 26, 30, 24, 25, 34, 28, 23, 32, 31, 32, 22

इस न्याम नो बारम्बारता बटन ने रूप में लिखने न निए यणना चिह्ना (tally marks) नो प्रत्येन भार ने सामने लगा कर बारप्बारता ज्ञात नी जा सबती है मौर निम्न सारणी के प्रनुसार बारम्बारता बटन लिखा जा सबता है —

भार (X) किल्लाम	गणना चिल्ल	धारम्बारता (f)	र्ध• बार• (F)
2 0	I	1	1
2 2	I	1	2 (1+1)
2 3	Ш	3	5 (2+3)
2 4	I	1	6 (5+1)
2 5	111	3	9 (6+3)
26	1111	4	13 (9+4)
27	11	2	15 (13+2)
28	IHI	5	20 (15+5)
29	III	3	23 (20+3)
3 0	HII	5	28 (23+1)
3 1	1991 1	6	34 (28+6)
3 2	HH	5	39 (34+5)
3 4	нп	5	44 (19+5)
3 5	1	1	45 (44 -1)
3 6	11	2	47 (45+2)
37	1	1	48 (47+1)
3 8	п	2	50 (48+2)
पोग		50	

वर्ग-बारम्बारता का उपयोग

प्राय कारम्यारता चटन ये प्रत्येष मान को सत्तय स्वत्य सन स इन मानो की सम्या सरविधक हो जाती है। सत इत बटन को सिस्तन्त क्य में रखने का उपाय यह है कि इन मानो का कर्मोक्टकु कर दिया जाये और प्रत्येक वर्ग से सम्प्रितन मानों को बारम्बारता प्रात वर भी जाय। इस प्रवार के बटन बहुधा प्रयोग मे साथे जाते हैं। इस बटन मे सर्देव एव वर्ग वी उपरि सीमा ध्रमले वर्ग की निम्न सीमा होती है। इस प्रवार ने बटन को निम्न प्रवार से प्रदेशित विद्याला सकता है —

दर्गे	बारम्बारता	
$X_1 - X_3$	f ₁	
$X_2 - X_3$	f _a	
X3 - X4	f ₃	
:		
$X_K - X_{K+1}$	f_K	

व्ययहार में किंधनतर थगों नी निम्न सीमा को वर्ग में सन्मिलित मानते हैं। इस प्रकार का बटन सतत भारम्बारता बटन कहनाता है।

उदाहरण (21) में दिये हुए न्यास का वर्गीकरण करके सतत बारम्बारता बटन के रूप में उसे नीचे प्रम्तुन किया गया है वयोकि न्यास एक दशमलब तक दिया गया है। यही 03 का वर्ग-मन्तराल्ये निया गया है।

दर्ग		वाश्यक्तरवा	
20-2.3		2	
23 26		7	
26-29		11	
29 - 32		14	
3 2 3.5		10	
35-38		4	
38-41		2	
	योग	50	

इस किया मे यह समस्या सामने प्राती है कि वर्ष-प्रन्तराल कितना हो। यह वर्षों की सस्या पर निर्भर रहता है। यदि सारणी मे K वर्ष इच्छित हो घौर प्रधिकतम प्रेक्षण मान L व न्युनतम प्रेक्षण मान B हो हो

¹ वर्ग की उपरि सीमा बॉर निम्न सीमा के अचार को वर्ग-क्ष-तरास बढ़ते हैं।

यमं धन्तराल =
$$\frac{L-S}{K}$$
(2.1)

K का मान क्वात करने ने लिए एघ∘ ए० स्टबेंस (H. A. Sturges) ने निम्न सूत्र दिया है '—

जब वि कुल प्रेक्षणो नी सरया n है।

चत वर्गं धन्तरास =
$$\frac{L-S}{1+3 \ 322 \ \log n}$$

र्जसे उदाहरण (21) वे न्यास नो ही वर्षों से विभाजित वरने वारम्बारसा स्टब्स के रूप में लिला। हो सो,

गान 6 744, 7 ने निवट है अत इस न्यास के सिए 7 वर्ग से ना उपित है।

वर्ग चन्तरात =
$$\frac{38-20}{7}$$

$$=\frac{18}{7}=25$$

धारेलीय निरमण

सारणीयदा प्रेशणों को प्रामितित कर प्राय धिनित भी किया जाता है। इन विचों हारा स्थिति का जान शुग्नता से हो जाता है। ऐसे ही कुछ गुक्य-पुक्स विदो का वर्षा इस प्रदास में किया जायेगा।

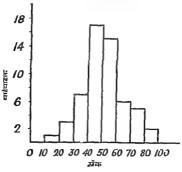
कायत चित्र

दत्तं प्रकार में निज गरायर तुला के लिए सायकत गुक्त एवं उत्सुक्त रहते हैं। किसी स्वतन्त्र पर ने मान किन्दुयों पर एक परेशित थोड़ाई धीर बारम्बारण के यानार ऊँचाई बाले सामती भी अन्यदा पर वामा जाता है। धायतों की अँबाई अन्यदा पर एक रेतनी (Scale) मानार बारम्बारता के यानार निर्धारत कर सी जाती है। धायत की पीज़ाई अन्यदा पर वर्ग-सन्तराल ने सामा होती है। दतारी थोड़ाई सामित्र के साकार पर निर्भर करती है। इस प्रकार ने विको को बनान की विश्व निक्न उदाहरण हारा चीर स्थित रायर ही जावेगी।

उदाहरण 2.2 : मार्ग्यिशी की एक परोक्षा में 56 विद्यार्थी बैठे और उनके सक विभिन्न वर्षों में इस प्रकार थे .---

संदों के वर्ग (i)	बारस्वारता (ii)	सचयी बारम्शारता ।iii)	वापेश सबयी बारम्बारता (iv)
10-20	1	1	0 02
20-30	3	4	0 07
30-40	7	11	0 20
40-50	17	28	0 50
50-60	15	43	0 77
60-70	6	49	0 88
70-80	5	54	0 96
80-90	2	56	1 00

उपर्युक्त त्यास नो बाण्याग्मा-ष्रायन-वित्र द्वारा प्रदेशित करने के लिए प्राफ पेपर पर मुज एव रोटि-प्रक्ष कीच दिय जाने हैं। फिर मुब-यक्ष पर वर्ग-प्रन्तरालों को प्रश्ति कर दिया जाता है। इन वर्ग-प्रन्तगनों पर नदनुसार बार्य्यारता के समानुपाती केंबाई के आपत बना दियं जाने है। इस प्रकार प्राप्त वित्र बार्य्यारता घायत वित्र होना है जैसाकि उदाहरण (22) के निम् चित्र (2-1) में प्रदक्षित किया गया है।



चित्र 2-1 ग्रायन चित्र

टिप्पणो : प्रदि वर्ग-प्रन्तरान समान न हो तो प्रायतो ती केनाई से वर्ग-प्रन्तरानो पी प्रिधित या नम बारण्यारत्य होने ना पना नही क्लाता है। इस स्थिति ये प्रायतो ने क्षेत्रफल मी तुलना नरता उपिन है।

बारम्बारता बहुभुज तथा बारम्बारता वक

बारम्प्राप्ता बहुभुत को बनाने भी बिबि इन प्रशान हुं प्रीक्षत था। या वर्ष-पानराकों संपद्य-धिन्दुधा का भुन-भक्षा पर निर्धारिता गर दिया जाना है। इन मात्रा भी सदमुसार बारम्बारता के समान (राम्मी के प्रभुतार) जैताई पर अन मान बिन्दुधा के उत्तर इन बिन्दुधा को मालेनिका गर दिवा जाना है। बालिंगि बिन्दुधा को मालेनि हारा अम में मिला देने पर आप्त जिम्म को बारस्थानता बहुभुत के नो है।

बारम्बारता-प्रायतीय न भ प्रत्येन प्रायत वे जिलार के मध्य प्रिन्दुला को प्रस से मिला देने से बारम्बारता बहुमुज बन जाता है।

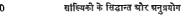
जैमे-जैने प्रेक्षणा नी मध्या प्रधिन हानी जाती है और वर्ग प्रन्तरान वस होना जाता है। बैमे-वैसे बारश्वारता बहुनुन या बारब्यारता धारन विव ना कर गर्न सरन वक दो और प्रकृत होना जाता है। इन स्विन स प्राप्त वन को बारब्वारता वह नहते हैं। सन परिकटनासक समन्त प्रेतान तथा सम्यक्षित नमुक्त प्रमत्तात होन ही स्विनि के बारस्वार रता यक पूर्णनेया साल वक्क वा कर धारण वस्त सेता है।

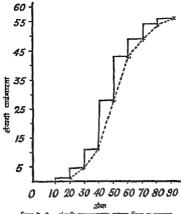
संबंधी बारम्बारता ब्रायत चित्र व बहुभुज

सवयी बारम्यारना ने सम्तर्गत दिये गये बटन ने स्नृतार चर X घोर सनयी बारम्यारता F मो प्राप्त पर सारियत न रने हेंद्व X के मानी ने मुन पर घौर वच्छी बारम्यारता F मो मोटि पर उचित रेखनी मान्यर प्राप्तित न पर सिता बता है। मा X_1 पर कैंद्वाई नी उद्यक्तिय रेखा सीन दी जानी है। इस रेखा ने शिन पर दिव्ह में X—पद्म ने समान्तर ऐसा सीन से मित्र मान X_2 ता जानी है। इस रेखा ने सित्म मिरे से Y—पदा ने ममान्तर रेखा सीनते हैं यो F_2 उँचाई वर जाती है। यही त्रम समत्ता रहना है जब तन कि समन ने प्रेषण तन न पहुँच जाये। इन प्रश्रद आप नित्न ने मनवी बारम्यारता प्राप्त चित्र हो है। इस दिव का F होतीने रखे जेसा होता है। यदि इस सित्म में प्ररोप प्राप्त माने के देख है। इस दिव का F होतीने रखे जेसा होता है। यदि इस सित्म में प्ररोप प्राप्त ने दाएँ हाथ के जिएस-दिन्दुया ना मिता दें तो प्राप्त प्रारेप प्रोप्त ने दाएँ हाथ के जिएस-दिन्दुया ना मिता दें तो प्राप्त प्रारेप पर्ते मनवी बारम्यारता ने दहुन नहते हैं।

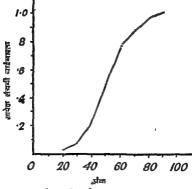
यदि त्याम वर्ग-क्षतराजों में बारश्याना गति दिया गया हो तो भवनी बारस्वास्ता तथा सर्ग-प्रनशाला भी उच्च गोमा का लेश्ट किनुया का बालिनन कर दिया जाता है भीर दन निस्दुमा को गरल रेसाझा द्वारा भितान पर सबयी बारश्यास्ता बहुमुन प्राप्त हो जाता है।

सदि बारम्बरला के स्थान पर सापेश बारम्बारतायो ना प्रयोग स्था आये ता ऊँबाई यून सं प्रारम्भ होनर ऊपर ी घोर 1 तन जाती है। इन सापेश बारम्बारनायो नो 100 से गुणा नर दें तो प्रनिधा सबयी बारम्बरना बहुबुब प्राप्त हा जाता है।





वित्र 2-2 संचयी बारम्बारता मायत चित्र व बहुमुज



चित्र 2-3 सापेश बारम्बारता बहुमुज

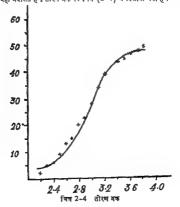
उदाहरण (2.2) में दिवे हुए न्यान के लिए सचयी बारम्बारता चित्र और सचयी बारम्बारता बहुमुब को चित्र (2-3) में स्वापेक्ष बारम्बारता बहुमुब को चित्र (2-3) में स्वय्दा निर्देशित विद्या गया है।

तोरण बक

सामान्यत किमी भी सवयी बारम्बारना वक नो तोरण करते हैं। नित प्रकार बारम्बारता बहुमुज में सितनट सरल वक नो समजित वर सनने हैं उसी प्रकार सबसी बारम्बारता बहुमुज में सितनट सरल वक ममजित किया जा सकता है। इस वक नो तोरण कहते हैं। व्यवहार में एन तोरण का समजन बारम्बारता वक में प्रवेशा सुगम है। भोजीव (Ogive) शब्द नो वाल्जुंबिल्स में प्रमुक्त जब्द भोजी (Ogec) से तिया गया है, भरोंकि इस वक ना रूप वाल्जुंबिल्स में एन विभेष सिवे भीजी जैता होता है।

तीरण के रूप को इस प्रकार समक्ष मकते हैं यदि कुछ व्यक्तियों को उनकी कैयाई के प्रमुक्तार लड़ा कर दे और उनके सिरा के सध्य बिन्दुमा को मिसादी हुई एक रेला लीक दें तो यह रेला ठोरण को प्रदक्तित करनी है। यह स्थान रह कि प्राप्त की दृष्टि से इस स्थिति में स्थानियों की केवाई कोटि पर धीर वारम्यारना मूज पर स्थित रहेगी।

उदाहरण 2 1 में दिये गये बारम्बारता बटन को ही तीरण-वक के लिए प्रयुक्त किया गया है। स्पष्टत इम उदाहरण में भार 0 1 क्लियान तक मार्ग गये हैं। सचयी बारम्बा-रता भी वहाँ प्रदक्तित है। तोरण वक को चित्र (2-4) में दिखाया गया है।



दण्ड ग्रारेख

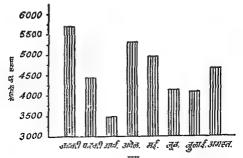
दन चित्रों ना भुत्य उद्देश्य पुछ धांवडों को एक निश्चित राल या स्थान के अनुसार प्रदानन करना हो । है। इस प्रनार के नी है मस्या (या प्रनियत) के अनुसार भायत की कैंबाई हारा प्रश्निन विये जाते हैं। इन आयना को चौडाई नान या स्थान के लिए भुज धांध पर प्रनित विन्दुमा के बीच की दूरी में कम होती है और प्रायन-विन्द के दो जे भोर सामित होते हैं।

िमो विरोध नाल सा न्यान सम्बन्धी प्रायन वो निम्ही नामो या गुणी वे समुसार विमानित परने चिनिन्न स्पर्धा द्वारा प्रदाशन विसानित वरने हैं। इस स्थिति में मायत वो जैसाई तपड़ों ने सांच्या के विसानित वो जानी है। इस प्रशास मायत के प्रयोग विभानित स्पर्धा हारा मायत के प्रयोग विभानित स्पर्धा हारा मायत के प्रयोग विभानित स्पर्धा हारा मायत के दिया जाता है। इस प्रवास के वित्र प्रायन वर दिया जाता है। इस प्रवास के वित्र ने उपित्र प्रायन के दिया जाता है। इस प्रवास के वित्र विभान्न वर्षा के उत्पादन या विसी स्थान या वास में उपप्रधा के उत्पादन या विसी स्थान या वास में उपप्रधा वर्षा के वित्र प्रयोग के वित्

उदाहरण 2.3: एर अस्पताल में जनवरी ने अगस्त तक मौसत प्रति मास रोगियों की सत्या निस्त प्रतार थीं:

मास	जनवरी	फरवरी	मार्च	भप्रैल	
रोगियों की सन्या	5727	4452	3474	5317	
मास	मई	ञ्जून	जुलाई	मगस्त	
रोगियो की मस्या	4950	4119	4065	4648	

इन श्रोकडो २ । वित्र 2-5 में स्तम्भ वित्र के रूप में प्रदेशित क्या गया है ।

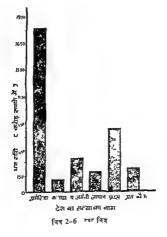


चित्र 2-5 स्तम्भ चित्र

चवाहरण 2.4 जननव्य फ्रींटरी ने अनुनार मुख मुन्त देशा एवं मस्थाना द्वारा भारत सरकार मी दिवे गये कुछ भी धन राशि नी वे थे गया है

मि या सत्या	छन शक्ति (क्लोड्र दश्यों में
भ्रमेरिना	1843 77
य-राण	138 35
पश्चिमी जमनी	376 6t
जायान	225 55
घां स	34 20
स्रातर्राष्ट्रीय भैव	271 41

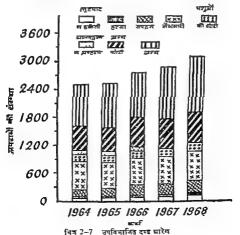
इन भीरहा वो दण्ड चित्र हारा निर्मात परन व जिल्ला वा सम्भा क गामा स सुन सदा पर समान हुरी पर प्रक्रित रिया गवा है फीर दर्व दिन्दुया पर भानी हुई रेमनी के भनुनार दण्डों को चित्रित दिया गवा है जनारि स्थि 2 6 व निर्माया गवा है।



उदाहरण 25: निम्नलिसित मारणी में राजस्थान में विभिन्न वर्षों की प्रपराधी की पटनाएँ मासिक फीनत के रूप में टी गई हैं।

1964	1965	1966	1967	1968
59	59	71	77	85
39	43	44	48	52
134	170	208	221	261
591	547	576	610	640
155	150	160	172	179
हरण 81	8.5	80	_	_
528	526	638	648	654
896	935	970	1099	1212
2483	2515	2747	2875	3083
	59 39 134 591 155 हरम 81 528 896	59 59 39 43 134 170 591 547 155 150 हरण 81 85 528 526 896 935	59 59 71 39 43 44 134 170 208 591 547 576 155 150 160 हरण 81 85 80 528 526 638 896 935 970	59 59 71 77 39 43 44 48 134 170 208 22; 591 547 576 610 155 150 160 172 71 72 72 72 73 74 75 75 75 75 75 75 75

इस न्यास को उप विभाजित स्तम्भ विज द्वारा प्रश्नीता करने के लिए वर्षों को मुज पर धौर धपराधों की सस्या को कोटि पर मितत करके विज (2-7) में प्रस्तुत किया गया है।



लेखाचित्र

यदि प्रेक्षित मान दो चरो ने हो तो उनके सम्बन्ध नो सममने के लिए लेखानित्र का उपयोग किया जाता है। ब्राफ पेपर पर किसी बिन्दु के निर्देशक (coordinates) कुमझ प्रेक्षित परो के मानो नो दलति हैं। प्रेसणो के अनुपार बिन्दुयों को सालेखित करके मिला दिया जाता है। इस प्रकार प्राय एक सरन रेसा या बन प्राप्त हो सकता है।

दन पित्रों को बनाते समय यह सावधानी बरतनी बाहिए कि विद से बरो में से एक पर स्वतन्त्र है मीर दूसरा इस पर माणित है जो स्वतन्त्र कर को X-मधा पर भीर माणित पर नी Y-मधा पर निता चाहिए। किसी रेखा-चित्र या वक्त चित्र को बनाने के लिए कम से तम धीन बिन्दु मालेमित होने धावस्थक हैं। मुख्यत वक्त बनाने के लिए पौच प्रेक्षण उपनक्ष हो तो वक्त का रूप प्रीधक फरमा निर्धारित रिया जा सनता है।

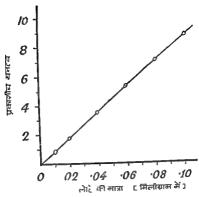
यह मावस्यक नही है कि सानेतित बिन्दुयों को मिला देने पर एक सरख रेला या वक प्राप्त हो ही। ऐसी स्थिति में मालेतित बिन्दुयों को रेखामों डारा मिला देने हैं जिससे प्रैसणों के क्लिनी विशेष कम में होने या न होने का रुपण्ट पता चल जाना है या यह कहें कि प्रेसण किती निषम के अनुसार है या नहीं, यह जान हो जाता है। विभिन्न प्रकार के चित्रों को सिमान उदाहरणों डारा दिलाया गया है। इस उदाहरणों डारा पाठक को उपर्युक्त चर्मन का उपयोग समझ में साजाएगा।

उदाहरण 2.6 शोह निर्धारण के लिए किये गये एक प्रयोग ने विभिन्न साहता पर सुरुमदर्शी द्वारा निम्न प्रकाशीय चनत्व प्राप्त हुए।

मोह (मिलीडाव)	प्रकासीय श्वतःच	
·01	08	
02	17	
04	·35	
•06	· 5 3	
.08	71	
10	89	

जरर दिये हुए प्रेक्षणों को रेमा चित्र द्वारा निरूपित करने के लिए लोह मात्रा को मुज-माश पर और प्रवासीय पनस्व को कीटि-माश पर धावस्थित कर चित्र 2-8 में इन्हें प्रविश्वत किया गया है।

यहाँ श्रतला कर से अधिकाय विकृति ऐसे क्षिपर मानों से हैं यो स्वयं परिवर्णित होते हों बडे वर्ष. साल, सप्ताह, समय, स्वान कर आयु बादि ।

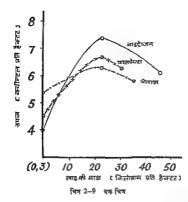


चित्र 2-8 सरतरेकाचित्र

खदाहरण 2.7 नारट्रोजन, फामफोरम व गोटाम के विभिन्न स्तरों का मूँगफती की उपज पर प्रभाव जानक के लिए एक प्रथाय किया गया । प्रयोग प्रश्वक स्वाद के तीन स्तरा की तेनर किया गय और इन स्वका पर निस्कोक उपज हुई

खाद की माता (किलोग्राम प्रति हेक्टक)	(वि साद्भोतन	वपन वष्टल प्रति हेवटर) कासकीरस	पोटास
0	3 95	4 50	5 37
22 4	7 36	6 66	6 24
44 8	6 10	6 25	5 8 1

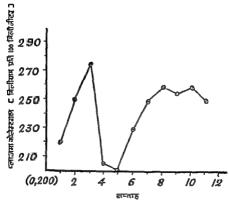
तीतो सादों के सिए उनज-वन निम्न प्रमार से बनाये गये हैं हम जानते हैं कि उपज, साद की माना पर निर्भर रक्ती है। घा स्वाद की माना ना मुब-मक्ष पर और उपज को वोटि-मक्ष पर निया गया है बनाकि सत्य-विज्ञान (Agronomy) में प्रधिकतन प्रयाग तीन स्तरों पर विये जाते हैं क्षन यहाँ तक का उदाहरण केयत तीन प्रेक्षणा के द्वारा ही दिया गया है। यह वक चिन 2-9 में दृष्टव्य है।



इंबाहरूल 28: एक प्रस्थताल में एक विशेष प्रकार के रोगियों ना साध्वाहिक प्लैज्या कोलेस्टराल (plasma cholasterol) मिनिकाम प्रति 100 मिलिलिटर नापा गया मोर निम्न परिणान प्राप्त हुए —

that are area &c			
हत्त्वाह्	ध्तैश्या कोतेस्टरास (मितिदाम प्रति 100 वाम)		
1	220		
2	250		
3	275		
4	205		
5	200		
6	230		
7	250		
8	260		
9	255		
10	260		
11	250		

उतार-चढाव प्रदीमत करने के लिए इन प्रेसणो को, प्रानेसित कर मिला दिया गया है। यहाँ सप्ताहो को अुज-मक्ष पर धौर प्लैज्या कोलेस्टराल को कोटि-मझ पर लिया गया है, जैसा कि वित्र (2 10) में दिखाया गया है।



चित्र 2-10 सामान्य सेखाचित्र

पाई मारेल

जब किसी एक ही वस्तु, पदार्थ या लक्षण के विभिन्न संघटनो की बारम्वारता प्रदिश्ति करना हो तो पाई भारेख चित्र स्थिति की अच्छी जानकारी कराता है। इस प्रकार के चित्र बनाने की विधि इस प्रकार है 'यहले एक उचित अर्थन्यास का कृत सीच विधा जाता है, फिर जिस अनुपात मे सध्यकों के आंकड़े हो, उसी अनुपात में 360° के कोण को विभाजित कर दिया जाता है। कृत से एक अर्थन्यास सीच लिया जाता है भी इस पर एक के बाद एक परिकृतित कोण बना दिये जाते हैं। इस प्रकार प्राप्त प्रत्येक सण्ड एक विशेष सपटक की प्रदासत कराती है। इन सण्डो को स्पष्ट रूप से प्रदासत करने के उद्देश्य से या तो प्रत्येक सण्ड की निम-निम्न रगो से मर देते हैं या उन्हें विभिन्न विन्दुयों व रेसायों भी सहायता से दिसाया जाता है।

सण्डो की सक्या प्रशिक होने की स्थिति में इस चित्र को बनाना उपयुक्त नहीं रहता। उराहरण 2-9: भारत में शस्य (crops) के धनुसार पानी ना प्रतिशत बटन निम्न प्रकार पा:—

श्वस्य	प्रतिवास वानी
धान	45 0
गेहूँ	15 0
भ्रत्य भ्रताज	12 0
दालें	7 0
वपास	4 0
गल्ला	6 0
ग्रन्य शस्य	110

ऊपर दिये पानी के प्रतिकात बटन को पाई प्रारेल द्वारा निक्षित करने के लिए कोण 360° को दिये हुए प्रतिकात पानी के प्रनुपात में सूत्र $^{86}_{100} \times$ प्रतिकात द्वारा ज्ञात कर दिया गया जिससे निन्न कोण प्राप्त हुए —

शहय	शेच	
धान	\$60 ×45=162 0°	
गेहूँ	\$00 × 15=54 0°	
मन्यं चनाज	\$60 × 12=43 2°	
दार्षे	*** 7=25 2°	
कपास	300 × 4=144°	
गभा	360 × 6=216°	
भ्रत्य शस्य	360 × 11=39 6°	



चित्र 2-11 पाई मारेस

प्रधं-व्यास न-म श्रीन नर नेन्द्र न ने इस अधंव्यास पर एन ने बाद एन ऊपर दिये हुए नोण बना दिये गये हैं। इस प्रनार्र नृत्तराष्ट्रों नो िन्न निम्न चिह्ना द्वारा प्रदर्शित नर दिया गया है जैना नि चित्र (2-11) में दिखाया गया है।

प्रश्नावली

 निम्त मारणो में दिये गये न्हें के आयात सम्बन्धी आंकडों को दण्ट आरेल द्वारा निरुपित की जिये।

ानरायत वाजया वर्षं (1963–64) (1964–65) (1965–66) (1966–67) रई ना मायात वरोड रपयो मे 48 8 58 1 46 2 56 2 वर्ष (1967–68) (1968–69) (1969–70) रई ना मायात वरीड रपयो मे 83 0 90 2 82 8

2 चाम वे उत्पादन एव निर्यात सम्बन्धी प्रविच 1965 से 1970 तक निम्न सारपी में दिये गये हैं। उत्पादन व निर्यात के सम्बन्ध को लेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिये।

वर्षे	टलादन	দিয়াঁত্ৰ
	(दस साख विशेषाम)	(दस लाख किसोपाम)
1965	366 4	199 0
1966	374 8	179 2
1967	379 8	205 0
1968	398 2	209 3
1969	393 6	176 7
1970	421 3	208 4

उ एक प्रयोग उपचार की विभिन्न साद्रताघो का गेहूँ के घकुरण पर प्रभाव जानने के लिए किया गया । शिक्ष-भिन्न साद्रताधो पर निम्न सारणी के अनुसार प्रतिशत

संद्रता (प्रतिचत योत) नियं त्रण	प्रतिशत अकुरण	
01	90	
02	85	
03	62	
04	35	
0.5	23	
06	9	

माद्रता और श्रनुरण के सम्बन्ध को उपयुक्त लेखाचित्र द्वारा निरूपित कीजिये।

4 एक कक्षा म विद्यार्थियो की ऊँचाई का बटन इस प्रकार था --

विद्याविद्यों की सहवा	
3	
4	
9	
11	
7	
12	
8	
5	
3	
4	
1	
	3 4 9 11 7

उरर्एक ऊँवाई के बटन को स्रोतित वक द्वारा निकार की जिये।

 कीटनाशी एनड्रीन (Eadrin) का प्रयोग करन के पश्चात मिन्न भिन्न दिना पर एफिड्स की (Aphids) प्रतिज्ञत मृत्यु सत्या निम्न भी

समय	সবিষর
(कीटनाती प्रयुक्त करने के बाद दिन)	भृत्यु सक्राः
1	604
2	67 9
3	75 3
7	838

इन प्रेक्षणों की मृत्यू यक द्वारा प्रदक्षित की जिय ।

6 निम्मार्कित सारणी में भारत की 1969-70 वर्ष में विभिन्न चनाजा की पुल उपज दी गयी है ---

श्चराण का नाम	खपड
_	(रस साव धनी में)
चीवन	40 4
उ वार	97
बाजरा	5 4
মৰ্ কা	5 7
रायी	2 2
गेहँ	20 0
रायी गेहूँ चना	5 5
दा लें	6 2
भन्य	4 9

इत उपनी सम्बन्धी साँकडो की पाई-सारेख द्वारा प्रदाशत नीजिये।

7 सत्रमण के ब	रिण भृत्यु की घटन	ाएँ इस प्रकार पा	यी गयी —	
गनमण ने प्रवार	धाव सन्ध्रमण	न्युपोनिया	रक्त-पूतिता	उदर सममण
भृ यु-सस्या	53	34	28	24
ਵਸ਼ ਸ਼ੀਕਾਰਾ ਕੀ ਹ	कार-जिल स्वतं कि	इतिज जीजित ।		

इन मौनडा को दण्ड-चित्र द्वारा निरूपित बीजिय ।

8 एक प्रयोग में रम के योज नी विभिन्न माद्रताओं पर प्रकाशीय यनस्य नामा गया इ कि निम्माहित प्रेक्षण प्राप्त हुए —

0 2	
0 4	
0.8	
10	
	0 4 0 8

साइना एव प्रकाशीय घनस्य को लेग्याचित्र द्वारा निर्मापत कीजिये ।

 गेहूँ, चावल य चन भी पनला पर पान्पारम में विभिन्न स्तरा मी प्रमुक्तिया (response) निम्नाइन सारणी में दिसाई गयी है —

(P₄O₄) का स्तर (ति० ग्राम प्रति हेवटा)	बनुहिया (बन्द्रोल की बपेला उपज में वृद्धि)			
0	गेहें 0	षावल 0	चना 0	
20	1 4	16	10	
40	2.5	2 5	1 4	
60	3 5	26	23	
80	3 8	2 4	2 5	

विभिन शस्यो ने लिए पृयक्-पृथक् बनुक्रिया-वक बनाइए ।

0 निमा सारणी मे दो परिवारा का मानिक ब्यय बिस्तृत रूप से दिया गया है :---

ब्यूय मद	वरिवार-क (श्यय ६० में)	परिवार-ख (ध्यय ६० में)
माद्य पदार्थ	30	90
व पडे	7	35
मकान किराया	8	40
पढाई	3	12
लर्च गदालत	5	40
मन्य वस्तुएँ	3	60
फुटबर	4	23

इन ग्रॉम्टा सो उप्युक्त ग्रारेच द्वारा निरूपित कीजिये।

(बी॰ काम॰ नागपुर 1967)

11. निन्त ब्रोहडो को बारन्यारता बाबात-चित्र द्वारा निरूपित कीजिये :-

खन्यादिक देवन (दरकों में)	व्यक्तिं की शब्दा
10-15	7
15-20	19
20-25	27
25-30	15
30-40	12
40-50	12
50-60	8

(सी॰ ए॰, 1963)

टिप्पणी :-विभिन्न परीक्षाओं में पूछे गये प्रकृत मूल रूप में बाग्स भाषा में ये जिनका हिन्दी अनुवाद यहाँ प्रस्तुत है ।

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

किन्ही एवको पर लिए गये प्रेसणी की श्रेणी में सामान्यतः यह तक्षण पामा जाता है कि इन मापों में किमी एक भान पर केन्द्रित होने की प्रवृत्ति होती है भीर यह मान श्रेणी के लगभग मध्य में स्थिन होता है। मुख्यतया तीन प्रकार के केन्द्रीय माप प्रयोग में लाये जाते हैं। ये तीन प्रकार के माप (1) माध्य (Mean), (2) माध्यिका (Median) भीर (3) बहुलक (Mode) है।

- माध्यः ये तीन प्रकार के होते है:—
 - (क) समान्तर माध्य (Arithmetic mean)
 - (त) गुणोत्तर माध्य (Geometric mean)
 - (ग) हरात्मक माध्य (Harmonic mean)

व्यवहार में गुणोत्तर व हरात्मक माध्य का उपयोग बहुत कम होता है प्रतः इक्का वर्णन सक्षेप में ही जिया गया है।

समान्तर माध्य समान्तर माध्य को श्रीसत श्री कहते हैं। सास्थिकी में समान्तर माध्य शांत करने के लिए यह प्रावश्यक नही है कि प्रैक्षण समान्तर श्रेणी में हो।

साधारणतया समान्तर माध्य का ही प्रयोग किया जाता है। व्यवहार में केवल माध्य जिलने से तात्वयं समान्तर माध्य से ही समका जाता है।

माना कि समय मे N बस्तुएँ, संश या एकक (Individual) है। संशों पर चर X के प्रति प्रेक्षण विसे गये हैं। समय माध्य को बहुसा ॥ (म्यू) द्वारा निक्पित करते हैं और इसका परिकलन N प्रशो पर लिये गये प्रेक्षणो X₂, X₂, X₃,...... X_N द्वारा निम्म सूत्र को सहायता से किया जाता है।

$$\mu = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N}{N} \qquad \dots (3.1)$$

$$=\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$$
(3.1.1)

यदि प्रतिदर्श में प्रेक्षणों की संस्था n हो तो सुत्र (3.1) ये N के स्थान पर n का प्रयोग कर सकते हैं। इस स्थिति में प्रतिदर्श माध्य को 🏋 द्वारा निरूपित करते हैं।

प्रपांत
$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$
(3.2)

जबकि X, प्रतिदर्श का 1 वाँ प्रेक्षण है 1

उदाहरण 3.1 : एक लासणिक (clinical) धम्ययन के धनागृत छह वर्ष की धातु के पहुर वर्ष की धातु के पहुर वर्ष के आर निम्न पाये गये :—

· 160, 135, 135, 170, 180, 135, 145, 165, 136, 145 भार (जिलोपाम) 165, 152, 132, 160, 175।

इन प्रेक्षणों के द्वारा छह वर्ष की चाय के बच्चा का माध्य भार निम्न प्रकार जात कर सकते है ---

भौर

प्राद म्हास में प्रत्येक प्रेक्षण एक ही बार घटित न होकर कई बार घटित होता है। इन प्रेक्षणी का समान्तर माध्य इस प्रकार परिकलित करते हैं। प्रेक्षणी की बारम्बारता बटन के रूप मे व्यवस्थित करते हैं। इन माना को तदनुसार बारम्बारता है गुणा करके जोड दिया जाता है और इस सहया को बारम्बारताओं के योग से भाग देने पर माध्य जात हो जाता है : माना कि चर X पर प्रतिदर्श प्रेक्षण और उनकी तदनुमार बारम्बारता निम्त प्रकार है .--

 ^{3लम} (X)	entretten (f)	
 X ₁	$f_{\underline{i}}$	
X ₁ X ₂ X ₃	fg	
X _a	fg	
•	:	
X_k	fk	

इस स्थिति मे माध्य 🗶 के लिए निम्नांकित सूत्र है।

उदाहरण 3.2: एक कारखाने से बाम करने वाते व्यक्तियों वा मासिक वेक्न सौर उनगी सहया नीचे दी गयी है।

यासिक बाव (X) (दायो में)	काम करन बासों की संक्या (1)
 75 00	16
82.50	15
150 00	10
225 00	8
300 00	4
500 00	2
760 00	1

इस फैन्ट्री में नाम गरने वानों नी प्रति व्यक्ति मानिक बाय, माध्य द्वारा ज्ञात नर सनते हैं। भ्रतः सूत्र (3.3.1) के प्रतुसार

$$\begin{array}{l} x_{f_{1}} X_{r} \\ X = \frac{1}{2} \sum_{f_{1}} \\ x_{f_{1}} X_{r} = (75.00 \times 16 + 82.50 \times 15 + \dots + 760 \times 1) \\ = 8697.50 \\ x_{f_{1}} = (16 + 15 + 10 + \dots + 1) \\ \vdots \\ = 56 \end{array}$$

 $\overline{X} = \frac{8697.50}{56} = 155.31$

प्रति व्यक्ति मासिक वेतन 153-31 रुपये है।

यदि प्रेक्षणों की सख्या अधिक हो और प्रेक्षणों में अन्तर भी कम हो तो प्रेक्षणों को क्यों में बाट दिया जाता है और प्रत्येक वर्ण में प्रेक्षणों की सख्या को उस वर्ष की बारम्बारता के रूप में लिख दिया जाता है जैसा कि नीचे दिखाया गया है—

दर्ग	बारम्बारता
X ₁ X ₂	f ₁
$X_{2}-X_{3}$	ſ ₂
$X_2 - X_3$ $X_3 - X_4$	f ₃
$X_{k-}X_{k+1}$	f.
7k 3k+1	

 $(X_1 - X_{k+1})$ एक वर्ष को निरुप्ति करता है जिसकी बारम्वारता I_i है जबकि $i=1,2,3,\dots$, k। साथ ही वर्ष को निम्म भीमा को वर्ष में समिमित्त माना शया है। इस स्थिति में माध्य को परिसाल करने के निवस मूत्र (3.3.1) का ही प्रयोग करता होता है। यहाँ कर X के मान, प्रथम वर्ष को की निम्म व जबिर मोग के सामान मान के ते कि ति को का माध्य मान कहते हैं। माना कि X_k मोर X_k का माध्य मान कहते हैं। साना कि X_k मोर X_k का माध्य मान प्रथम के स्वीध्य Y_k है। X_k के X_k का X_k के माध्य X_k है। X_k के X_k के X_k के X_k के माध्य X_k है। X_k के X_k के X_k के X_k के माध्य X_k है। X_k के X_k के X_k के X_k के स्वीध X_k के X_k के X

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{k} f_i y_i \sum_{i=1}^{k} f_i \qquad \dots (3.4)$$

सूत्र (3 4) की सहायता ने वर्गीहर प्रेक्षणा वा माहर ज्ञात विया जा सकता है।

इस प्रकार परिश्वित माध्य यास्तवित समानर भाष्य स बिन्न हो मनता है बयाति यही यह करना नी गयी है वि वर्ग म गभी प्रेशम बग न मध्यमान पर वेन्दित है। प्राय सह गण्यना पूर्णतमा सप्य नही है। साखारणतया खतरात छाट होते की दशा में यह श्रुटि मधित नहीं होती है। इस विधि का उपयोग समय बचाने ने निष् दिया जाना है।

जबाहरण 3.3 एन पीट सम्बन्धी प्रवाग म विका-नाल (Larval period) के लिये वर्ग-मन्तराल और इन वर्गी म कीटा की सदया इस प्रकार थी —

वर्गवन्तराल (दिनों में)	बीटों वी श्रमा	
 25—27	14	
27—29	26	
2931	13	
31-33	11	
33—35	2	

मीट का माध्य डिम्म काल परिकलित करने के लिए पहल मध्य माना का काल करना होता है।

बगी के मध्य मान Y₁ 26, 28, 30, 32, 34 कीटा की सक्या 5, 14, 26, 13, 11, 2

$$\pm (14 + 28 \times 26 + 30 \times 13 + 32 \times 11 + 34 \times 2)$$

ċ.

$$\overline{X} = \frac{1904}{66} = 28.85$$
 [दन

गुणोत्तर माध्य : प्रेक्षणा X_1 , X_2 , X_3 ,, X_n वा गुणोत्तर माध्य (G M) ज्ञात करने के लिए यह सूत्र है —

$$G M = (X_1 X_2 X_3 X_n)^{1/n}$$

यदि प्रेक्षण X_1, X_2, X_3, \dots ..., X_k अपनी तदनुसार बारम्बारताचो f_1, f_2, f_3 ..., f_k सहित दिये गये हो तो गुणोत्तर माध्य निम्न मून की सहायता से जात कर सकते हैं —

G M=
$$\begin{pmatrix} I_1 & I_2 & I_3 & I_k \\ X_1 & X_2 & X_3 & \dots & X_k \end{pmatrix}^{\frac{1}{n}}$$
 ... (36)

$$\begin{pmatrix} k & & & \\ \text{water } \mathbf{I} & I_1 = n \end{pmatrix}$$

यदि न्यास प्रनुपात या प्रतिशत सम्बन्धी हो तो गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना उचित है।

हरात्मक माध्य : प्रेक्षणो $X_1, X_2, X_3, ...$..., X_n व । हरात्मक माध्य (H M) के लिए मुन यह है —

$$\frac{1}{HM} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{X_*} + \frac{1}{X_*} + \frac{1}{X_*} + \dots + \frac{1}{X_*} \right) \dots (37)$$

यदि प्रेक्षणो X_1 , X_2 , X_3 ,......, X_k की बारम्बारता कमश्च ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 ,......, ℓ_k हो तो हरात्मक माध्य के लिए निम्नांकित सुत्र ना प्रयोग नरते हैं .—

$$\frac{1}{HM} = \frac{1}{n} \left(\frac{f_1}{X_1} + \frac{f_2}{X_2} + \frac{f_3}{X_3} + \dots + \frac{f_k}{X_k} \right) \qquad \dots (38)$$

$$\frac{k}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} l_i = n$$

हरात्मक माध्य का प्रयोग मात्रात्मक दरो जैसे प्रति रुपया चीको की मात्रा या प्रति चटा गति भादि के लिए उपयोगी रहा है।

यदि प्रेक्षित मानो में कोई मान शून्य हो तो गुणोत्तर या हरात्यक माध्य कात करना सम्मय नही है। इसके भ्रतिरिक्त यदि ऋणात्यक प्रेक्षणों की सख्य विषम हो तो गुणोत्तर माध्य कभी-कभी काल्पनिक हो जाता है। ये किन्नाइयाँ इन माध्यों का महत्त्व कम करती हैं।

माध्यिका

परिभाषा: माध्यिका वह विचर मान है जो कि सम्पूर्ण न्यास को दो बरावर भागो में विभाजित करता है। हमें दम प्रवार भी समक्ष सकते हैं कि यदि समस्त त्यास को भारोही वा धर्वरोही त्रम में स्थवस्थित करने पनरों तो मध्य विवर मान माध्यिका बहुवाना है। समग्र या प्रतिदर्श होनों के लिए एक ही विधि साथ होती है।

माध्यिना को निम्न स्थितियों में जात करना खिंछन उपयोगी है। यदि दिये गये भ्यास में बुछ परम मान विद्यमान हो जैने एक कार्यासव से कार्य करने वाली के मासिक केदन 110, 150 215 260 700 1200 एनचे हो, तो इस स्थिति में धारिपका सन्य की स्रोता एक सम्छा नेन्द्रीय मान है क्योंकि यहाँ नास्य 438 33 व है जबकि स्विकतर काम करने वालों का वेदन 260 इ. या इससे कम है।

यदि ग्याम वर्ग अन्तरासो ने रूप में ही और इसके प्रारम्भिक या प्रस्तिम में से कोई एक वर्ग या दोनों वर्ग विकृतान्त हो तो आध्यिका केन्द्रीय माप के लिए उपयुक्त है जैसे निम्स बटन के लिए माध्यिका जात करना उपयुक्त है —

व्यक्तियों मी जानु (क्यों में)	व्यक्तियों की स्वरा
<5	3
%10	9
10-20	16
20-30	8
30-40	15
4050	20
5060	6
>60	4

ित्ती बटन में मुले बगों नो लेना प्राप्त प्रतिवार्य हो जाना है। यदि प्रेयानो नो ही मुले रूप में निया गया हो जैसे 60 वर्ष से प्रधित भाषु ने स्थतिया नी सस्या ज्ञात नी गयी हो तो इस स्थिति में शन्तिम वर्ष नी उपरि सीमा नटी है।

यह गुणारमन स्थात ने लिए भी उपयुक्त है। इस स्थिति में एनका की काटि प्राय लिसी जाती है जैसे स्थालको की सुरदरता, बस्तुयो का स्वाद मादि ।

मदि प्रत्येक प्रेक्षित क्षत्र क्षत्य क्षत्य क्षित्र गया हो और बुक्त प्रेक्षणा की सम्या n हो तो दो स्थितियाँ सम्भव हैं।

(1) जब n विषम है। (2) जब n सम है।

स्थिति ! — n विषय होने वी स्थिति थे n को गर्देश n=2 k+1 के रूप में तिम सन्ते हैं जबित k एव पूर्ण सर्वा है । माना कि समस्त प्रेक्षित खरी की आरोही जब में समस्त प्रया है तो (k+1) वें विचर मान से k अर पहले होंगे निनके मान दग मान से

नम यासमान होंगे भीर k मान बाद मे हाथे जिनने मान इसने समान या इससे भ्रधिक होंगे। भ्रत (k ∤-1) वा प्रेक्षिन भ्रन माध्यिका वङ्गलाता है।

$$X_1, X_2, X_3,, X_k, X_{k+1}, X_{k+2}, ..., X_{2k+1}$$

जबरि प्रेक्षण X1, X2, X3 .X2k+1 अस म व्यवस्थित हैं।

चराहरण 3 4 उपलब्ध पाँगको ने अनुसार विहार राज्य में विभिन्न सिंचाई योज-नामो ना मनुमानित व्यय इत प्रवार है —

> ध्यय (दस सारा —26 8, 66 0, 15 2, 8 8, 8 1, 9 9, रुपयों मे) 179 7, 11 3, 15 2

यह ग्यास चारोही त्रम में निम्न प्रकार है।

8 1, 8 8, 9 9, 11 3, 15 2, 15 2, 26 8, 66 0, 179 7

यहाँ मानो की सरुवा9 है जो कि विषम है। नियम के श्रनुसार पांचवा मान माध्यिका है।

त माध्यिका == 152 रु (दस लाख)

स्थिति 2 — n सम होने को स्थिति मे, सर्दंव n = 2k के रूप मे निलाजा सकता है जबिक k एन पूर्ण सस्या है। इस स्थिति मे वेचल एक प्रेसित धन पस्य धक नहीं होगा तथापि बीच के दो धन मध्य धन ने रूप मे होंगे। प्रेसित धनों (प्रेसणों) को सर्वप्रयम कम मे रलना धनिवार्य है। बीच के दो प्रेसित धकों का समौतर याध्य ही माध्यिका होती है।

माना कि धारोही कम में व्यवस्थित 2k ब्रेक्षित मान निम्न हैं

$$X_1,\,X_2,\,X_3\quad X_{K\,\,1},\,X_k,\,X_{k+1},\,X_{k+2},\,X_{k+3}\,...\,X_{2k}$$

यहाँ क्षें $\{k : h\}$ मान से [k-1] मान पहले और (k-1) में मान से [k-1] मान बाद मे हैं। श्रत

माध्यका
$$Md = \frac{X_k + X_{k+1}}{2}$$

उदाहरण 3 5 : 1972 के भारतीय भाँकडो के अनुसार मध्य प्रदेश में विभिन्न सिचाई योजनाओं पर अनुसानित व्यय निम्न हैं —

व्यय [लाख रुपये] 159, 120, 172, 142, 201, 107

इस न्यास नी माध्यका हात करने के लिए इन धाँवडो का घारोही वस इस प्रकार है ---107, 120, 142, 159, 172, 201

यहाँ मानो की सस्या 6 है जोकि सम है छत उत्पर दिये हुए नियम के धनुसार तीसरे द चौथे मान का समावर माध्य माध्यिका होगी ।

माध्यका =
$$\frac{142 + 159}{2}$$

= $\frac{3 \cdot 1}{2}$
= 150 5 सारा रुपए

यदि प्रयोग प्रीशत यन परिवर्ती वारम्बारता यहित सारणीवड हो को माध्यका जात करते के लिए पहले प्रेशना को प्रकी मान के प्रमुखार प्रारोही या यवरोही प्रमु से स्पक्ष दिखा रहे लिए पहले प्रेशना को एको रहे कि इन प्रेशित मानो की तदनुसार बाराबाशता कही रहती है। प्रमुख स्वाप्त में माध्य या या प्राराखारता में, जो बारम्बारता मो के बोग के माध्य है, एक जोडकर इसका माध्या शात कर लिया जाता है प्रयोग मादि सारम्बारता में योग ति स्वाप्त मादि कर लिया जाता है प्रयोग मादि सारम्बारता में योग ति स्वाप्त मादि सारम्बारता में यह से सारम्बारता में निकास कर लिया जाता है। पिर स्वप्ती बारम्बारता में यह सिंग सम्बाप्त मादि सारम्बारता में यह

देतते हैं कि वह बीनता ब्यूनतम संपयी बारम्बारता है जो कनवा $\frac{n+1}{2}$ दे- गमान है पा उससे भ्रमिक है भ्रमीतृ इस स्थ्या का किस संप्यो बारम्बारता में समावेश है। इस सक्यी बारम्बारता का जो तरमुवार भीतत मान होता है वही बायिका होती है।

माध्यिता के परिकत्तन करने की विशिक्ष निम्न उदाहरण झारा भीर स्राधिक स्पन्ट ही जायेगी।

उदाहरण 3.6 एक पैक्ट्री में नाम करने वामों का प्रति दिन वेतन चौर उनकी निम्न कारम्बारता धारणी में की गयी है।

यहाँ प्रेक्षित मानो को कम में ही दिया क्या है।

प्रतिक्षित मेतन की तह (X) (इन्दे)	का ? रूपने शसा की वेक्श (f)	र्च • कार • (f)
2 0	2	2
2.5	2	4
3 0	7	11
3 5	14	25
4 0	20	45
5 0	6	51
12 0	3	54

संख्या 27 5 ना सचयी बारम्बारना 45 भ समावेण है। यत स बार 45 के भनुसार माध्यिका वेतन 40 के प्रति दिन है।

जब भी रहे वर्गों में विभाजित किये गये हा खर्बात् सतत त्यास को स्थिति हो। [यर्गों को स्थिति में सतत त्यास से भिभागय है कि सदैव विख्ते वर्ग की उपिर सीमा भगते वर्ग की निम्न सीमा के समान है।] तो सर्वप्रथम वर्गों को कम म रल दिया जाता है भीर फिर इस बटन के लिए सचयी वाग्म्बारका जात करती जाती है। बारम्बारता के योग का भागा भर्यात् ने जात कर लिया जाता है। पिछने लक्ड में दी गयी विधि की भीति यह

ज्ञात करते हैं वि सक्या $\frac{n}{2}$ का किम सचयी बारम्बारता ये समावेश है। इस समयी बारम्बारता ये सम्मुख जो वर्ग होता है वही माध्यिका वर्ग होता है। किन्तु माध्यिका का वेवल एक ही मान सम्भव है धर्षात् माध्यिका धर्मिद्धतीय है। धर्म इस वर्ग म निम्नतम और उपित सीमा के बीच का एक मान माध्यिका होगा या सीमा मानो में से स्वय भी एक मान माध्यिका हो सकता है। इस घडितीय मान के नीचे दिये गये सुम्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं। साना कि क्षित्र वारम्बारता बटन निम्म है।

वर्ग	शर∘	स॰ शार•
X ₁ - X ₂	f ₁	F ₁
$X_{2} - X_{3}$	$\mathbf{f_2}$	$\mathbf{F_2}$
	f_3	Fa
$X_3 - X_4 \\ X_i = X_{i+1}$	f_{ϵ}	.F _i
$X_{k}-X_{k+1}$	\hat{f}_k	$F_k = n$
	[अहर्ष द्वर्ग=ग]	

तो सूत्र है,

(माध्यका)
$$M_d = L_o + \frac{\frac{n}{2} - C}{f} XI$$
 (39)

जबिक Lo माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा है।

C माध्यिका वर्ग से ऊपर वाले वर्ग के सम्मुख स बार है।

धियका वर्ग की बारम्बारता है।

 माध्यकावर्गं की उपरिव निम्न सीमाका धन्तर है बर्षात् वर्गं धन्त-रास है। मूत्र (3.9) ने घोषित्य नो इस प्रनार समग्र सनते हैं। माध्यिना तक सनयी बार म्बारता $\frac{n}{2}$ है घोर $\left(-\frac{n}{2}-C\right)$, माध्यिका वर्ष नी निम्न सीमा घोर माध्यिका के बीच ही बारम्बारता है। यह माना नि बारम्बारता विशे धारास से समरूप से बढी हुई

है। तो
$$\frac{n}{2}-C$$
 $\times 1$ बारम्बान्ता $\left(\frac{n}{2}-C\right)$ के लिए मावश्यक सम्याई है। मत L_0 में इस सम्बाई को जोड देने पर सूत्र $[39]$ प्राप्त हो जाता है।

उदाहरण 37 एक नर्वेक्षण संबुद्ध व्यक्तियों की प्रायु आत की गयी जिसका कि कर्गी सहित कारम्यान्ता बटन निम्नाक्ति सारणी में दिया गया है।

बायु बगे (वर्ष) (X)	व्यक्तियों की संस्था (f)	स• बार. (F)
<5	5	5
5—10	9	14
10-20	16	30
20-30	8	38
30-40	15	53
40—50	20	73
5060	6	79
>60	4	83

उपर्युक्त स्थाम से वर्ग विकृतात हैं। श्रेटि माध्य ज्ञान करना काहें तो श्रीन्तम को का मध्य मान ज्ञात करना सम्भव नहीं है। अब यहाँ माध्य वा परिकलन करना सम्भव नहीं है, परन्तु माध्यका वा परिकलन करना सम्भव है।

नम्या
$$\frac{n}{2} = \frac{83}{2} = 41.5$$

 $\frac{\pi}{2}$ के मान 4! 5 का न बार 53 में समावेश है। बात माध्यका वर्ग [30–40] है। मृत (39) के बनुमार माध्यका,

$$M_d = 30 + \frac{415 - 38}{15} \times 10$$
$$= 30 + \frac{35}{15}$$

== 32 33 वर्षे

चत्रपंक

परिभाषाः ये वे विचर-मान हैं जो सम्पूर्ण बारम्बारता को या जिन पर नोटि बारम्बारता बटन क्षक के धन्दर ने खेत को चार बराबर आयो में विभाजित करती हैं। वह विचर मान जिस पर नोटि कृस बारम्बारता-क ने धन्दर ने केत्र को 1 3 के मनुपात में विभाजित करती है, प्रथम चतुर्पक, 1 1 ने धनुष्यत में विभाजित करती है, विदेष चतुर्पक केति करती है, हितीय पतुर्पक सौर जो 3 1 के घनुष्यत में विभाजित करती है, हितीय पतुर्पक सौर जो 3 1 के घनुष्यत में विभाजित करती है, हितीय पतुर्पक सौर जो 3 1 के घनुष्यत में विभाजित करती है, हितीय पतुर्पक सौर जो 3 1 के घनुष्यत में विभाजित करती है, हितीय पतुर्पक सौर के स्वाप्त कि सौर है ।

ऊपर दी हुई परिभाषा से स्पष्ट है नि द्वितीय चतुर्यन और माध्यिका एक समान होते हैं।

प्राय Q₁ को लघु चतुर्यंक व Q₃ को गुरु चतुर्यंक भी कहते हैं।

चतुर्षक ज्ञात करने हे लिये सगमग उसी प्रकार ही रीति हा प्रमुसरण करते हैं जो माध्यका निकालने हे बाम धाती है। प्रेक्षणों को क्रम मे व्यवस्थित कर सिया जाता है। इस बदन में सबयी बारम्बारताएँ ज्ञात करसी जाती हैं। यदि प्रस्ततत न्यांस हो तो Q_1, Q_2, Q_3 निकालने हे हेतु अमश सस्याधों $\frac{n+1}{4}$, $\frac{2(n+1)}{4}$ व $\frac{3(n+1)}{4}$ का परिकलन कर सिया जाता है। इन मानो का बिन सबयी बारबारताधों में समायेश होता है उनने तक्तुसार विवार मान क्रमश Q_1, Q_2, Q_3 को निरूपित करते हैं।

उदाहरण 3 8 यदि उदाहरण (3 1) में दिये गये बारबारता बटन के चतुर्यंत्र झात करने हो तो इनका परिवसन निम्न प्रकार से कर सकते हैं —

 Q_1 के लिए $\frac{n+1}{4} = \frac{51}{4} = 12.75$ । इस मान का स बार 13 में समावेश है प्रव

Q₁ == 2 6 किलोग्राम

 Q_2 के लिए $\frac{2(n+1)}{4} = 25.5$, इस मान का स बार 28 में समावेश है घत

 $Q_2 = 30$ किलोग्राम

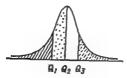
 Q_3 के लिए $\frac{-3(n+1)}{4} = 3825$, इस यान का स बार 39 में संगावेग है घत

 $Q_3 = 32$ किलोग्राम

यदि न्यास को बर्गों में विमाजित बरके बारम्बारता सहित सारणीबद्ध दिया गया हो धर्मात् सतत न्यास हो तो इन वर्गों को त्रम में व्यवस्थित कर लिया जाता है भौर सचयी बारम्बारता जात कर सी जाती है जैसा कि माध्यिका के तिये विया गया है। इसके पहचात् चतुर्पक निम्न सूत्र की सहायता से जात किये जा सनते हैं। यह ध्यान रहे कि Q_1, Q_2, Q_3 के लिए चतुर्यंक वर्ग का निर्णय त्रमश संस्थाश्री $-\frac{n}{4}$, $\frac{2n}{4}$, $\frac{3n}{4}$ के प्राधार पर होता है।

$$Q_{k} = L_{o_{k}} + \frac{K \times n}{4} - C_{k} \cdot I_{k}$$
 (3.10)

जब कि K = 1, 2, 3, रत देने पर त्रमश चतुर्यंक Q_1, Q_2, Q_3 के लिए सूत्र उपलब्ध हो जाता है।



वित्र 3-1 चतुर्यकों का मारेशी निरूपण

सूत्र (3 10) मे,

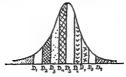
L - Kबें चत्र्यंक के लिए वर्ग की निक्ननम सीमा है। C. - Kवें चतुर्चक के वर्ग से ऊपर वाले वासे वर्ग के सम्मुख सबयी बारम्बारता है।

्रि - Kवें चतुर्यंग-वर्ग की बारम्बारता है।

I. - Kवें चतुर्यक-वर्गकी उपरिव निम्न सीमा के घन्तर के समान है।

वशमक

परिभाषा --दशमक वे विवर मान हैं जो कुल बारम्बारता को दस समान भागी से विभाजित परते हैं। यदि चर सतत हैं तो वे विचर मान जिन पर कोटिया वक के नीचे के क्षेत्र को दस समान क्षेत्रों में विभाजित करती हैं देशमक कहलाते हैं।



वित्र 3-2 दशमनो का भारेली प्रस्तुनीकरण

भसतत न्यास के दशमक D_k , (k=1, 2, 3,...........9) का परिकलन करने के

लिए सस्याम्रो $\frac{(n+1)K}{10}$ को ज्ञात करना होता है इसी सस्याका जिस सचयी दार

में समावेग होता है उसका तदनुसार विचर मान दशमन होता है (स्पप्टत D_{S} माध्यिका को निरूपित करता है।)

उदाहरण 3.9 —यदि उदाहरण (2 1) मे दिये गये बारम्बारता बटन के लिए $\mathbf{D_3}, \, \mathbf{D_8}$ ज्ञात करने हैं तो $\mathbf{D_3}$ के लिए सक्या $\frac{3(\mathrm{n}+1)}{10} = \frac{3 \times 51}{10} = 153$ । इस

सस्या का स बार 20 में समावेश है। घत दशमक D_s == 28। इसी प्रशार D_8 के लिए $\frac{8(n+1)}{10}$ == 41.8, इस सस्या का स बार 44 में समावेश है। घत झाठवाँ दशमक

 $\mathbf{D_6} = 3$ 4 । यदि स्रौन डेसतत वर्गों में विभाजित करने लिसे गये हो तो चतुर्यक ने समरूप निम्न सूत्र का प्रयोग नरके दशमक $\mathbf{D_k}$ (जब कि $\mathbf{K} = 1$, 2 , 3 , 9) झात कर सनते हैं ।

$$D_{K} = L_{OX} + \frac{\frac{K \times n}{10} - C_{K}}{f_{K}} \times I_{K}$$
 (311)

यहाँ दशमक वर्ण की सक्या $\frac{K \times n}{10}$ के द्वाराजात किया गया है।

इस सूत्र मे प्रत्येक सकेतन के लिए k वौ दशमक शब्द का प्रयोग करना होता है। शततमक

परिभाषा — किसी बारम्बारता बटन में शततमन ने त्रिचर मान हैं जो हुत बारम्बारता को सौ समान भागों में निमानित नरते हैं। यदि चर सतत है तो वे विचर मान, जिन पर कोटियों करू ने नीचे के क्षेत्र को सौ समान भागों में विभाजित नरती हैं शततमक कहनाते हैं। इन्हें P_k डारा निरूपित नरते हैं जब कि k=1,2,3,...,99

यदि भ्रसतत न्यास हो तो शततमक ज्ञात करने के लिए संस्थाओं $\frac{K(n+1)}{100}$ की ज्ञात

करना होता है उसके सदनुसार विचर मान ही k वा शततमक होता है।

यदि बारम्बारता बटन प्रेक्षणो को सतत वर्गों में विभाजित कर के दिया गया हो ती चतुर्यंक के समरूप सूत्र शततमक के लिए दिया जा सकता है।

$$P_k = L_{ok} + \frac{\frac{K \times n}{100} - C_k}{f_k} \times J_k$$
 (312)

जब कि k=1, 2, 3,...........99

इस सूत्र में सकेतनो ना वर्णन क्षेत्र चतुर्थन के स्थान पर क्षेत्र काततमक शब्द की प्रयोग नरके दिया जा सकता है। स्पष्टत Pso माध्यिना को निरूपित करता है।

उदाहरण 3 10 — गणित की परीक्षा में एक वक्षा में विद्यार्थियों के प्रको का विभिन्न वर्ग ग्रन्तरालों के अनुसार निम्न बटल पाया सम्मा

अकों के वर्ग च अन्तराश	विद्यार्थियों की शंकरा [कार.]	र्ध. बार्
0-10	3	3
10-20	6	9
20-30	16	25
30-40	20	45
40-50	32	77
50-60	44	121
60-70	9	130
70-80	4	134
80-90	2	136
90-100	1	137

- (1) माध्यन (1) प्रयम व तृतीय चतुर्यन (11) दूधरे व सातर्वे देशमन (12) पवपनवें शततमन, का परिकलन निम्न रूप में निया जाता है।
 - (i) सूत्र (3 9) ने धनुगार माध्यका के सिए

$$\frac{n}{2} = \frac{137}{2} = 685$$

श्चारस्वारतः 685 कास बार 77 में समावेश है। धत मास्विका वर्ग-धन्तरास [40-50] में स्थित है।

माध्यका Md=
$$40 + \frac{685 - 45}{32} \times 10$$

$$=40+\frac{23.5}{37}\times10$$

(u) इसी प्रवार प्रथम व तीसरा चतुर्षेत्र ज्ञात करने के हेतु सूत्र (3 k0) का प्रयोग किया गया है ।

प्रथम चतुर्यंक
$$Q_1$$
 के लिए $\frac{n}{4} = \frac{137}{4} = 34.25$

इस मान का स बार 45 में समावेश है धत

$$Q_1 = 30 + \frac{34 \cdot 25 - 25}{20} \times 10$$

$$=30+\frac{925}{20}\times10$$

इसी प्रकार तृतीय चतुर्यंक Q_3 के लिए $\frac{3 \times n}{A} \approx 102.75$

$$Q_3 = 50 + \frac{10275 - 77}{44} \times 10$$

$$=50+\frac{2575}{44}$$
.x 10

== 55 85 चक

(m) दशमक ज्ञात वरने के लिये सूत्र (3 11) का प्रयोग किया गया है। $D_{\mathbf{z}}$ के लिए

संस्था
$$\frac{2 \times n}{10} = \frac{137 \times 2}{10} = 27.4 \% 1$$

मत D₂ वर्ग-मन्तराल [30-40] मे स्थित है।

$$D_2 = 30 + \frac{274 - 25}{20} \times 10$$

$$=30+\frac{24}{20}$$

इसी प्रकार
$$D_7$$
 के लिये $\frac{7 \times n}{10} = \frac{137 \times 7}{10} = 959$

ग्रत दशमक D₁ वर्ग-मन्तराल [50-60] में स्थित है।

$$\therefore D_7 = 50 + \frac{959 - 77}{44} \times 10$$

$$=50+\frac{189}{44}$$
 x 10

== 54 3 **घ**क

शततमन में लिए सूत्र [3:12] का प्रयोग किया गया है।

पचपनमें शतक्षमन
$$P_{65}$$
 ने लिए सस्या $\frac{55 \times n}{100} = \frac{55 \times 137}{100} = 75.35$

यह सस्या वर्ष-धन्तराल [40-50] मे स्थित है।

$$P_{65} = 40 + \frac{75 \cdot 35 - 55}{32} \times 10$$

$$= 40 + \frac{30 \cdot 35}{32} \times 10$$

$$= 49 \cdot 45 \cdot 10$$

बहुलक

परिभाषा बहुतक किसी चर पर प्रेसणो वे समुज्य के वह मान है जिसकी बारम्बारता सबसे प्रधिक होती है ।

यदि समुच्यय में सबसे प्रधिन बारम्बारता वाले एक से प्रधिन मान हो तो इस स्थिति में एक स्थान अपन के एक से प्रधिन बहुतक हो सबसे हैं। यदि बारम्बरता बदन मिना निप्ती मन्तरातों के दिया गया हो तो बदन वो देवकर ही बहुतक आत कर सबसे हैं। जैसे उदाहरण [36] के काम बरने वालो वो प्रधिकतम बारम्बारता 20 है सब सहत्तक 40 क जीविंदन हुया।

यदि मानके बगों में विभाजित करने बारस्वारता सहित बारखीबढ़ किये गये हो तो बहुतक का निम्न सूत्र की सहायता से परिकाल कर सकते हैं। माना कि बारस्वारता बटन निम्म है।

वर्ग-वस्तरास	वरिश्वास्त
X ₁ - X ₁	f _I
$X_3 - X_3$	f_2
$X_5 - X_4$	fg
1 1	1
X_{k+1} - X_k	f_{K-2}
$X_k - X_{k+1}$	fk
$X_{K+1} - X_{K+2}$	f_{K+1}
1 :	•
$X_n - X_{n+1}$	f _a

सो बहुमक,
$$M_0 = L_0 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times 1$$
 (3.13)

जब नि $L_0 = aहुलक वर्ग की निम्नतम सीमा है। प्रति यूनिट ग्रधिकतम बारम्बारता के तदनुसार वम्पको बहुलक वर्ग करते हैं 1$

 $\Delta_1 =$ बहुलक वर्ग की बारम्बारता का इससे पिछले वर्ग की बारम्बारता से ग्रन्तर

△2=बहुलन वर्ग की बारम्बारता का इससे ध्रमले वर्ग की बारम्बारता

I = बहुतर वर्ग की उपरि सीमा का निम्न सीमा से घन्तर । माना कि अपर/दिथ बटन म ि⊭ सबसे प्रधिक बारम्बारता है। तो सुत्र के लिय

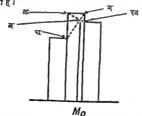
 $L_0 = X_k$, $\Delta_1 = \int_{\mathbb{R}^{-1}} \int_{\mathbb{R}^{-1}} \int_{\mathbb{R}^{-1}} \int_{\mathbb{R}^{+1}} \int_{\mathbb{R}^{$

डिप्पणी [1] यह ध्यान रखना चाहिये वि वर्गी को प्रारोही या प्रवरोही कम म रखना प्रावश्यन है।

[11] किसी बटन म एक सं ग्रधिक बहुलक भी हो सकते हैं।

[iii] बहुतक वर्ण का पता बारस्वारता को देखकर ही चल जाता है किन्तु इस वर्ण म बहुतक का एक निक्चित् मान जात करने के हेतु सूत्र [39] का प्रयोग करना होता है। बहुतक का ज्यामितीया निरूपण

यदि बारस्वारता बटन ना त्रमित वग-मन्तराला ने धनुसार बारस्वारता प्रायत विश्व द्वारा निरुपित नर दिया जाए ता बहुनन सबसे प्रधिन ऊँचाई बाले प्रायन में स्थित होता है। प्रत नीचे चित्र [3-4] म तीन धायत दिलाये गय हैं। बीच ना प्रायत बहुतन वर्ग नी बारस्वारता नो प्रदक्षित नरता है और एक इससे पूर्व य एक इसके बाद नी बारस्वारता को प्रदक्षित करता है।



चित्र (3-3) बहुलक का ज्यामितीय निरूपण

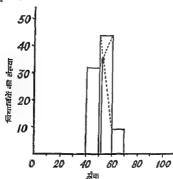
चित्र (3-3) मे रेखा क ख ग्रीर ग घ का कटान-बिन्दु व का X—निर्देगाक बहुसक मान के समान होता है।

उदाहरण 3 11 उदाहरण न॰ [3 10] म दिये गये बटन का बहुतक [1] गणितीय मृत्र द्वारा [11] च्यामितीय विधि द्वारा, ज्ञात करन के लिए दिये गये बटन मे मधिनतम बारम्बारता 44 है। मत बहुतक मन्तराल [50–60] म स्थित है। बहुलक का यथार्थ मान सूत्र (3.14) की सहायता से ज्ञात करते हैं।

Lo=50,
$$\triangle_1$$
=44-32=12
 \triangle_2 =44-9=35, I=50-40=10
Mo=50+ $\frac{12}{35+12}$ × 10

=52 55 us

(ii) ज्यामितीय विधि हारा बहुनकं चित्र (3-4) में दिया गया है। चित्र हारा प्राप्त बहुनक मान Mo = 52.5



चित्र (3-4) बहुसरू का ज्यामितीय निरूपण प्रस्तावसी

 एक फ्रेन्ट्री के श्रीमको का बायु-बटन बौर आयु-बर्गों की तक्तुसार बारबारता निम्न सारणी में दी गयी है .—

व्यापु वर्ग	थमिकों की सकता	
1019	0	
20-29	3	
30-39	9	
4049	13	
50-59	1	
6069	1	

- () इस बटन की बहुलक धायु जात वीजिये ।
- (॥) याध्यिका क्या है ? क्या इसे लक्षणिक न्यास के लिए ज्ञात किया जा सक्ता है ?
 - (III) विभिन्न केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापो के गुणा एव दोषा का उल्लेख कीजिये ।
 - एक पुरुषों के समूह का भाग बटन निम्न प्रकार है -

atā	[वर्षी में]	विश्व विश्वों की सक्या	
2	832	2	
3	337	0	
3	842	1	
4	347	5	
4	852	2	
5.	357	0	
5	862	7	
6	367	3	

उपयु क्त बटन के लिए

- (1) माध्य प्रापु (11) माध्यका (111) बहुलक (11) गुरु चतुर्पक (v) ग्राठवा दशमक (vi) सत्तरवा शततमक ज्ञात नीजिये ।
 - सास्यिकी की एक परीक्षा मे प्राप्त झको के लिए निम्न बटन के बहुलक, माध्यका धीर समान्तर माध्य का परिकलन कीजिये।

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50

विद्यापियो की

संस्था 20, 43, 75, 67, 72, 45, 39, 9. 8. 6

(बी काम, नागपुर, 1971)

वित्तर बहलक 25, माध्यिका 20, माध्य 22 21

- (ब) गुणोत्तर माध्य के गुणा एव दोषो पर टिप्पणी लिखिए ।
 - (व) निम्न भौकडी का गुणोत्तर माध्य परिकलित कीजिये। 6 5, 169 0, 11 0, 112 5, 14 2, 75 5, 35 5, 215 0

(बी काम, झानझ, 1966)

- [गुणोत्तर माध्य=42 74]
- निम्नाकित विद्यायियों के एक समूह के मासिक व्यय का गुणोत्तर पाध्य तथा हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिये ।
 - 125 00, 130 00, 75 30, 10 00, 45 00, 5 00, \$ 50, 0 40, 500 00, 150 00

(बी काय, घान्छ, 1966)

- 6 एक फैस्ट्री में 65 काम करने वालो की माध्य मासिक माथ 270 रुपये परि-क्षित की गयी। कुछ समय परचात् जात हुआ कि दो ब्यक्तियों की माय 250 रुपये लिख ली गयी थी जबकि उनकी वास्तविक माय 150 रुपये थी। मत भव भाष मुद्ध माध्य जात की विये।
- 7 एक ब्यक्ति को पहले वर्ष के बन्त में 10% की, दूसरे वर्ष के बन्त में 9% धौर तीसरे वर्ष के बन्त में 8% की बृद्धि मिली। तो माध्य प्रतिशत बृद्धि झात वीजिये।
- 8 बौनसा दशमक माध्यिका को निरुपित करता है और क्यो ? स्पष्ट कीजिये ।

$\overline{}$		\Box
	u	ш.

विसी समय या प्रतिदर्श में सम्मितित एकको पर विसी भी सक्षण के प्रति मार्थों में भिन्नता होना स्वाभाविक है। इन मार्थों में विश्वता को भाषने के लिए विभिन्न विसेषण मार्थों का प्रयोग करना होता है जिनका वर्षन इस प्रध्याय में किया गया है।

महसम्भव है नि विभिन्न समुख्ययों। ना माध्य या धन्य केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप तो बराबर हो किन्तु इनमें प्रेक्षणों का विचरण एक जैमा न हो जैसा कि निम्न तीन समुख्ययों पर विचार करने से स्पष्ट होता है —

समुब्बय 1 25, 25, 25, 25, 25, 25, 25

समुख्यय 2 23, 24, 25, 25, 25, 26, 27

समुख्य 3 2, 6, 9, 13, 30, 50, 65

उपर्युक्त तीनो समुण्ययो ना माध्य 25 है बिन्तु तीना के बटन एक दूमरे से पूर्णतया भिन्न हैं। इसके मितिरक्त पहले व दूसरे समुज्यय नी माध्यिता (Md=25) भी समान के हैं निन्तु ये समुज्यय हर्ष हुतरे से भिन्न हैं। इससे विदित होता है कि वेन्द्रीय प्रवृत्ति के साथा डार प्रेक्षणों ने बटन का पूर्ण ज्ञान नहीं होता है। घत विसी समुज्यय के प्रेक्षणों में एक दूसरे से भिन्नता के विषय में ज्ञानने के हेतु मुख विशेष गणितीय माप दिये गये हैं जिन्हें विशेषण माण वहते हैं।

परिसर

प्रेक्षणों के किसी भी समुच्चय में शशिकतम और न्यूनतम प्रेसित माप के मन्तर को परिसर कहते हैं। इसको प्राय न्यूनतम से शशिकतम माप तक के रूप में भी लिखा जाता है। यह सबसे सुगम विक्षेपण माप है। माता कि समुच्चय में शशिकतम प्रेसण मात L भीर न्यूनतम प्रेसण मात S है। तो

परिसर
$$= L - S$$
 (41)

परिसर का विशेष दोष यह है कि यह कैवस दो मानो पर ही बाधारित है भीर इससे यह नहीं जात होता है कि इन दो चरम मानो के बीच प्रेसणा की स्थित क्या है।

उदाहरण 4.1: उदयपुर जिले में एन मृदा सम्बन्धी सर्वेक्षण हिया गया घोर उसके हारा काली मिट्टी में विनिषय योग्य पोटासियम (Exchangeable potassium) की मात्रा निम्मानित पापी गयी —

विनिमय-योग्य पोटासियम 394, 209, 183, 154, 264, (मिलीग्राम प्रति 100 ग्राम मृदा) 379, 189

1. समुक्त्यों का वर्णन परिश्चिष्ट-न में किया बया है।

प्रेक्षणों का परिसर इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं — सूत्र (4.1) की सहायता से,

परिसर⇒(L - S)

मधिकतम साप, L = 39 4 ग्रीर न्यूनतम माप, S = 15 4

परिसर = 39 4 -- 15 4

= 240 मिलीब्राम प्रति 100 ग्राम मुदा।

भन्तश्चतुर्यंक परिसर

पुरं (तृतीय) चतुर्वन और समु (प्रथम) चतुर्वक के अन्तर को अन्तन्त्रन्तुर्पर परिसर कहते हैं। सन के रूप में

धानतश्चतुर्थेन परिसर
$$=(Q_3 - Q_1)$$
 ... (42)

यह कमित प्रेराणों ने समुच्यय में बीच ने 50 प्रतिचात प्रेराणों के वरित्तर को बताता है। इस मान ना यह दोप है नि 25 प्रतिचात निम्मतम और 25 प्रतिचात उच्चतम प्रेराणों ना सम्मान सम्मितन नहीं निया जाता है सान्ति इसने विषय में कुछ सम्मीहोता है। यदि उपर्युक्त परितार को दो से माग दें हो इसे चनुर्यंग विषयण (Quartile deviation) या प्रार्थ-सम्तरचनुर्यंग परितार (Scmi interquatile range) कहते हैं।

चतुर्पेव विचरण =
$$\frac{Q_3 - Q_1}{2}$$
 .. (43)

इस विशेषण माप मे पुल ने बाधे प्रेक्षण छूट जाते हैं। इसी नगरण इस माप नो नम प्रयोग में लाया जाता है। इसी प्रनार नवेब पहले दलमन के घन्नर ने प्राप्ते नो

मन्तदेशमक् विचरण करत है और इसे $\frac{D_9-D_1}{2}$ द्वारा जात कर सकते हैं।

प्रदाहरण 4.2 उदाहरण (4.1) में दिये ∗गम ना चतुथन विचरण इन प्रकार इति होगा।

प्रेक्षणो की सन्था n=7

ग्रत Q₁व Q₃व निशंत्रमण सन्याण्

$$\frac{n+1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$
 $\frac{1}{4} = \frac{3 \times 8}{4} = 6 \times 8$

प्रेक्षणा को भारोही नम म स्थने पर

154, 183, 189, 209, 264, 379, 394 ঘৰ Q,=183 খীৰ Q₃=379

379-183

चतुर्पं र विनरण = $\frac{37.9 - 18.3}{2}$

= 98 मिनियार प्रति 100 याम मृदा ।

माध्य विचलन

विसी समुख्यम के भवों के माध्य, माध्यका या बहुतक से विवसत² के निर्ऐक्ष मात³ के माध्य को माध्य विवसत् (मा॰ वि॰) कहते हैं।

माना कि प्रतिदर्श प्रेक्षण X1, X2, X3,, X, हैं बीर A एक भवर मान है, तो

A से मा॰ वि॰ (M.D) =
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |(X_i - A)|$$
(44)

जबिक ${\bf A}$ के स्थान दर माध्य \overline{X} , माध्यवरा M_d या बहुतक M_0 का प्रयोग कर सकते हैं। यह ध्यान रहें वि यदि ${\bf A} = \overline{X}$ है और निरपेक्ष मान का प्रयोग नही किया है तो माध्य विकास दूरव हो जावेगा क्यों कि Σ $(X, -\overline{X})$ सर्दव शून्य के समान होता है।

ा परिभाषा के अनुसार माध्य विचलन के लिए निरंपेक्ष मान का प्रयोग करना धावस्यक है।

यदि प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, ..., X_k$ अपनी तदनुसार बारम्बारता I_1, I_2, I_3 ..., I_k सहित दिये गये हो तो,

मा॰ वि॰ =
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{K} (f_i | X_i - A_i)$$
(4.5)

इस माप में यह गुण तो भवश्य है कि यह सब प्रैक्षित मानो डारा परिक्लित किया जाता है, किन्तु इससे यह दोष भी है कि बिना समुचित कारण बताये इसके लिए निरपेक्ष मान का प्रयोग करते हैं।

िष्पणी: यदि मूत्र (4 4) या (4.5) में झवर A के स्थान पर बटन की माध्यिका को लिया जाए प्रयाँत माध्यिका से विचलन सिए जाएँ तो माध्य-विचलन न्यूनतम होता है।

उदाहरण 4.3 . उदाहरण 3.1 में दिये हुए प्रेक्षणों के लिए माध्यिका से विचलन सेकर, माध्य विचलन निम्न प्रकार परिकलित कर मकते हैं :--

सर ८, माध्य (वयलन । नम्न प्रकार पारकालत कर नक्त ह:~ माध्यिका ⇒ 209 अर्थात मृत्र (35) मे A ⇒ 209

द्यत

M.D =
$$\frac{1}{7}$$
 (| 15.4 - 20.9 | + | 18.3 - 20.9 | + | 18.9 - 20.9 |
+ | 20.9 - 20.9 | + | 26.4 - 20.9 | + | 37.9 - 20.9 |
+ | 39.4 - 20.9 |)

- 2. दिस्तन किसी प्रेशित मान X के किसी कवर C से बन्तर [X-C] की X का C से विश्वसम कहते हैं।
- निरदेश मान (Absolute value): यदि किसी बन्तर को धनारक ही सिया बाद दो बन्तर के मान को निरदेश मान कहने हैं। बैसे, (10 ~ 15) व (15 ~ 10) दोनों का निरदेश मान 5 है।

$$= \frac{1}{7} (55+2.6+2.0+0+55+170+185)$$

$$= \frac{1}{4}(511)$$

7 30 मिलीयाम प्रति 100 बाम मुदा

चराहरण 4 4 मूटा म स्थिर पोटासियम की मात्रा जानने के हेतु विभिन्न स्थानों से प्रतिदर्श एकत्रित विये गये और उनके रासायनिक विक्लियण द्वारा प्राप्त पोटासियम की मात्रा और स्थानों की सक्या स्थापकार पायो गयी —

पोटासियम भी मात्रा

(गिलीचान प्रति 100 वान मृदा) 21 7, 20 8, 29 2, 30 9, 33 6, **11 5, 45** 7 स्पानो नी सस्या 2, 3, 4, 5, 1, **4, 1**

पोटात की मात्रा के लिए दिलाया क्या है कि माध्यका से माध्य विचलन, माध्य हे माध्य विचलन की प्रवेशा क्य है।

प्रेक्षणो की क्रम में व्यवस्थित करके रख दिया ।

पोटासिक्स की काला ४	स्थानों की सकदा र्ड	सं∘ वारं∘	संख्या रिप्र
20 8	3	3	62 4
21 7	2	5	43 4
29 2	4	9	1168
30 9	5	14	154 5
33 6	1	15	33 6
38 5	4	19	1540
457	1	20	457
	20		610 4

माध्यिका के तिए=
$$\frac{n+1}{2}$$
= $\frac{20+1}{2}$ =10 5

माध्यिगा = 309

मोर माध्य
$$=\frac{6104}{20}$$
 =30 52

माध्यका को \Lambda के रूप में प्रयोग करते पर,

माध्य को A के स्थान पर प्रयोग करने पर,

पांच्य विचलन =
$$\frac{1}{30}$$
 (| 20 8 - 30 52 | \times 3 + | 21 7 - 30 52 | \times 2 + ...
+ | 45 7 - 30 52 | \times 1)

$$=\frac{3}{20}(10416)=521$$

5 21 > 5 17 बत माध्यिका में माध्य की अपेक्षा, माध्य विचलन कम है।

प्रसर्ग

परिभाषा प्रेसणों के समुख्य में माध्य ने विचलनों के वर्गों के योग के माध्य की प्रसरण कहते हैं।

माना कि समग्र मे N प्रेक्षण X_1 , X_2 X_3 X_N हैं तो समग्र प्रसरण को σ^2 से सचित करते हैं जहाँ

$$\sigma^{2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (X_{i} - n)^{2} ... (4 6)$$

$$= \frac{1}{N} \left\{ \begin{array}{c} N & N \\ \sum X_i^2 - n \sum \lambda_i \end{array} \right\} \qquad(461)$$

जबिक सूत्र (46) मे मसमग्र माध्य है।

मानक विचलन

प्रसरण के घनात्मक वर्ग-मूल को भानक विचलन कहने हैं।

(मानक विचलन)
$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

प्रतिदर्श प्रसरण : माना एक प्रतिदर्श के एकको पर प्रेसण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ हैं तो प्रतिदर्श प्रसरण s^2 को निम्न सुत्र द्वारा परिकतित करते हैं —

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \overline{X})^{2} \dots (47)$$

$$= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2 \right\} \dots (471)$$

प्रतिदर्भं की स्थिति में मानक विचलन s=+√s²

विचरण-गुणांक

भव तर जिनने भी माप दिये गये हैं उन सब नी इनाई है। जिन्तु कभी-कभी एक मैं भिष्ठक ममग्रों ने बिसेपण मापों नी बापस में नुतना करनी होती है। इन मापों नी तुतना नरना तभी मम्भव है जबकि विसेपस-मापों नी इकाइबी एरू सी हो जिन्तु व्यवहार में ऐमा बहुत नम प्रव्यवना में पाया जाता है। ऐसी स्थिति में विचरण गुणान भरवन्त उपयोगी है क्यों के उसनी मेहिदसार्टन ही होती है। सिनी स्मृब्दर संचर के सात्र विचलन क्षोर समान्तर माध्य के ब्रनुचात को विचयण गुणाव कहते हैं। साधारणतया इस ब्रनुचात को 100 से सूर्णावरके प्रतिचात से दिया जानता है। ध्रतः,

बा
$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \times 100$$
 प्रतिशत ...(48)

प्रतिदर्भ के लिए विचरण-गुणाक निम्न सुत्र से ज्ञान कर सकते हैं ---

c v =
$$\frac{s}{\overline{X}} \times 100$$
 সনিখন(4.9)

विचरण-गुणाव तब ही लाभप्रद होगा जब माध्य घनारमव हो।

उदाहरण 45 सात भारती (Larva) के बार (मिनियाय में) दिये हुए हैं। माना नि यह एक समग्र के एकको पर भेडान हैं।

भार (मिलीब्राम) 🖅 332, 337, 341, 330, 346, 328, 340

समग्र ने (1) प्रमारण, (1) मानव विचलन और (111) विचरण गुणाक का परिकास निम्न प्रचार किया जा सकता है —

माना नि भार चर X दारा निरूपित है और यहाँ N=7 है।

माध्य एक पूर्ण सब्या मही है अन (381) का प्रयोग करना उक्ति है। प्रसरण,

 $\mathbf{r}^2 = \frac{1}{7} \left\{ 791874 - \frac{(2354)^2}{7} \right\}$ $= \frac{1}{2} \times 2576$

= 36.8

मानक विचलत,

 $r = \sqrt{368}$ = 6 07

विचरण गुणांक,

$$C V. = \frac{607}{3362857} \times 100$$
= 1.805 प्रतिसर

उदाहरण 4.6: लारवी के एक समूह की सम्बाई नापी गयी। इस प्रकार प्राप्त लाजार (मे॰ मी॰) घीर सारवी की संख्याएँ निस्त थीं '---

सारवी की तन्वाई (से॰ भी॰)	नारवी की संक्या
6.1	2
6.0	4
5.8	4
6-2	1
5.9	3

लारबी की सम्बाई के लिए प्रसरण व विचरण गुणाक का परिकलन निम्न प्रकार कर सकते हैं।

माना कि उपर्युक्त न्यास में लारवी की लम्बाई वर X और लारवी की संख्या बारम्बारता िद्वारा निरूपित है। प्रसरण के परिवक्षन के लिए सूत्र (471) का प्रयोग करना होगा। पहले निम्न सारणी तैयार करनी होती है :---

x	f	fX	fX²	
61	2	12 2	74:42	
60	4	24 0	144 00	
5 8	4	23 2	134.56	
6 2	1	6-2	38 44	
5 9	3	17.7	104 43	
	Σf₁=14	Σf _i X ₁ =83 3	Σf ₁ X ₂ *=495 85	

प्रसारण :

$$e^{2} = \frac{1}{14} \left\{ 495 85 - \frac{(83 3)^{2}}{14} \right\}$$
$$= \frac{1}{14} \left\{ 495 85 - 495 63 \right\}$$
$$= \frac{-22}{14} = 0157$$

भानक विद्यसन :

विवरण गुगकि

यहाँ
$$u = \frac{833}{14}$$

 $= 595$
 $\therefore CV = \frac{125}{595} \times 100$
 $= 21$ प्रतिवाद

उदाहरण 49: एक सांदाणित प्राययन (Clinical study) के प्रत्यर्गत सात वर्ष की भागु के कचो के भारों के वर्ष और सहया निम्न सारणी के प्रमुगार वे ---

वार [किश्रोताम]	वण्यों की सक्या	
12-14	6	
14-16	14	
16-18	28	
18-20	16	
20-22	8	
22-24	3	
24-26	1	
26-28	0	
28-30	1	

इन वर्गीहृत सेवाणी ने लिए बचनो ने मार ना (1) समरण, (11) मानक विचलन, (111) विचरण मुनाक जात नरते ने लिए दिये हुए बची ने मध्य मानो नो चर X और बच्चों की सस्या को वारम्यारता है के इच मे लेनर निम्न मारणी तैयार नी गयी —

x	f	fX	fXª	
13	6	78	1014	
15	14	210	3150	
17	28	476	8092	
19	16	304	5776	
21	8	168	3528	
23	3	69	1587	
25	1	25	625	
27	0	00	00	
29	1	29	841	
योग	77	1359	24613	

(1) सूत्र (4.7.1) के अनुसार प्रमरण,

$$\sigma^2 = \frac{1}{77} \left\{ 24613 - \frac{(1359)^2}{77} \right\}$$
$$= \frac{1}{17} \left\{ 24613 - 2398546 \right\}$$
$$= \frac{62754}{77}$$

=8.14

(n) मानक विचलन :

$$\sigma = \sqrt{8.14}$$

$$= 2.85$$

$$= 2.8$$

(u:) विचरण गुणांक :!

$$\therefore \text{ C.V.} = \frac{2.85}{17.65} \times 100$$

=16 14 प्रतिशत

माघुणं

यदि प्रेक्षित मानो X_1, X_2, X_3 , X_m की दारम्बारताएँ कमस: $f_1, f_2, f_3,$ निम्न भूत्र से दी जाती है :---

$$\mu^{t}_{k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{m} f_{i}(X_{i} - A)^{k}$$
(4 10)

m जब कि द्र f₁=N

यदि A के स्थान पर समन्न माध्य ह का प्रयोग किया आए तो माध्य के परित प्राधूण कहलाने हैं और उन्हें Pk द्वारा निरूपित करते हैं।

$$\mu_{k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{m} f_{i} (X_{i} - \mu)^{k} \qquad(4.11)$$

जब k=1 हो तो ≠₁=0 जब k⇔2 हो तो.

$$\mu_2 = \frac{1}{N} \sum_i f_j(X_i - \mu)^2$$
(4 12)

धत माध्य के परित दूसरा बाधूर्ण प्रसरण ही है।

समान्तर माध्य 's' के परित बावूगों और स्वेष्ठ माध्य 'A' के परित बापूगों से सम्बन्ध 🛹

$$u_k = \frac{1}{N} \sum_i f_i (X_i - \mu)^k$$

$$= \frac{1}{N} \sum_i f_i \{(X_i - A) = (\mu - A)\}^k$$

$$\begin{array}{c} & & & & \\ & & & \\$$

(4 10) की सहायता से,

$$\begin{split} & \mu_{K} = \mu_{K}^{\prime} - \binom{K}{1} \mu_{K}^{\prime} \gamma_{k}^{\prime} d + \binom{K}{2} \mu_{K}^{\prime} \gamma_{k}^{\prime} d^{2} + + (-1)^{\ell} \binom{K}{\ell} \\ & \mu_{K} d^{\prime} + + (-1)^{k} d^{k} \\ & \dots (4 \ 13 \ 1) \end{split}$$

$$& \forall \forall K \in \mu_{J}^{\prime} = \frac{1}{N} \sum_{i} f_{i}(X_{i} - A) = \frac{1}{N} \sum_{i} f_{i}X_{i} - \frac{1}{N} \sum_{i} f_{i}A \\ & = \mu - A := d \qquad (: \int_{i}^{\infty} f_{i} = N) \end{split}$$

$$\therefore \mu_{k} = \mu_{k}^{*} - {k \choose 1} \mu_{k-1}^{*} \mu_{k-1}^{*} \mu_{k-1}^{*} {k \choose 2} \mu_{k-2}^{*} {\mu_{k-2}^{*}} {\mu_{k-2}^{*}} {\mu_{k-1}^{*}} {\mu_{k-1}^{*}$$

सूत्र (4 11) में जब 1 = 0 हो ती,

$$\mu_0 = \frac{1}{N} \sum_i f_i (X_i - \mu)^0$$

$$= \frac{1}{N} \sum_i f_i$$

=1

सूत्र (4132) से 1. वे मान J 2,3.......,रखने पर विभिन्न जमो के साहूर्यं प्राप्त हो जाने हैं।

$$\begin{aligned} s_1 &= s_1' - (\frac{1}{4}) \ s_0' \ s_1' \\ &= s_1' - s_1' \\ &= 0 \\ s_2 &= s_2' - (\frac{3}{4}) \ s_1' \ s_1' + (\frac{3}{4}) \ s_0' \ (s_1')^2 \\ &= s_2' - s_1'^2 \\ s_3 &= s_3' - 3 s_2' \ s_1' + 2 s_1'^3 \\ s_4 &= s_4' - 4 s_3'' \ s_1' + 6 s_2'' \ s_1'^2 - 3 s_1'^4 \ \text{with} \end{aligned}$$

शेपडं-संशोधन

इसी प्रकार

मौर

वर्गीहृत बारम्बारता बटन द्वारा घाषूची ना परिवसन करने से हुछ कृटि घा जाती है। इसना कारण यह है कि इनके परिन्तन से यह कल्दना की गयी है कि बारस्वारता वर्षे झन्तरालों के सक्य-बिट्यो पर केन्द्रित है। किन्तु यह कल्दना पूर्णतना स्टब नहीं है। झनः संपर्ध (1897-1907) ने बिलिश कमी के घाषूचों के सिए बलग-धनग मुद्धिनी बताई पी इनमें से कुछ निम्म प्रकार हैं—

माध्य के परित दूनरे बापूर्ण को P_{2} हारा निकस्ति करते हैं को कि प्रसरण है। मैसरे ने निद्ध किया कि गुढ़ प्रसरण जान करने के लिए खुढ़ि P_{1} का प्रयोग करना होना है जबकि P_{2} का प्रयोग करना होना है जबकि P_{3} का प्रशासन के समान होना है। इस खुढ़ि को परिक्रित प्रमरण में से पटा देन पर युद्ध प्रमरण मात हो जाता है।

सुद प्रसरण
$$\mu_{g}^{h} = \mu_{g} - \frac{1^{2}}{12}$$
(4.14)

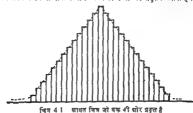
इसी प्रकार चीव साधूण का गुद्ध मान,

$$\mu_4^2 = \mu_4 - \frac{1}{3}\mu_2 \times I^2 + \frac{\tau}{340} \times I^8 \qquad(4.15)$$

मादि ।

बारम्बारता-बटन बक

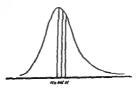
किसी चर का बारम्बास्ता बटन दिया गया है और याँद इस चर के मान या वर्ष धन्तराल एक दूसरे से निजट हैं तो दण्ड चित्र या बारम्बारता आयत चित्र म दण्डा ने मिन्नर बिन्दुधों नो या आयतों ने जिलार के मध्य बिन्दुधा को बिना देने पर बारम्बारता बहुमुत्र एक सतत बक्त का रूप धारण कर सेता है। इस वक्त को बारम्बारता-बटन-बक्त कही है। मत एक बारम्बारता क्रम अक्ष के किसी मान बिन्दु पर की नीटि इस प्रक्ष थान (प्रमान) नो बारम्बारता प्रविद्यत करती है। किन्हीं से अल मानो पर कोटि के बीक वा निज मस्य म प्रादा साना के बीव जनना की मध्या का प्रमुखन बनाना है।



इस बक्त के रूप, गुण परिमर झादि के भनुमार ही चर के बटन का निक्चय दिया जाता है।

वियम बटन वक

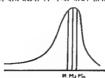
याँन बारप्तारना बटन वक के मिरे समाधन न हा तो ऐसे वक को विषय बटन कक करते हैं। इसका प्रमित्राय है कि वक का भूकाल किसी एक धीर प्रधिक धीर दूसरी धीर कस हो मकता है। इस बान को पाठक इस प्रकार भी समफ बनते हैं कि वक का एक निशा धीयक लावा धीर दूसरा मिरा छोटा हो सकता है।



नित्र 4.2 धनात्मक विषय विक

यदि बटन का माध्य, बटनक में वडा हो अर्थात् कम में सम्बासिया दाहिनी म्रीर हो तो ऐसी विषयता नो घनात्मन विषयता कहते हैं। ऐसी स्थिति तब उत्पन्न होती है जब बारम्बारता बटन में प्रेशणों के लघु मानो नी सम्बा अधिक हो तथा बढे मानो की सम्बा कम हो।

उपर्युक्त स्थिति के विषयीत प्रयाद् वक का वाम मिरा प्रधिक सम्बा प्रीर दाहिना सिरा छोटा होने पर वक को ऋषादमक विषम कहते हैं। ऐसी स्थिति तब उत्पन्न होती है जब माध्य से बहलक बड़ा होता है। जब प्रेक्षणों के समुच्चय में सधु मान वाले प्रेक्षणों की सख्या कम प्रीर बहत् मान वाले प्रेक्षणों की मन्या पिधक होती है।



चित्र 4 3 ऋषास्मर-वियम वक्र

एक प्राप्नुभविक नियम है कि माध्यिका माध्य और बहुलक के बीच में स्थित होती है भीर माध्य, माध्यिका सथा बहुलक के बीच निम्म सम्बन्ध दिया जा सकता है —

माध्य - बहुल र) = 3 (माध्य - माध्यिका)

141

वक में विषमता धनारमक है या ऋषात्मक, यह वक को चित्रित करके जाना जा सकता है। किन्तु विषमता के आकार को जानने के लिए सक्ष्यात्मक मान भी जात किये जा सकते हैं। वार्स पियसँन (Karl Pearson) ने वैषम्य-गुणाक (Coefficient of skewness) ज्ञात करने के लिए निम्नाक्ति सुत्र बताया है:—

इस मूत्र के लिए माध्य, बहुलक व मानक विचलन का परिकलन करना होता है। जब माध्य > बहुलक तो घनास्मक विषमता और माध्य < बहुलक तो ऋणास्मक विषमता होती है।

यदि मानक विचनन जात करने में किसी प्रकार की कटिनाई हो तो वैषम्य गुणांक को चतुर्पकों की सहायता से निम्न सूत्र द्वारा जात कर सकते हैं। वैषम्य-गुणांक के लिए यह सूत्र प्रो॰ बाजले (Prof Bowley) ने दिया है :—

वैषम्य-मुजान =
$$\frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_2 - Q_1}$$
 ... (4 18)

जबिन मुत्र (4 18) मे Q_1 , Q_2 , Q_3 तमज्ञ. पहला, दूसरा ग्रीर तीमरा चतुर्वन है। वैयम्य-गुणान को म्राभूषों की सहायता से निम्न मूत्र द्वारा ज्ञात कर मकते हैं --

(बैयम्य-गुणाक)
$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu^3 2}$$
 ... (4 19)

जर वे मुत्रों से स्पट है नि वैषम्य-मुवान एव बुद्ध सक्या है धर्यात् इसकी कोई इकाई नहीं होनी है नशीर सूत्र प सबी ध्यनना म ध्यन व हर की इनाई एक ही है। वैषयय-गुवाब का मान जितना प्रशिव होता है उननी ही (+ve) या (-ve) विषयता प्रशिव होती है। यदि वक समिति हाता वैषयय-गुवाब बूच्य होना है चौर इस स्विति मे निम्न सम्बन्ध सत्य होते हैं —

माध्य ∞माध्यिका = बहुतक

$$(Q_3 - Q_2) = (Q_2 - Q_1)$$

मीर _{मित}=0

कहुटता (Kurtosis) — उनुस्ता से ए। यहुला बारण्यारता वक की शिखरता (peakedness) के प्रधिव बा वम होने के विश्वय महाग मान्त होता है। कहुदता की बाले-विषयंत्र ने तन् 1906 में निवासा और इसके विष् निरूप मार्ग दिया

(बहुदता-मुणाक)
$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$
 (4 20)

जहीं μ_{A} व μ_{B} समा माध्य प परित चीचे व हुनरे आधूर्य हैं। धीधर निवारित बक को सूनवहुदी (leptoLurtic) वक कम मिरारित दक्ष वे गेपाटवहुदी (platykurtic) वक धीर सामान्य जिल्लास्त वक्ष वो मध्यरबुदी (mesokurtic) वय वस्त है। इन क्षीप प्रकार के वको के निष् B_{B} वे मान प्रया इस प्रदार हैं —

$$\beta_2 > 3$$
, $\beta_2 < 3$ with $\beta_2 = 3$

यह सदेहपूर्ण है कि कोई एक अनुपात शिखरता का उपयुक्त माप हा ।

जबाहरण 4.8 एवं डेरी कार्म पर 13 गायों के दूध का प्रति-दिन उत्पादक निम्नावित पाया गया —

दूध का उत्पादन 13 7, 11 2 15 4 14 8, 17 2, 19 3

(बिटर प्रति-दिन) 17 7, 16 4, 18 6, 10 6, 10 8, 11 8, 12 5

इस द्रुध उत्पादन सम्बन्धी न्यास नः, वैयम्य गुणान जात नरने ने तिए हम इन प्रेक्षणी द्वारा माध्य के परित दूसर व तीसरे घापूर्ण जात नरने हैं।

माना कि दूध का उत्पादन बर X द्वारा निरूपित है।

=1950

क्योंकि माध्य एवं यसार्य एवं पूर्णीक है माध्य ने विचलन नेकर साहुशी हु व हु का परिकलन साम है। इन पांचुणी को शांत करने ने लिए निम्न लारणी बनाना सामप्रद है —

Х	(X - F)	(X - =)2	(\ - \mu)3
137	-13	1 69	- 2 1970
142	- O 8	0 64	- 0 5120
154	0.4	0 16	0 0640
148	-02	0 04	- 0 0080
172	22	4 84	10 6480
19 3	43	18 49	79 5070
177	27	7 29	19 6830
184	3 4	11 56	39 3040
186	3 6	12 96	46 6560
106	- 4 4	19 36	- 85 1840
108	-42	17 64	- 74 0880
118	- 3 2	10 24	- 32 7680
12.5	-25	6 25	- 15 6250
195 00	00	111 16	14 44

सुत्र [411] की सहायता से,

$$s_3 = \frac{1}{13} \times 111 \ 16$$
= 8.55
 $s_3 = \frac{1}{13} [-14.44]$

e= - 1 11

मत सूत्र [4 18] हारा,

[इंबय-गुप्तक]
$$\beta_1 = -\frac{1 \cdot 11}{[8.55]^3/_2}$$

$$= -\frac{1 \cdot 11}{25}$$

$$= - \cdot 044$$

येपस्य गुणांव का मान प्रतिसमु है धतः बारबारता वन समध्य समध्य समित है। उदाहरण 49 किसी घर के बारबारता बटन के लिए निस्न भतुमंत्र जात हैं —

वैयम्य युवांन, सूत्र [4 18] भी सहायता से निम्न प्रवार ज्ञात गर सवते हैं -

वेषस्य गुणांकः =
$$\frac{56+218-2\times40}{56-218}$$

$$= -\frac{22}{342} = -.064$$

वैपम्प-गुणांक पर बान चितनपु है, चत बटन वक संपर्भव समसित है । स्थास का संकेतीकरण

नियम ! यदि क्ति। ज्यात के प्रत्येत प्रेशण में से एक ध्यार मान प्रदार्थे तो जो ध्रक प्राप्त होते हैं उनके द्वारा परिकलित प्रसरण वहीं होता है जो कि चूल प्रेशणी द्वारा परिकलित प्रसरण होता है।

उपर्युक्त नियम से स्पष्ट यता चलता है कि भें शर्भा में से सकर घटाने का मसरण पर नोई प्रभाव नहीं पडता है। इस नियम को इस प्रकार सिंड कर सकते हैं.

प्रमाण माना वि चर X यर प्रेक्षणों से स एक सचर C घटावा गया है। इन सावितिक भेटाची द्वारा प्रसरण निम्त प्रवार होगा ---

	नूग ग्रेमन X	संदेशक दे वा। X–C∝X′	
	X ₁	X ₁ -C=X ₁ '	_
	X ₂	$X_3 \sim C = X_3'$ $X_5 \sim C = X_3'$	
	X ₂	$X_3 \sim C = X_3'$	
	1	# #	
	X,	X ₁ -C=X ₁ '	
	ı	: !	
	XH	X _N -C=X' _N	
योग माभ्य	XX,	$\Sigma_i(X_i - C) = \Sigma X_i'$ $\kappa - C = \kappa'$	

मल प्रेशनों का प्रसदन,

$$\sigma_{z^{2}} \leftarrow \frac{1}{N} \stackrel{\cong}{}_{i} (X_{i}^{-p})^{2}$$
was $i = 1, 2, 3, ..., N$

मानेतिक प्रेक्षणो द्वारा प्रसरण ज्ञात करने मे Xi के लिए (Xi-C) धौर " के लिए

माध्य (
$$\mu$$
-C) का सूत्र $\sigma_{\chi p^2} = \frac{1}{N} \sum_i (X_i^p - \mu^p)^2$ में प्रयोग करना होगा।

$$\sigma_{x}^{2} = \frac{1}{N} \sum_{i}^{\infty} \left\{ (X_{i} - C) - (u - C) \right\}^{2}$$

$$:= \frac{1}{N} \sum_{i}^{\Sigma} (X_i - \mu)^2$$

$$=\sigma_x^2 \tag{4.21}$$

सम्बन्ध [4·21] से स्पष्ट है कि धावर घटाने वा प्रसरण पर कोई प्रभाव नहीं पडता है।

जो नियम शबर घटाने ने लिए दिया गया है वही नियम प्रत्येन प्रेक्षण मे अचर जोडने पर भी सत्य रहता है।

नियम 2 यदि ग्यास के प्रत्येक ग्रेक्षण को किशी अघर मान से गुणा कर दें तो सोकेनिक नेक्षणो द्वारा परिकलित प्रसरण, मूल ग्रेक्षणो द्वारा परिकलिन प्रमरण भौर अघर के वर्ग के गुणनप्रस्र के समान होता है।

इस नियम को निम्न प्रकार सिद्ध कर सकते है -

प्रमाण माना कि चर X पर प्रेक्षणों को खबर मान ३ से गुणा कर दिया है। इन सावेतित प्रेक्षणों द्वारा प्रसरण का परिकलन किया गया है।

	मूल प्रेशन	सारे विक प्रेक्षन	
	(X)	aX = X'	
	X ₁	aX ₁ =X ₁ *	
	X_2	$aX_1 = X_1^3$ $aX_2 = X_2'$ $aX_3 = X_3^3$	
	X ₃	$aX_3 = X_3$	
	:	1 1	
	X,	$aX_i = X_i'$	
	ŧ	1 1	
	\mathbf{x}_{κ}	$aX_N = X'_N$	
योग	ΣX,	aΣX _i =ΣX _i '	
	1	1 3	
माध्य	μ	*u == u s	

मून प्रेक्षको द्वारा प्रसरण.

$$\sigma_{x}^{2} = \frac{1}{N} \sum_{i} (X_{i}^{-\mu})^{2}$$

मारेनिक प्रेक्षणो द्वारा प्रमरण परिवानित करने मे सब

$$\sigma_{\chi^{\prime}} \, ^{2} \simeq \frac{1}{N} \, \mathop{\Sigma}_{1} \, (X_{j}^{\prime} \text{-} \mu^{\prime})^{2}$$

म X_1' के स्थान पर aX और p' के स्थान पर aB रखने पर प्रमरण तिम्न होता है —

$$e_{\chi'}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i} (aX_i - aix)^2$$

$$= a^2 \frac{1}{N} \sum_{i} (X_i - x)^2$$

$$= a^2 e_x^2 \qquad (4.22)$$

सम्बन्ध [4 22] नियम 2 को सिद्ध करता है।

मंदि प्रचर मान ६ से प्रेक्षणा को भाग दिया गया हो तो साकैतिन प्रेक्षणो भीर मूल प्रेक्षणो द्वारा परिकलित प्रमरण में निम्नाकित सम्बन्ध होता है।

$$\sigma_{x^{2}} = \frac{1}{a^{2}} \sigma_{x^{2}}$$
 [4 23]

सक्तीकरण करने मे परिकान करने में मुविधा हो जाती है। सांकेतिक ग्यास द्वारा प्रसरण निकासने के प्रकाद सम्बन्ध $\{4.20\}$ या $\{4.21\}$ कर प्रावस्थनरातुमार प्रयोग करने मूल प्रेशणों पर प्राथानिक प्रकरण मुजनना से ज्ञान किया जा सकता है। यदि प्रावस्थनरा है। यदि प्रावस्थनरा है। यो दोनों मजेवीकरणों को एक साथ भी प्रयोग कर सनते हैं।

प्रकाहरण 4 10 एक प्रयोग में 11 सप्ताहों के प्राज्यां-कोलेस्टेरॉंग की निम्न मात्राएँ पामी गंधी।

प्लाजमा बोलेस्टेशॉल

[मिसीप्राम प्रति 100 मि निटर] 220, 250, 275, 205, 200, 230, 250, 260, 255, 260, 250

इन प्रेक्षणो हारा प्रसरण जान वरने के निए सर्वेतीकरण बरना साप्रदायन है। माना कि सबर मान 200 है और इसको अरवेक प्रेराण में से घटा दिया गया है। यब प्रमरण का परिकलन निम्म प्रवार कर सबते हैं —

सकितिक प्रेशम (X*)		
(प्साच्या कोलेक्टरॉन)	X'2	
20	400	
50	2500	
75	5625	
5	25	
0	00	
30	900	
50	2500	
60	3600	
55	3025	
60	3600	
50	2500	
455	24675	_

(1)
$$\mu' = \frac{455}{11} = 4136$$

p=p'+200=41 36+200

=241 36 मिलीयाम प्रति 100 मिलीलिटर

(11)
$$\sigma_{x}^{-2} = \frac{1}{11}$$
 (24675 00-18820 45)

$$=\frac{1}{11}$$
 (5854 55)

=532 23 (मिलीयाम प्रति 100 मिली लिटर)²

भीट : यदि भूत प्रेसणी द्वारा प्रतिदर्श प्रसरण का परिकास करें तो उसका मान भी 532 23 ही होगा । पाठक चाहें तो इसकी पूष्टि स्वय कर सकते हैं ।

उबाहरण 4 11 : राजस्थान के कुछ खेतों में गेहूँ के पौधों की सख्या प्रति हैक्टर देखी गयी जो कि निम्न प्रकार थी —

800 000, 76,0000, 120,0000, 95,0000 210,0000, 180,0000, 110,0000, 65,0000

इन प्रेक्षणा द्वारा माध्य पौधो नी सस्या तथा पौधो नी सस्या के लिए प्रसरण ज्ञात करना हो तो यहाँ 105 मर्याच् 10,0000 द्वारा भाग करना मत्यधिक लाभप्रद है। मन्यया इन मन्याघो को वर्ग करके लिखना और इसके द्वारा परिकल्न करना कठिन हो जायेगा। यहाँ भ्रनर a=105 मे प्रत्येत सन्या तो भाग दे दिया गया और पिर प्रमरण मात किया संस्क ३ ।

राचा गुना है।			
संदेशिक पौर्यो की संदर्भ X'	X'2		
8 0	64 00		
7 6	57 76		
12 0	144 00		
9 5	90 25		
21 0	441 00		
18 D	324 00		
11 0	121 00		
6.5	42 25		
93 6	1284 26		

यहाँ 2=8

$$\therefore \overline{X}' = \frac{966}{8} = 116$$

$$e_x^2 = \frac{1}{8} \left\{ 1284 \, 26 - \frac{(936)^2}{8} \right\}$$

$$= \frac{1}{8} \left\{ 1284 \, 26 - 1095 \, 12 \right\}$$

$$= \frac{1}{9} \times 189 \, 14$$

$$f_{x}^{2} = a^{2} \sigma_{x}^{2}$$

$$\sigma_{\rm x}^{2} = (10^{5})^{8} \times 2352$$

$$= 2352 \times 10^{8}$$

जबाहरण 4 12 : विभिन्न चन्यों ने लिए चनुकूततम नमी, बेत में पिट्टी की सगमग ममान गहराई पर मापी गयी धौर इस प्रकार निम्नावित प्रेसम प्राप्त हुए !

शस्य	बनुदूसतम नमी	
मदना	0 55	
गेहूँ	1 50	
गन्ना	0 70	
म्रालू	0 30	
तम्बाकू	0 30	
मूली	0 20	
হালসম	0 20	
चुकन्दर	0 20	
पान	0 65	
बरसीम	0 35	

इन प्रेसणो द्वारा भनुकूलतम नमी वे निष् यदि विवरण गुणाव जात करना हो तो हमे मानक विवसन एक माध्य जात करने होंगे । इस न्यास का सकेनीकरण करना लानप्रक्ष होंगा सत हन प्रेसणों नो 100 से गुणा कर दिया और किर प्रस्थेन प्रेसण में में 20 पदा दिये। यदि भनुकूलतम नमी को चर X द्वारा निरुप्ति कर दें तो सावेतिक चर X' = (100X-20) होंगा। भ्रव

x'	X'2	
35	1225	
130	16900	
50	2500	
_ 10	100	
10	100	
00	00	
00	00	
00	00	
45	2025	
15	225	
295	23075	

∴
$$\overline{X}' = \frac{295}{10} = 295$$

∴ $\overline{X} = (\overline{X}' + 20)/100$
 $= \frac{295 + 20}{100} = 495$
FIRST $\sigma_{X'} \stackrel{?}{=} \frac{1}{10} \left\{ 23075 - \frac{(295)^2}{10} \right\}$
 $= \frac{1}{10} \left\{ 23075 - 87025 \right\}$
 $= \frac{1}{10} \left\{ 143725 \right\}$
 $= 143725$
∴ $\sigma_{Z} \stackrel{?}{=} \frac{1}{(100)^2} \sigma_{X'}^{2}$
 $= \frac{1}{100,00} \times 1437 \cdot 25$
 $= 0.1437$
∴ $S D (X) = 0.38$
First $\sigma_{Z'}$ $\sigma_{Z'}$

C V.=
$$\frac{0.38}{0.495}$$
×100 प्रतिवाद

इम उदाहरण में सबैतीवरण, दशमसब को प्रेशकों से हटाने धौर पूर्णौंकों को सेवार परिवासन बारने की हरिष्ट में बाच्छा है। यहाँ केवल एक प्रवाद मान को पटाने व प्राप्त भ्रमर मान ने गुणा सरने का सकेनीकरण एक साथ किया गया है। उदाहरण पाटकों को गवेतीवरण वा प्रयोग करने की विधि समझाने के हैन ही दिये गये हैं।

पुणीयन

जब बभी प्रेरिक्त या परिवासित सन्या पुर्णांव नहीं हो और उसे बुद्ध दशसमय शब ही देना चाहें तो इस सब्या में दलमत्तव की इच्छित अन्तिम सब्या का उसके बाद में चाने

वाली सस्या के प्रमुक्तार, सम्निवटन करना होता है। इस सम्निवटन करने को पूर्णीकन कहते हैं। इसके लिए नियम इस प्रकार है।

यदि दशमत्तव को प्रनित्तम सस्या के बाद की सस्या 5 से घायिक हो तो मन्तिम सस्या को 1 से बढ़ा देते हैं भीर बाद की सस्या 5 से कम होने की स्थिति में मन्तिम सस्या में कोई परिवर्तन नहीं करने हैं। किन्तु जब दशमत्तव की इद्दिल प्रतिम सस्या के बाद की सस्या 5 हो तो समिकटन इस धन्तिम दशमत्तव सख्या पर निर्मर करना है। यदि यह सम है तो सस्या इतमें कोई परिवर्तन नहीं करते पौन यदि यह सस्या विपम है तो इसे 1 बड़ा देते हैं। पूर्णौकन के प्रयोग से परिकसन में बृद्धि बहुत कम हो जाती है। मत इसे सदैब प्रयोग में काना वाहिए।

उदाहरण 4-15 माना कि सस्या 25 368 को दो दागमल तक ही लिखना है। एक दागमल के बाद को दूसरी सरया 6 है किन्तु इससे घरनती सरया 8 है। जो कि 5 से प्रधिक है मत इस सम्या को दो दशमलब तक 25 37 लिखना होता है। इसी प्रकार यदि क्या हो तो दो दशमलब तक सस्या को लिखने ये 25 36 हो लिखना होगा क्यों कि 6 के बाद को सस्या 3 < 5 है।

यदि सस्या 25 365 हो तो यहाँ इसे दो दशमतव तक 25 36 ही तिस्तना होगा क्योंकि दूसरी दशमतव सस्या 6 है जो कि सम है।

यदि सस्या 25 375 हो तो इसे दो दशमलव तथ 25 38 लिखना होगा क्योंकि 5 से पूर्व मक 7 है जो कि विवस सस्या है।

प्रकावली

- । निम्न शब्दो को परिभाषा दीजिये।
 - 1 मानक विचलन
 - 2 माध्य के परित सामुर्ण
 - 3 माध्य विचलन
 - 4 मानक त्रिट
- 2 सकेतीकरण का प्रसरण पर क्या प्रभाव पडता है ? स्पष्ट रूप में सममाइये।
- 3 सीने का भाव प्रति 10 बाम एक सप्ताह मे दिनो के धनुमार नीचे दिया गया है -इस सप्ताह ने भावो का परिसर परिचित्त नीजिये ।
 - सोमवार, मगलवार, बुधवार, बृहस्पतिवार, शुक्रवार, शनिवार - 249 50, 247 80, 250 60, 248 50, 252 40, 256 0
- 4 निम्न बारम्बारता बटन के लिए (1) चतुर्यंक-विवरण, (2) वैयम्य-गुमाक ज्ञात कीन्निये —

रने बनाराम	बारव्हा _{रता}
5 9	6
9—13	10
13-17	18
17-21	25
2125	15
25-29	11
2933	10
33—37	5
3741	2

दो निर्माता कम्पनियों ने बेतन के बटन सरदाधी सूचनाएँ निम्न प्रकार हैं ---

	क [रुपयो मे]	कः —2 [रुपयो में]
माध्य	75	80
माध्यिका	72	70
बहुसक	67	62
चतुर्यक	62 चौर 78	65 धीर 85
मानक-विषतन	13	17

इन दो बटनो सम्बन्धी रुच्यो की नुसना शीजिये।

[एम॰ नाम॰ दिस्सी, 1965]

6 निम्त भ्रष्टन का माध्य के परित दूसरा बायूर्य तथा विषयरग-युगाक जात गीमिये -पर [X] 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
जारमारता 1, 9, 26, 59, 72, 52, 29, 7, 1

[एम॰ काम॰ दिस्सी 1965] [उत्तर #₂=198, C. V=355]

प्रथम तीन मायूर्ण, जो कि स्वेच्द्र मान 2 के परित विए गये हैं, कम्म 2, 10, 30 हैं। यून्य के परित पहले तीन मायूर्ण बात कीनिये और यह भी तिद्ध कीनिये कि इस बटन का प्रसरण 6 है। [चारिक सीक बस्तृत एक 1964].

[उत्तर #₁=5, #₃=31, #₃=201]

68 सास्यिको के सिद्धान्त धीर ग्रनुप्र	8	सास्यिकी	के सिद्धान्त	श्रीर	ग्रनप्रय	ì
--	---	----------	--------------	-------	----------	---

एक बारम्बारता बटन के लिए निम्न सूचना उपलब्ध है —

विचरण-गुणाक == 5

मानक विचलन == 2

कालं पियसंन का वैषम्य-गुणाक = 05

बटन का माध्य व बहुतक ज्ञात कीजिये। [बी० काम०, बम्बई, 1967] [उत्तर माध्य ≃ 40, बहुतक = 39]

9 दो प्रतिदशों के लिए निम्न मान उपलब्य के ---

प्रतिदर्श I	प्रतिदर्श II
n ₁ =10	n ₂ =12
≾X ₁ =70 0	$\Sigma X_1^2 = 46$
1	j '
$XX_1^3 = 7540$	$\Sigma X_i^2 = 318$
3	J '

इन दोनो प्रतिदशौँ का सम्मिलित प्रसर्ण ज्ञात कीजिये ।

प्राविकता का प्रयोग हम दिन मितिदन थे गायों में करते हैं। धनेक कथन सुनने में माते हैं जिनमें प्राविकता का बोध होता है, जैसे, धायद इस वर्ष में कसा में प्रयम घाऊँगा, चार शिक्तिंगों के नाम ने सेल में सायद इस बाद मेरे पास चारों इसकी [aces] पासे, एक निनेक को चारा उज्जानने पर समस्य सारा शोर्थ [bead] उत्पर प्रायेगा पादि। इस नस नस न से ने निनी घटना को धनिश्चितना का भाव प्रयट होता है। किन्तु कि गो शोरेगा। का सन्धानक का में परिकता गरा। हो प्राविकता सिद्धात है।

सनीय-प्रधान ले हो के निमित्त किसी घटना की प्राविशना जात करने के हेतु, गणितज्ञ पारुकत [Pascal], बर्जूमी 1713 [Bernoulli 1713], बैच 1764 [Bayes, 1764] मोर नार्न विवसंग [Karl Pearson] ने प्राविकता सिद्धात को विधि पुरा दिया। यह विवस माज साहित्यों का मुख्य यथा बन गया है।

प्राधिकता सिद्धान्त का प्रारम्भिक वर्णन इस प्रध्याय ये दिवा गया है। यह एक गू, विषय है, किर भी इसने प्रारम्भिक सिद्धान्तों को सुष्मता से सम्प्रका वा सवता है। प्राधिनता की परिभागा तथा सिद्धान्तिक विवरण देने से पूर्व इसमें मन्बद्ध सुख्य-सुख्य पारिभाषिक शब्दों का क्लंत दिया एका है।

षटना —िन्छी बाद्विन्छक प्रयोग¹ के परिचास नियमें कि कुछ निश्चित जुन विधमान हा, पदना कहताते हैं। पटना को इस प्रमार स्थय्ट समक सकते हैं। प्रतिदर्श सामिद के प्रायेक प्रमा [clement] में या तो निर्धारित जुन होते हैं या नही होते हैं। से ता विद्यु सैनमें से गुन होते हैं एक समुश्चिम मा गठन करने हैं। अन प्रतिदर्श समिद का प्रयोक उपसमुख्य [subset] जिसमें निश्चित जुन विद्यमान हैं, एक षटना कहत्वाता है।

यदि परनाएँ इस प्रकार हैं कि किसी एवं चटना के घटित होने पर सम्य घटनामों का घटित होना समानंव हो तो इन चटनामों को परलपर धावनी [mutually exclusive] घटनाएँ कहते हैं। जैसे एवं शिवके को उद्धार्त तो यदि सीचें अगर की घोर पाता की ताता [ani] अगर की घोर पाता नहीं मा सकता है या बन् अगर माने पर सीचें अगर नहीं मा सकता है। सन सीचें अगर माने माने सह सीचें कर पर माने की पर सीचें अगर माने माने सह सीचें कर पर माने की पर सीचें अगर साने के सह अगर माने की पर सीचें अगर साने की सीचें अगर साने की सीचें की परनाएँ परस्पर भावनों है।

माना कि दो घटनाएँ A घोर B हैं। A घोर B के प्रतिदर्श बिल्डुधो हारा प्रशेशत क्षेत्र इस प्रकार है कि इनसे एवं भी बिन्दु सर्वि नहीं है जैसा कि चित्र [51] में दिसाया

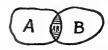
शहरिष्ण व प्रतीय [Random experiment] : जिन मधीय के हवन परिचारों का निर्मय कर से सुर्व परिचारों का निर्मय करन हैं। के पुर्व पर करना करना है। के पुर्व पर करना करना है। को प्रतिकार करना है। को परिचारिक में कारवार दिना जा रावडा हो, तो ऐने प्रतीय को बार ५३८ इसीय बहुते हैं।

हाय-परिणाम (outcome) किसी प्रशेष के बत्येक खम्बद परिशाम को हस्य-गरिणाम करे हैं है

गया है। यदि A ग्रीर B मे बुख विन्दु सार्व हैं तो इस स्थिति को चित्र [52] मे दिखाया गया है।



चित्र 5-1 परस्पर घपवर्जी घटनामो A व B का प्रदर्शन



वित्र 5-2 घटनामो A व B मे सार्व विन्दुमो केक्षेत्र का घटनैन

घटना $A \cap B$ (या AB) उन विन्दुका को प्रविश्त करती है जो A और B से सार्व हैं ग्राम्बंद् A और B दोनो घटनाएँ एक साथ घटित होती हैं। यदि $A \cap B \Rightarrow \emptyset$ हो तो घटनाएँ परस्वर यपवर्जी कहवाती हैं।

दो घटनाधों के जोड का AUB द्वारा प्रविश्वत करते हैं। इसका धनिप्राय है कि या तो घटना A या घटना B या दोनो घटनाएँ एक साथ घटित होती हैं। AUB मे उन प्रतिवर्ग बिन्दुमों को छोड़कर जो AuB किस्ती में लिही है पर्य सब बिन्दु सिम्मिलित होते हैं। इसी प्रकार घटना ADB' का धनिप्राय है कि चटना A घटित होती है किन्तु घटना B चिटत नहीं होती है। इन सकेतनों को दोधे प्रधिक घटनाओं के लिए व्यापकीकरण किया जा सकता है। यदि प्रत्येक घटना के घटित होने की सम्मावना समान हो तो घटनाएँ नमप्रायिक कहलाती हैं। इस घटिमाया को उदाहरण द्वारा इस प्रकार सममा जा सकता है। यदि एक सिक्षेत्र को उछावों तो सिक्का या तो सीर्थ (bead) की घोर से पिरेगा या सन् (tail) की घोर से पिरेगा । यहाँ शीर्थ या सन् के ऊपर की घोर घाने की सम्मावना समान है। धत थे घटनाएँ समग्राविक हैं।

प्राधिकता की चिरप्रतिब्डित परिभावा

माना कि एक प्रयोग के परस्थर अपवर्जी समस्य सम्भव परिणाय N हैं और ये सभी
श्रीरणाम समप्राधिक हैं। यदि इनमें से n परिणाम किसी घटना E के लिए अनुकूल
(favourable) हैं तो घटना E की प्राधिकता,

$$P(E) = \frac{n}{N}$$
(51)

है। यदि n=N हो तो P=1 है धर्बात् घटना E का चटित होना निश्चित है। यदि n=0 हो तो P=0 है धर्यात् घटना E घटित नहीं होगी यह निश्चित है। ध्यत्रक (5 1) से स्पष्ट है कि P वा मान कदापि च्छात्यक नही हो सबता भीर I से प्रधिव नही हो सबता बगावि n < N है। यत प्रायिवता का परिसर O हो I है पर्यात् O < P < I, इसी प्रवार घटना E वे घटित न होने घर्यांत् E' की प्रायिकता,

$$P(E')=1-P(E)$$

$$=1-\frac{n}{N}=\frac{N-n}{N}$$
(5.2)

क्योरि (N-n) परिणामी मे घटना E के सक्षण विद्यमान नहीं हैं :

उपर्युक्त परिभाषा को लाप्लासियन (Laplacian) परिभाषा भी कहते हैं।

स्यतत्र घटनाएँ

पटनायों के एन समुज्यय से यदि एक पटना ने पटित होने का किसी अन्य पटना के पटित होने की प्रायिकता पर कोई प्रभाव न हो तो ये पटनाएँ स्वनन्त्र कहलाती हैं !

यदि नोई हो घटनाएँ A व B स्वतन्त्र हो तो साह्यिकीय रूप से सर्वव निम्नाहित् सम्बन्ध सत्य होता है —

$$P(A \cap B) = P(A) P(B) \qquad (5 3)$$

इसी प्रकार तीन स्वतन्त्र घटनाम्रो AB वC देलिए निम्नास्ति सम्बन्ध ऽदिया जा सक्ताहै।

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B) P(C)$$
 (531)

चनाहरण 5.1 एक बेले में 5 सफेद गेर्दे और सात साल गेर्दे हैं। बेले को हिसार र इसमें से एक गेंद को निकाला गया है सो इस गेंद के लाल होने की प्राधिकता इस प्रकार कात कर सकते हैं —

इस परीक्षण के कुल सम्भव परिणामी की सक्या 18 है। 12 गेंदो में से कियी भी मेंद को निवासा जा सक्ता है। ये सब परिणाम परस्पर धपदवीं और सम्प्रायिक हैं N ≈ 12 । मून सात येंदें साल हैं। इससिष् 7 परिणाम सात तेंद चुनी जाने के प्रतुकूल हैं। मत गेंद के सात होने घर्षाय पदना में, की प्रायिकता

इसी प्रकार गेंद के सकेद होने धर्यात् घटना Eg की प्रायिकता,

$$\Gamma(E_s) = \frac{s}{12}$$

पटना E, को इस प्रशार भी कह सहने हैं कि गेंद लाम न होने की प्राधिकता,

$$P(E_2) = 1 - P(E_1)$$

है बवोकि वदि मेंद लाल नही है तो सकेद ही हायी।

$$F(E_2) = i - \chi_2$$

जवाहरण 5 2 यदि जदाहरण (5 1) में 4 मेंदो ना चयन एक साथ किया गया है तो इनमें से 2 गेंदें लाल व 2 सफेद होने नी प्राधिनता निम्न प्रनार ज्ञात कर सनते हैं -

12 गेंदो मे से 4 गेंदा का चयन (1,2) दग से किया जा सकता है।

थैले की 5 गेंदों में से 2 गेंदों का चयन (5) हम से और 7 लाल गेंदों में से 2 गेंदा का चयन (%) हम से निया जा सकता है। यहाँ इन सभी मेंदी ना चयन हीना परस्पर हबतन्त्र है । बत 4 मेंदो मे से 2 मेंदें सफेद और 2 मेंदें लाल होने की प्राधिकता निम्न है -

$$P(E) = \frac{\binom{6}{5} \times \binom{7}{5}}{\binom{14}{5}}$$
$$= \frac{\frac{54}{12} \times \frac{76}{12}}{\frac{12}{11} \frac{109}{109}}$$
$$= 0.424$$

चिरप्रतिदिवत परिभाषा के शेव

(क) इस परिभाषा म यह स्पष्ट कहा गया है कि प्रयोग के परिणाम समप्राधिक हान चाहिए । मत प्रत्याणिन दृश्य-परिणान समप्रायिक न होने की स्थिति मे प्रायिकता क्या होगी यह इस परिमाया द्वारा जात करना असम्भव है । जैसे यदि एक सिका प्रश्नित (biased) हो ता शीर्थ य' गन् के अपर श्राने की प्राधिकता ज्ञात करना सम्भव नहीं है।

(ख) यदि परस्पर अनवर्जी परिणामा की कुल सख्या अनत हो तो ऐसी स्थिति मे

इस परिभाषा की सहायता से प्रायिकता जात नहीं की जा सकती है।

(ग) मदि किन्ही स्मिनियों ने परस्पर अपवर्जी परिणामों की परिगणना करना सम्भव न हो तो गणितीय परिमाणा द्वारा प्रायिकता शात करना सम्भव नही है।

प्राधिकता की सारियकीय परिभाषा

मदि पूर्णतमा एक समान परिस्थितियों में मत्यधिक परीक्षण किये जाएँ तो इनमें से एक घटना (E) के अनुक्ल परीक्षणा की सस्या और कुल परीक्षणो की सस्या के अनुपात की सीमा को घटना E के घटित हारे की प्रायिकता कहते हैं। यहाँ यह कल्पना की गयी है कि भनुवात एक परिमित तथा श्रद्धितीय सीमा की ओर प्रवृत्त होता है।

मदि कूल n परीक्षणा म म K परीक्षण ऐसे हैं जिनमे कि घटना E घटिन होती है,

तो E के घटित होने की प्राधिकता, गणितीय रूप में निम्न प्रकार दी जा सकती है,

$$P(E) = \lim_{n \to \mathbb{N}} \frac{K}{n} \qquad ..(54)$$

यहाँ भे परिक्षणो की एक मत्यधिक बहुत सम्या है।

जबिक यह प्रतिबन्ध मत्र हा हि सीमा परिमित तथा अद्वितीय है।

प्रायिकता की ग्रभिगहोतीय परिभाषा

यदि Ω एक प्रतिदर्श समाध्य है और β एत σ -क्षेत्र (σ -field) का Ω में समुक्त्य है तो एत-मात पत्रत P भटता C ती प्राधित सकता है यदि यह तिस्त्र सुग्रमी का समाधान करता है।

(2) $P(\Omega) = 1$...(56)

(2) P (36) = 1 ...(5 (3) यदि E₁∈β, E₁∈β, E₁∩E₁ = ∅, ι≠₁

जबनि 🗲 एन जून्य समुख्य है !

Rì
$$P \stackrel{\infty}{(U E_i)} = \stackrel{\infty}{\stackrel{\Gamma}{I}} P (E_i)$$
 . (57)

कार दी गरी परिभाषा म समुज्यव के विश्व म परिभाला दी गयी है क्योरि घटना भ्रोर समुज्यव मे सर्देव एकेंगी समित (one to one correspondence) क्यांपिन की जा सक्ती है। भ्रत जो विवरण ममुज्यव के प्रतिगत्य है यही घटनाओं के प्रति भी साथ होता है या यह कह कि विगी एक के निष्ट दिया गया विवरण दूसरे के पिछ भी माना जा सकता है।

दिल्लको (1) मनुष्प्रव मिद्धारा र रियय म सर्वात् ६६, ६, ४-दोत्र व ६ चादि के विश्व में जानकारी के हेनू परिणिष्ट न का चन्यवन कीचिये ।

(2) प्रादिनका की फ्रांसबुद्दीतीय परिमाण केवल योजनीय साहियरी के विद्यापियों के लिए द्वारोगी है। सन्य पाटन इस परिमाण का छोड़ सकते हैं।

धोग प्रमेव

माना ∧ प्रीर Dदाषटनाएँ हैं, ताषटना ∧ या Bबादोनो षटनाभी के एक साथ षटि: होने का (A∪B) द्वारा अर्दाधन करते हैं। विव (5.2) ये छायाबस्त दीव की छोड़कर भैद सोन घटना (A∪B) को प्रदन्ति करता है।

पटना (AUB) की प्रावितना के निए निम्न मूत्र है -

जहारि बिन (5.2) व छावायस्त सेन घटना (AUB) को प्रशीमा करता है। मदि घटनाएँ पराक्षर घपनमी हा तो,

हमी प्रशास यदि तीन घटनाएँ A, II व C हैं तो,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$
(59)



यदि घटनाएँ A, B व C परस्पर अपवर्जी हो सो,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$
(591)

सामान्य रूप से \mathbf{n} घटनाथों $\mathbf{E_1}, \mathbf{E_2}, \mathbf{E_3}, ...$..., $\mathbf{E_n}$ के लिए निम्नाक्ति सम्बन्ध दिया जासकता है।

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_n) = \underset{i=1}{\overset{n}{\sum}} P(E_i) - \underset{i \neq j=1}{\overset{n}{\sum}} P(E_i \cap E_j)$$

उबाहरण 5.3 एक सिक्के यो दो बार उछालने पर प्रतिदर्श समिटि मे चार सम-प्रायिक परिणाम HT, TH, HH, TT होंगे। यहाँ निक्के के घोएँ को H से घौर सन् को T से प्रदक्षित किया गया है।

माना कि पहली बार में सिवना शीर्य नी घोर से गिरता है, यह घटना A है धौर दूसरी बार में शीर्य की घोर से गिरता है, यह घटना B है ।

क्योंकि घटनाएँ A और B स्वतन्त्र हैं और परस्पर अपवर्जी नहीं हैं.

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

यह पटना कि सिक्के को दो बार उछालने मे कम से कम एक बार सिक्का गीर्प की स्रोर से गिरता है, पटना (AUB) है। ब्रत घटना (AUB) की प्रायक्ता,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A). P(B)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

$$= 1 - \frac{2}{4}$$

$$= \frac{2}{4}$$

उदाहरण 5.4. एक फैन्ट्री द्वारा उत्पादित 75 वेयरियों में से 12 दोषपूर्ण हैं। वेयरिया के इस देंद में से दो वेयरिया याइक्ट्रिक रीति द्वारा प्रतिस्थापन सहित निकासे गये। प्रायिकता ज्ञात करनी हैं कि (1) निकास में दोनों वेयरिया दोषपूर्ण हैं। (1) दोनों वेयरिया रोप रहिन हैं। (11) एक वेयरिया दोशपूर्ण और दूनपरा दोग रहिन है। क्योंकि दो वेयरियों के निकासने का कार्य एक-दूसरे से स्वनन्त है तो एक वेयरिया निकासने पर. इसके, दोषपूर्ण होने की प्रायिकता = केंद्र भीर दोवरहिन होने की प्रायिकना = केंद्र । दोनो बेयरिंग दोषपूर्ण होने की प्राधिकता,

=13 X 13 = 0 0256

(n) दोनो बेयरिंग दोपरिंहन होने की प्राधिकता,

 $=\frac{63}{78} \times \frac{67}{75} = 0.7056$

(u) दोना स से एक दोषपूर्ण और दूसरा दायरीहत होन की प्राधितता, $\approx \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times 2 = 0.2688$

भाग (m) मे 2 से गुणा इसलिए किया गता है हि दो वेबिंग्या के चयन म पहला बैमिंग्ग दोपपूर्ण भीर दूनरा दोनरिक्त हो सहना है या पहला दोन रिहन व दूनरा दौषपूर्ण हो सकना है। भार दो बेनिगान एह दाचरिक्त व एक दोपपूर्ण दो दग से मिंग्य हो सकते हैं।

सप्रतिबन्ध प्राधिकता

यदि निसी प्रतिदर्श समस्टिम $\mathbb B$ एक घटना है जिसकी प्राविक्ता P(E)>0 है और उसी प्रतिदर्श समस्टि पर प्राथारित नीई सन्य घटना A है तो A के घटिन होने की प्रायिक्ता, जबकि यह जात हो कि घटना $\mathbb E$ घटित हो चुकी है, सुप्रतिबन्ध प्रायिक्ता कहनाती है। इसे P(A|E) द्वारा निक्कित करते हैं और निम्न मून द्वारा ज्ञात कर सकत हैं

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$
 (5 11)

उदाहरण 5.5 माना कि एक परिवार में यो बच्चे हैं। यदि बच्चा लड़का है तो हो के मेर परि बार नहीं है तो प्रेम है से निविद्या किया यथा है तो एक परिवार म बीनों सबसे होने, पहला बच्चा लड़का व दूतरा बच्चा लड़की, रहाला बच्चा लड़की व दूतरा स्था लड़का होने या बीनों तबकी हो है लिए क्या चार समय bb, bg, gb, gg हैं। एने से प्राप्त क्या व्यार समय है पटित होने की प्राप्तिक स्था $\frac{1}{4}$ है।

मृद्धि परिवार में कम से कम एक लडका होने की घटना को E से और दोनो शहके होने की घटना को A से सचित करें तो,

$$P(E) = P(bb) + P(bg) + P(gb) = \frac{s}{4}$$

 $P(A) = P(bb) = \frac{1}{4}$

A DE=A

$$P(A \cap E) = P(A) = \frac{1}{4}$$

मह दिया हुमा होने पर कि परिवाद में कम से कम एक सबका है, दोनो सहके होने की प्राधिकता,

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

$$=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{8}$$

सांस्यिकीय स्वतन्त्रता

यदाध घटनाष्ट्रो की स्वतन्त्रता को पहले दिया जा चुका है एर भी यहाँ इसे सप्रतिवन्ध प्राधिकता नी सहायता से दिया गया है ।

दो घटनाएँ E_1 श्रीर E_2 सास्थिकीय रूप से स्वतन्त्र कही जाती हैं यदि,

$$P(E_1/E_2) = P(E_1)$$
 श्रोर $P(E_2/E_1) = P(E_2)$ (512) सूत्र (511) ने अनुसार,

सूत्र (३११) व अनुसार,

$$P(E_1/E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = P(E_1)$$

 $\therefore P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$...(513)

इसी प्रकार,

$$P(E_2/E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = P(E_2)$$

या $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) P(E_2)$

मदि तीन घटनाएँ E_1 , E_2 , E_3 परस्पर स्वतन्त्र हैं ता,

$$P(E_1/E_2) = P(E_1)$$

 $P(E_1/E_2E_3) = P(E_1)$
 $P(E_1 \cap E_2/E_3) = P(E_1 \cap E_2)$
 $= P(E_1) P(E_3)$

हम जानत है वि

$$P(E_{1} \cap E_{2}/E_{3}) = \frac{P(E_{1} \cap E_{2} \cap E_{3})}{P(E_{3})}$$

$$= P(E_{1} \cap E_{2})$$

$$= P(E_{1} P(E_{3})$$

$$P(E_{1} \cap E_{2} \cap E_{3}) = P(E_{1} P(E_{3}) P(E_{3})$$

$$= P(E_{1} \cap E_{3}) = P(E_{3} \cap E_{3}) P(E_{3} \cap E_{3})$$

$$= P(E_{1} \cap E_{3} \cap E_{3}) = P(E_{3} \cap E_{3}) P(E_{3} \cap E_{3})$$

$$= P(E_{1} \cap E_{3} \cap E_{3}) = P(E_{3} \cap E_{3} \cap E_{3}) P(E_{3} \cap E_{3} \cap E_{3})$$

$$= P(E_{1} \cap E_{3} \cap E_{3} \cap E_{3} \cap E_{3} \cap E_{3} \cap E_{3} \cap E_{3})$$

$$= P(E_{1} \cap E_{3} \cap E_{3}$$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) P(E_3) P(E_3)$$
 (5.14)

इस प्रकार सूत्र (5 14) का हितनी ही परस्पर स्वतन्त्र घटनाधी के लिए ब्यापकी करण विभाजा सकता है।

बेज का प्रमेय

माना नि ॥ परस्तर मध्वर्जी धटनाएँ E_1 , E_2 , E_3 ,... E_n हैं और ये घटनाएँ मितनर प्रतिदर्श समिट Ω ना घटन करी हैं। प्रतिदर्श समिट Ω ये Γ एर घटना है जिसनी प्रायिकता $P(E) \neq 0$ । मानत कि घटनात्रा E_1 , F_2 E_3 , E_n नी जमम प्रायदुसव (apriori) प्रायिक्ताएँ $P(E_1)$, $P(E_2)$, $P(E_3)$, ..., $P(E_n)$ हैं।

यदि $P(E/E_1)$, $P(E/E_2)$, $P(E/E_3)$, $P(E/E_n)$ नमल मप्रित्रवर्ध्य प्राधिव ताएँ हैं तो दम प्रमेव द्वारा एक्च (Postenon) प्राधिव ताएँ P(E/E) आन करते हैं, जबिर i=1,2,3,.n (5 11) द्वारा जान है नि

$$P(E/E_i) = \frac{P(E \cap E_i)}{P(E_i)}$$

$$P(E \cap E_i) = P(E/E_i) P(E_i)$$
(5 14 1)

स्रोर
$$P(E/E) = \frac{P(E \cap E_i)}{P(E)}$$

पर
$$P(E \cap E_i) = P(E_i/E) P(E)$$
 (5 14 2)

(5 14 1) व (5 14 2) में बायी भोर के पद समान हैं।

$$P(E/E_i) P(E_i) = P(E/E) P(E)$$

$$P(E/E) = \frac{P(E/E_1) P(E_1)}{P(E)} \dots (515)$$

हमे P(E/E,) जात हैं और

या

 $P(E) = P(E \cap E_1) + P(E \cap E_2) + P(E \cap E_3) . .P(E \cap E_n)$

 $= P(E_1)P(E/E_1) + P(E_2)P(E/E_2) + P(E_3)P(E/E_3) + \dots + P(E_n)P(E/E_n)$

$$P(E_0/E) = \frac{P(E/E_1)P(E_2)}{P(E_1)P(E/E_1) + P(E_2)P(E/E_2) + ... + P(E_n)P(E/E_n)} \dots (5 16)$$

सूत्र (5 16) के। वासान 1, 2, 3, n रातवर जसम प्राधिवनाएँ $P(E_1/E)$, $P(E_2/E)_{\mu\nu}$, $P(E_n/E)$ जात कर सबते हैं।

जवाहरण 5.6: एव फंडट्री से एक पुरानी और एक नयी मसीन है । नथी समीन की उत्पादन समता पुरानी मसीन की खोशा चार गुना है । यूर्व मूचना से पता चनता है कि पुरानी मसीन द्वारा उत्पादित 6 प्रतिसत वस्तुर्ग दोपपूर्ण है नविर नयी मसीन द्वारा उत्पा-दित 2 प्रतिसत वस्तुर्ग दोपपूर्ण हैं । प्रायिकता ज्ञात करनी है कि एव चयनकृत दोपपूर्ण वस्तु (1) पुरानी मसीन द्वारा उत्पादित है (2) नयी मसीन द्वारा उत्पादित है ।

एक घर गहुत बस्तु ने पूरानी मणीन द्वारा उत्पादित हाने वी घटना वा E_1 वे पूरित करें, एक चयन हत बस्तु ने नवी मणीन द्वारा उत्थादित हा जी घटना का E_2 वे पूरित करें ग्रीर एक घयनहत बस्तु दोवपूर्ण होने वी घटना का E ने पूरित करें ता इस समस्या में प्राविकताएँ $P(E_4/E)$ व $P(E_2/E)$ झात करनी हैं।

दी गयी मुचना वे धन्मार,

$$P(E_1) = 0.20$$

$$P(E_2) = 0 \text{ MV}$$

wit
$$P(E|E_1) = 0.06$$

 $P(E|E_2) = 0.02$
 $P(E) = P(E_1 \cap E) + P(E_2 \cap E)$
 $= 0.20 \times 0.06 + 0.80 \times 0.02$
 $= 0.028$

वतः सम्बन्ध (5.15) के बनुसार,

$$P(E_2/E) = \frac{.06 \times .20}{028}$$

=**3** .

इसी प्रकार,

$$P(E_2/E) = \frac{02 \times 80}{.028}$$

निर्वेचन : इस प्रकार इस उदाहरण हारा पता चलता है कि दोयपूर्ण बस्तु का नदी मशीन हारा उत्पादन होने की प्रानिकता सर्थिक है !

माबृध्छिक चर

एक सस्वात्मक मान-कतन जोकि एक प्रतिदर्श-समिद्ध पर परिमापित है, बादुन्दिक पर कहलाता है। बांद्र X एक ऐसा पर है तो बादुन्दिक प्रयोग के विभिन्न निष्पादनीं (Performances) में X के विभिन्न मान होंगे।

घर X के एक निरिष्ट भान x लेने को घटना की आधिकता को P(X=x) हारा प्रवित्त करते हैं। यदि a चौर b को जास्त्रिक करताएँ हैं चौर a < b है तो घर X के निर्दिष्ट प्रस्तरात a < X < b में होने को घटना को प्राधिकता को P(a < X < b) हारा प्रविद्यात करते हैं। यदि प्रस्तरात (a, b) में X के विभिन्न मान लेने की घटनाओं को प्राधिकता ज्ञात हो तो है म कह नकते हैं कि चर X का प्राधिकता ज्ञांत हो तो हम कह नकते हैं कि चर X का प्राधिकता जेटन या बेंटन ज्ञात है। प्रक्षा प्रधिकता P(X < x), x का एक एक्तन होगा। माना कि $F(x) \Longrightarrow P(X < x)$. F(x) को चर X वा बेंटन एक्तन कहते हैं।

मसंतत याद्धिक चर

यदि बंटन की कुल मात्रा बुद्ध विचुक्त बिन्दुमों (isolated points) पर केन्द्रित हो या एक परिभित भन्तराल मात्रा बिन्दुमो की यक्षतीय या परिभित कल्पा रखता हो। तो यादुन्सिक वर X भवतत प्रकार का कहा जाता है।

धसंतत चर X के लिए प्राधिवता फलन p(x) = P(X = x) धौर $P(X = x_i) = p$ जबकि x का एक मान x_i है ।

संतत याद्विष्ठक चर

एक यादृष्टिक चर X सतत प्रकार का कहा जाता है यदि बंटन फलन F(x) सर्वत्र सतत हो । साथ ही प्राधिकता घनत्व फलन f(x) का प्रस्तित्व है प्रयांत् f(x)>0 प्रीर

यह
$$x$$
 के लगभग प्रत्येक मान के लिए सतत है, जबकि $f(x) = \frac{d}{dx} \left\{ F(x) \right\}$.

स्रसतर व सतन चरको सम्बारमक मान फनन में (x) के घ्य से त्रमण निम्न उदाहरणो द्वारा समक सकते हैं

माना कि एक सिवके को उछानने पर यदि शीर्ष (H) उत्पर की घोर भाता है दो यह 1 से धौर सन् (T) उत्पर की घोर धाता है तो यह 0 से निक्षित हैं। इस स्थिति में,

$$\psi(H) = 1 \text{ with } \psi(T) = 0$$

यदि किन्ही एकका के भार, ऊँचाई या तम्बाई बादि X हारा निकपित हैं ती,

$$\psi(X) = X$$

उपर्युक्त वर्णन के आधार पर यह कह सकते हैं कि प्रत्येक परिणाम को कोई एक मान दिया जा सकता है। यह बिदित है कि किसी घटना की प्रायिकता जात की जा सकती है। झल घटना के तदनुवार वर के मान की प्रायिकता जात कर सकते हैं। इससे इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि घटना भीर वर के मानो में सगति (Correspondence) निर्धारित की जा सकती है और इसके प्रति प्रायिकता जात की जा सकती है।

प्राधिकता ग्रंटन सिद्धांत

बटन फलन F(x) को सचयी बटन फलन भी कहते हैं। F(x) के मुख्य लक्षण निम्न प्रकार हैं:—

- (∓) F(+∞)=1
- (स) F(-∞)=0
- (ग) यदि x₁>x₂ हो तो F(X₁)>F(X₂)
- (घ) किसी मसतत घर X के लिए,

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

$$= \sum_{a < X < b} P(x) \qquad(5.17)$$

(इ) शिसी सतत चर X के लिए,

$$P(X < x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} I(x) dx$$
 ..., (5.18)

धौर

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = P(a < X < b)$$

$$=P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f(x) dx \qquad (519)$$

हो याद्ध्यिक चरो X और Y ने निग

$$P(X \leqslant x, Y \leqslant y) = F(x y) \tag{5.20}$$

F(x, y) को चरा X और Y कर समुक्त सबयो बटन करान (joint cumulative distribution function) कहते हैं । समयन बाद्धिक चरा X और Y के लिए समुक्त प्रायिकता करान

$$p(x, y) = P(X=x, Y=y)$$
 (5.21)

है और बटन फलन निम्नावित है —

$$P(X \leqslant x, Y \leqslant y) = F(x, y) = \sum_{u \leqslant x} \sum_{v \leqslant v} p(u, v)$$
 (5 22)

सतत यादृष्टिष्टन वरी X भीर Y के लिए सयुक्त प्राधिनता घनत्व फलन इस प्रकार है —

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

भौर संयुक्त बटन फलन निम्नादित है —

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{y} f(u,v)dv \qquad ...(523)$$

[⟨x, y⟩ के मुख मुख्य लक्षण निम्न प्रनार हैं —

 (π) f(x, y) > 0

(ख) ग्रसतत चरा X ग्रीर Y के लिए,

$$\Sigma \Sigma p(x, y) = 1$$

है। सनत चरो X ग्रौर Y के लिए निम्नान्ति सम्बन्ध होता है --

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

F(x, y) के नक्षण निम्न प्रकार है --

$$(\overline{\tau}) F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$$

(A) F(∞, ∞)=1

उपात बंटन

यदि दो सतत चरो X व Y का सुयुक्त प्राधिकता घनस्व फलन f(x,y) है तो उपांत बटन के लिए निम्न सम्बन्धो पर विचार करें —

$$P(a < X < b) = P(a < X < b, -\infty < Y < \infty)$$

$$= \int_{a}^{b} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy$$

$$= \int_{a}^{b} f_{1}(x) dx \qquad(524)$$

जबिक
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = f_1(x)$$

यदि X के बटन का विचार करें तो,

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f_X(x) dx \qquad(525)$$

सम्बन्धो (5 24) भौर (5.25) भी सहायता से निम्न सम्बन्ध दिया जा सकता है -

$$\int_{a}^{b} f_{x}(x) dx = \int_{a}^{b} f_{x}(x) dx \qquad (526)$$

(5 26) तद ही सत्य हो सनता है जब $f_x(x) = f_1(x)$ है। यह सम्बन्ध 2 व b के दिन्हीं भी बास्तविक मानी के लिए सत्य है। यत चर X का उपात घटन निम्न प्रकार है —

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$
(5 27)

इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि Y का उपात बटन निम्नतिखिन होता है --

$$f_{z}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \qquad (528)$$

बटन फलन F (x, y) में लिए उपात बटन निम्नानित होते हैं --

Y क्या मान ग्रहण करना है यदि इस तक्य की उपेशा कर दी जाय तो P (X < x) वो F₁(x) द्वारा प्रदर्शित कर सक्ते है ग्रौर इसे चर X का उपान बटन वहा 🦘 ।

$$F_1(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y) dy$$
 (529)

with
$$f_1(x) = \frac{d}{dx} \left\{ F_1(x) \right\} = F_1'(x)$$
 (5.30)

इसी प्रकार Y का एपात बटन दिया जा सकता है जो कि निम्न है -

$$F_2(y) = P(Y \le y) = \int_{-\infty}^{y} dv \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) dx \qquad (5.31)$$

स्रोर
$$f_2(y) = \frac{d}{dx} \left\{ F_2(y) \right\} = \Gamma_2''(y)$$
 (5 32)

दो प्रसतत चरो X भौर Y के सयुक्त बटन फनन F (x, y) के लिए उपात बटन निम्नाक्ति होते हैं ---

यदि चर X के उपात बटन ना $F_1(x)$ और Y के उपात बटन को $F_2(y)$ मे निरूपित करें तो.

$$F_1(x) = P(X \le x) = F(x, \infty)$$

$$f(x) = P(Y \le y) = F(\infty, y)$$

$$(5.33)$$

मीर $F_2(y) = P(Y \leqslant y) = F(\infty, y)$

होने हैं। उपात प्रायिवना पतन निम्न प्रवार हात हैं

$$p_1(x) = \sum p(x, y) \text{ wit } p_2(y) \Longrightarrow \sum p(x, y)$$
 (5.34.1)

प्रविचरों की स्वतन्त्रताः यदि दो घर 🟃 ग्रीर Y मान्यिकीय रूप से स्वतन्त हो तो सबय $F(x, y) = F_1(x) F_2(y)$

सदैव सत्य होता है। यह रिष्ट विया जा सहता है कि स्वतन्त्रता की स्थिति मे

$$f(x, y) = f_x(x)$$
 $f_x(y)$ (5.36)

होता है यदि घनत्व पत्तन का ग्रामान हो।

सप्रतिबध बटन (Conditional distribution)

दो सतन चरो X, Y ने सयुक्त प्राविभाग घात्व पान !(x, y) में विंद चर \ नो स्थिर रखा जाये, जबकि रि(x)>० है, तो फ्रे के स्थिर मान x रे तिए पलन $f(x,y)/f_1(x),y$ का सप्रतिबन्ध वारम्बारना फलन तहताना है। f(v,x) द्वारा निरूपित करते हैं। धन

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$
 (5.37)

(537) द्वारा प्राप्त y के सप्रतिबन्ध बारम्बास्ता फलत के लिए निम्न गुणवर्भ दिया जा सकता है '---

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y/x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y)}{f_1(x)} dy = \frac{1}{f_1(x)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \frac{f_1(x)}{f_1(x)} = 1$$

इसी प्रकार Y ने स्थिर मान के लिए X ना सप्रतिबन्ध बार्म्बारता कवन,

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_1(y)}$$
 (5.38)

दिया जा सकता है।

सप्रतिकार्ध बारण्वारता पानन $\{ly/x\}$ उम मात्रा के बटन को निरुपिन न रता है जो कि दिन्दू X=x पर एक कार्याधन पनती उध्धीपर पट्टी में स्थित है। यहाँ X जो एक स्थानन पर और Y जो एक खाध्येद घर कहे तो X के निष्धित मान x के निष्Y का बारन्वारता फलन f(y/x) होता है। इसी प्रचार का विवरण f(x/y) के लिए दिया जा सकता है।

हो सहतंत चरो X स्नौर Y वी स्थिति से, साता वि X द Y वे उपान प्राधिवना एमन त्रमण $p_1(x)$ व $p_2(y)$ है जबकि चरो X सौर Y का संयुक्त प्राधिनना एनन p(x,y) है। माना कि चरो वी समस्टि A है जिन पर कि p(x,y) धनारमक है सन्धना सून्य है। माना कि A_2 स्नौर A_2 समस्टि A के दो संयुक्त्य हैं।

बाता कि समुख्यय $A_1 = \{x = x^2, -\infty < y < \infty\}$ है जबकि x^4 इस प्रकार है कि $P(A_1) = P(X = x^4) = P_1(x^4) > 0$ श्रीर समुख्यय $A_2 = \{-\infty < x < \infty, y = y^4\}$ है।

परिभाषा के धनुसार निहिष्ट घटना A_2 के लिए घटना A_2 की सप्रतिकत्य प्राधिकता निक्त प्रकार है —

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(X = x', Y = y')}{P(X = x')}$$

$$= \frac{P(x', y')}{P(X = x')}$$
(5.39)

यदि (x, y) पर बिस्दु है जिसके लिए $p_1(x) > 0$ है तो लिहिस्ट घटना X = x के चिल घटना Y = y को गञ्जनिवन्य प्राधिकता $p(x, y)/p_1(x)$ है ।

ब नी स्थिर रावा आब तो प्र का फलन घत्तल बार्ट्य्ट्र वर Y का प्राधिनता गरून होते ने प्रतिकायों की पूरा करता है क्योंकि

$$p(x, y)/p_1(x) \ge 0$$

स्रोर
$$\frac{p(x, y)}{y} = \frac{1}{p_1(x)} \sum_{y} p(x, y) = \frac{p_1(x)}{p_1(x)} = 1$$

ग्रत: निदिष्ट x के लिए y का संप्रतिबन्ध प्राधिकना थलन p(5 <) निम्न प्रकार होता है ·—

$$p(y/x) = \frac{p(x,y)}{p_1(x)}$$
 जबकि $p_1(x) > 0$ (5.40)

इसी प्रकार निर्दिष्ट ह वे लिए प्रका सप्रतिवन्य प्राधिवना पनन ० (० y) निस्न प्रकार दिया जा सकता है —

$$p(x/y) = \frac{p(x,y)}{p_2(y)}$$
 जबिर $p_2(y) > 0$ (5.41)

रा' तीम प्रत्याशा

माना कि एक बाइन्छिक घर X है जो कि मान $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ प्रमम प्रापिक्ता p_1, p_2, p_3 . . , p_n में ब्रह्म करता है । g(X) घर X का एक फलन है तो X के मान x_i के लिए फलन का मान $g(x_i)$ है । यदि घटना $X=x_i$ की प्रापिक्ता p_i है तो फलन g(X) की प्रत्याशा $E\{g(x)\}$ की परिभाषा निम्न मूत्र में दी जाती है —

एक ग्रमतत प्रकार के बटन के लिए,

$$E \{g(X)\} = \sum_{i=1}^{n} p_i g(x_i)$$
= 1 (5 42)

गक सत्तन प्रकार के बदन के लिए,

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \tag{5.43}$$

श्रापुर्ण

यदि $g(X) = X^K$

े तो एक अमनत प्रकार के बटन के लिए,

$$E(X^k) = \sum_{i=1}^{n} o_i(X_i^k)$$
 (5.44)

एक सतत प्रकार के बटन के लिए,

$$E(X^{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} X^{k} f(x) dx \qquad (5.45)$$

 $E(X^k)$ को शून्य में परित K वां बाधूर्ण वहते हैं बीर इसे μ_k द्वारा निरुपित करते हैं जैसा कि बाब्दाव चार भ दिवा गया है।

इसी प्रकार साध्य को परित kवा साधूणें,

$$\mu_k = E\{X - E(X)\}^k$$
 (546)

एवं प्रसत्तत बटन के लिए,

$$\mu_{k} = \sum_{i=1}^{n} p_{i} \{X_{i} - E(X_{i})\}^{k}$$
 (5.47)

भौर सतत बटन ने लिए.

$$\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ X - E(X) \right\}^k f(x) dx \qquad (5.47.1)$$

यदि k ≔ 1 है तो,

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i \{X_i - E(X_i)\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i (X_i - s)$$

$$= 0 (548)$$

यदि k=2 है तो,

$$u_{0} = \mathbb{E} \{X - \mathbb{E}(X)\}^{2}$$

$$= \mathbb{E} \{X^{2}\} - \{\mathbb{E}(X)\}^{3}$$
(5.49).

⊭₂को घर X का प्रसरण कहते हैं।

इसी प्रकार क्षम्य उचन क्षम के मापूर्णों की दिया जा सकता है।

माना दि X व Y दो घर है जिनके मान्य व मतरण परिधित हैं। ता दन दो घरों X व Y के लिए सान्य दे परित द्वितीय कम के घाषूणें ρ_{31} दो घरा X व Y में सहस्रसरण कहते हैं चौर इसदे लिए निम्नादित धुन है।

$$y_{11} = Cov(X, Y) E[\{X-E(X)\}\{Y-E(Y)\}]$$
 (5 50)

यदि दा चर λ ग्रीर Y स्वतन्त्र है तो यह मिद्ध किया जा सकता है कि $E(\lambda Y) = E(\lambda) E(Y)$

ग्रापूर्ण जनक फलन

यदि X एक बाह्यस्थक वर है स्रोर t एक वास्तविक सस्या है ता वर X या इसके बटन के साधून जनव कनन $M_X(t)$ वी परिभागा निम्न सूत्र द्वारा दी जाती है t

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$
 (5.51)

जबिक ग्रक्षर E फलन e^{tX} की प्रत्याशा की मूचित करता है।

यदि चर X मसतत है तो,

$$M_{X}(t) = \sum_{i} e^{txi} f(x_{i})$$
 (5.52)

यदि चर X सतत है तो

$$M_{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$
 (5.53)

जबिक – ∞ **< X <** ∞

प्रापूर्ण जनक फलन द्वारा किसी बटन के प्रापूर्ण जात किये जा सकते हैं विसकी विधि इस प्रकार है। बटन का λ वा ध्रापूर्ण जात करने के लिए एकन $M_X(t)$ का t है सम्बन्ध से λ यार प्रकलक करने इसने t=0 रर दिया जाता है यदि $M_X(t)$ का λ वा ध्रवक्लक $M_X^1(t)$ हे तो $M_X^1(0)$ को जात कर लिया जाता है जो कि सदैव $E(X^k)$ के समान होता है जबकि

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx = \sum_{x} x^k p(x)$$
 (5.54)

स्पटत $E(X^k)$ ने मानों का $M_x(t)$ द्वारा जनन किया जा सकता है जो कि चर X के बटन ना kजा धापूर्ण हैं । यही नारण है नि $M_x(t)$ नो धापूर्ण जनक फलन नहते हैं।

उपर्युक्त विधि को प्रयाप काश्रुपा का सात करने के लिए कव्याय 6 व 7 में क्या गया है।

द्यापूर्ण जनन पतन ना उपरोग नम होता है न्योनि सनेनो बटनो ने निए मापूर्ण उनन पनन का मस्तित्व नहीं है। इसके स्थान पर प्रिमनक्षण पतन ना उपयोग प्रच्छा समना जाना है नयोनि प्रत्येन बटन ने सिए गामिससा क्षतन ना प्रस्तित्व है।

मभिलक्षण फलन

माना कि एव बार्शच्छर घर X ग. एक फलन g(X) है मीर। एव बास्तविक सस्या है तो $E(e^{fx})$ वो X ने बटन वा म्रामिलसण फलन नहते हैं उसे $\phi_a(t)$ से सूचित करते हैं।

,'.
$$\phi_x(t) \Rightarrow E(e^{tx})$$
 (जहाँ 1=√-1) (5.55)

यदि चर X धसनत है तो,

$$\phi_{\pi}(1) = \sum_{r} e^{it_{\pi}r} p(\pi_{r})$$
 (5.56)

ग्रीर यदि चर X सान है ता

$$\phi_{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i x} f(x) dx \qquad (5.57)$$

 $\phi_{z}(t)$ का प्रध्निक्षण कलन दूस कारण कहते है कि प्रत्येक बटन को एक प्रदिशीय प्रभित्याण फलन होता है और प्रस्या प्रधिनक्षण फलन के सगर एक प्रदिशीय बटन कलन हाता है।

म्रद्वितीयता प्रमेव

दो बटन फलन तव ही समसा हाते हैं जबकि उनके मधिलक्षण फलन भी समस्य हो।

प्रश्नावसी

- निम्म पदेश की परिभाषा दीजिये और स्पष्टीकरण भी कीजिये ।
 - (प्र) प्राधिकता
 - (ख) यणितीय प्रत्याशा
 - (ग) सास्यिकीय स्वतन्त्रता
- 2 स्वतन्त्र एव परस्पर ग्रावर्शी पटनायो स ग्रन्तर न्यास्ट कीविये। इनका एक एक उदाहरण भी दीत्रिये।
- 3 यदि एक ताल के दो पत्ता का प्रतिस्थापन सहित घवन निया थया है नो प्राधिकता जात की जिये कि ये दो पत्ते मुलान हैं ?
- 4 प्राधिकता जान की जिले कि एक गणमभावित रीति से प्रवनकृत प्रशिवदे (Leap year) में 53 रिक्शर रागे । (जलर 2/7) (एन एक ती, सानरा 1955)
- 5 एक ताम भी महुटी से चार पसे निकाले यथे ता प्रायक्ता ज्ञान करों कि ये पसे पान के नहीं हैं ?
- 6 एर निको हो चार बार उद्धाना बना ना प्राविश ता लग करा कि यह घरो गीर्य (head) है ?

7. एक कम्पनी मे 20 काम करने वाले व्यक्तियों मे से 5 स्नातक स्तर तक शिक्षित है। यदि गममभाविक रीति द्वारा इनमें मे तीन व्यक्तियों का चयन किया जाता है तो प्रायिक्ता जात कीजिये कि (म्र) ये तीनो स्नातक हैं ? (ब) इन तीनों में से कम से कम एक स्नातक स्तर तक शिक्षित हैं ?

(भाई. सी. डब्लू. ए. 1965)

 क्रिज के सेल में एक हाथ में 9 पछे एक ही प्रकार (same suit) के होने भी प्राधिकता ज्ञात की जिथे।

$$\left[\frac{\left(\frac{13}{9} \right) \left(\frac{39}{4} \right) \left(\frac{4}{1} \right)}{\left(\frac{52}{13} \right)} \right]$$

(दिल्ली, 1968)

9. एक पैले में 5 सफेट मौर 4 काली गेर्दे हैं। इस पैले में से एक गेंद को निकाल कर प्रतिस्थापित कर दिया जाता है भौर फिर दूसरी गेंद निकाली जाती है। प्रायिकता शात कीजिये कि ये थोनो गेंदें सलग-सलग रंगों की हैं?

$$\left(\sqrt[3]{81} \right)$$

(प्रागरा, 1967)

10 . तीन कलना हैं। क्लास I मे 3 लाल और 7 हरी गेंदें हैं, कलस II में 5 लाल और 3 हरी गेंदें हैं और कलना III में 8 लाल और 4 हरी गेंदें हैं इन कलशों से से एक लाल गेंद निकाली गयी है। प्राधिकता बतादये कि (प्र) यह गेंद कलता I से निकाली गयी है?

(दिस्सी, 1970)

12 . एक साम की गट्टी में से केवल एक पत्ता निकासा जाता है प्राधिकता शांत कीजिये कि यह या तो हुकूम का इक्का है या चिट्टी का गुलाम है ?

$$\left(3\pi \left(\frac{1}{26} \right) \right)$$

(इलाहाबार, 1970)

13	एक फंक्ट्री द्वारा यन्त्र रचना (Mechanism) के तीन स्वतन्त्र भाग हैं। यह जान
	है कि पहिले माथ ! प्रतिशत, दूसरे साय 4 प्रतिशत ग्रीर तीसरे भाग 2 प्रतिशत
	रोषपूर्ण है । प्राविकता का परिकसन कीजिये कि यन्त्र-रचना खदोषपुर्ण है ?

(उत्तर : 0 931) (एम. बी ए. दिल्ती, 1971)

14. एक युद्ध मे लक्ष्य पर वस गिरने की समावना है है। पुत को नष्ट क्रोने कि लिए दो बस पर्याप्त हैं। पुत्र को सहस बनाकर ठ बस बाते गये तो पुत्र के नष्ट होने की प्राणिकता बात वीजिये ।

> (वत्तर: 0 345) (दिल्ली, 1963)

6 कुछ मुख्य ग्रसंतत प्रायिकता बंटन

प्राधिनना बटन का मामान्य विवरण ऋष्याय 5 में दिशा जा जुना है। यहाँ वेवल मूख्य भ्रमतन बटनों का वर्णन दिया गया है।

यदि एक याद्दिकत चर X समतन है तो इसवा बटन के ससतन होता है। इस चर के माना का पुछ ही विन्दुसो पर बेन्द्रीवरण हाना है। माना कि सहिन विन्दुसो x_1, x_2, x_3, \dots का परिमित्र या स्नान स्रतुकत है सार इन विन्दुसा की महित समस्र p_1, p_2, p_3 है। इस प्रकार X के समस्र मान x_1, x_2, x_3 है और X वे एक निर्दिष्ट मान x_1 नेने की प्रायिकता p_1 होती है।

ग्रयांत् $P(X = x_i) = p_i$ जबिक i = 1, 2, 2, ...

ग्रीर ∑ p,=1, क्योशि बटन में कुल सहति 1 होती है।

⊣दि चर X ना बटन फलन F(x) है तो

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i \le x} p_i$$

$$(62)$$

चित्र (6-1) ग्रसतत बटन ना सेसाचित्रीय रूप

x2

श्रसतत बटन F(x) की चित्र (6-1) में प्रदक्षित किया गया है। इस बटन का रूप सीडी-क्झ जैसा होता है:

द्विपद-बंटन

एक याहण्डिन प्रयोग धीर एक घटना E पर विचार करें। प्रयोग के परिणाम में यदि घटना E के मुण विद्यमान होते हैं तो अयोग को सफल कहते हैं प्रत्यपा असफल कहते हैं। मानर्से नि एक प्रयोग में सफलता मिले के हश्य-परिणाय को 1 से और भग्रफलता षं इथ्य परिमाण को 0 में मूर्तिक किया गया है। यन प्राणेश मिलिशी एक चर्र X ने त्वा मान 1 व 0 मानव हैं सवाज् परिणान द्विष्ठात्मक (duchotomous) हैं। यदि X = 1 होने की घटना की प्राधिकता p है ता X = 0 हान की प्राधिकता q = 1 - p हागी। इस प्रवार p + q = 1

यित गरिक्षणा ने परिणास भ $_1$ χ_2 χ_3 χ_6 है ता k वे पराक्षण संसाहिन्छन भर χ_4 ना निम्न प्ररार निरूपित कर ग्राने हैं -

 $V_k \sim 1$ चब K व परीरण संसदनाः होती है जिसकी कि आधिरता p है। सन्यया $X_k \sim 0$ सौर इसरी प्राधिकार g ते।

इस स्थिति म 2 स्वान प्रयागी व प्रेडणा वा य ग अपलतस्था की सरथा ने समान होता है।

माना कि n परीक्षणों म हुत सम्पर्धाया को सरवा ह है सर्वाद

$$x_1 + x_2 + x_3 + + x_n = t \in \mathcal{E}$$

प्रस्वर x स्वान्त है पत X श्रमी सं सप स्वासी और (n-r) प्रसम्बद्धार्थ है । पृत्विदित है कि स्वामी संस्थन पटलाएँ $\binom{n}{r}$ दम स्पिटत है सिस्ती हैं। प्रवास स्वामा र सफलनायों वी प्राविस्ता P_r राम है —

$$P_r = \binom{n}{r} p^r q^{n \cdot a} \tag{6.2}$$

दायी ग्रोर का व्यञ्जन पु.+p) के डिपट विस्तार म (r+1) वॉ पद है।

हर बटन करामान्य मुण हम प्रशास है। यह धन सबतत यटन है जिसने प्राचन । n प्रराप्त है। n एक प्रभासन पूण मन्या है और p ना मान 0 से 1 तन विचरण प्रताहै। डिपद बटन ना माध्य np और प्रसरण ppq है।

p = 0 या p == 1 हान की दलाय युग्ध यिकाइयाँ उत्पन्न हो जाती हैं कि तुइनका बणन यहाँ नहीं दिया गया है ।

दिपद बदन कलन

$$B_n(x n) = P(r < x)$$

$$= \sum_{r < x} {n \choose r} p^r q^{nr} \qquad (63)$$

इस प्रकार क बटन की चित्र (ठ-1) थ दिश्यया ता चुका है। जिसम कि (४+1) विमुक्त सहीन बि दुधो ४=०, 1, 2 3 ४ पर ऊँचाई P (र≪४) वे समान है।

उदाहरण 6.1 एक फस्टरशाल संभक्त दित सं 10 प्रसन हुए। इव 10 प्रसनों से से 4 सकते होने को प्राधिनता निक्त प्रकार काल नर सनते हैं बच्चा साली सरका हो

[[] प्राथस (Parameter) समय के दिशी अवर नात की श्रापल कहते हैं लैन समझ माध्य, स्पष्ट प्रस्तान मादि के

सकता है या लडकी । भागा कि सडका होने की प्राधिकता $p=\frac{1}{3}$ और लडकी होने की प्राधिकता $q=\frac{1}{3}$ है । प्रति दिन 4 लडके होने की प्राधिकता $q=\frac{1}{3}$ है । प्रति दिन 4 लडके होने की प्राधिकता $q=\frac{1}{3}$ है । प्रति दिन 4 लडके होने की प्राधिकता $q=\frac{1}{3}$

$$P_{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{10^{-4}}$$

$$= \frac{10987}{4321} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{6}$$

$$= \frac{1037}{2^{10}} = \frac{210}{1024} = 205$$

यदि कम से कम 4 लड़के होने की प्रायिक्ता ज्ञान करनी हातो मूत्र (63) का प्रमोग करना होता है। यहाँ र≫ का प्रमोग करना होता है। यहाँ र≫ का प्रमोग किया जाना है इस स्मित में र के मान 4,5,6,7,8,9,10 हा सकने हैं। इन सबके लिय प्रायिक्ताझा का याग कम से कम 4 सड़के होने की प्रायिक्ता बतायेगा।

मत[्]

$$P (r>4) = \left\{ \binom{10}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10^{-4}} + \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10^{-5}} + \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10^{-5}} + \binom{10}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^{10^{-7}} + \binom{10}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^{10^{-7}} + \binom{10}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^{10^{-7}} + \binom{10}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^{10^{-7}} + \binom{10}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left\{ \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} \right\}$$

$$= \frac{1}{210} \left(210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1\right)$$

$$= \frac{848}{1024} = 828$$

उपर्युक्त पटना की प्राधिकता धन्य रूप से भी ज्ञात कर सकते हैं। बह यह कि पहिले 4 से कम लडके होने मर्थात् मधिक से प्रधिक 3 लडके होने की प्राधिकता ज्ञात कर से भीर इसे 1 के से पटा दें तो कम से कम 4 सडके होने की प्राधिकता ज्ञात हो जाती है। 3 या 3 से कम सडके होने की स्थिति मे

$$r=0, 1, 2, 3,$$

इस परना की प्राधिकता

$$P(r < 3) = \sum_{r=0}^{3} {n \choose r} p^{r} q^{n-r}$$

$$P(r < 3) = {10 \choose 0} {1 \over 2}^{0} {1 \over 2}^{0} + {10 \choose 1} {1 \over 2}^{10} {1 \over 2}^{10} + {10 \choose 1} {1 \over 2}^{10} {1 \over 2}^{10} + {10 \choose 1} {1 \over 2}^{10} {1 \over 2}^{10} + {10 \choose 2} {1 \over 2}^{10} {1 \over 2}^{10} + {10 \choose 3} {1 \over 2}^{0} {1 \over 2}^{10} + {10 \choose 0} + {10 \choose 1} + {10 \choose 2} + {10 \choose 3}$$

$$= \frac{1}{2^{10}} {1 + 10 + \frac{109}{21} + \frac{1098}{321}}$$

$$= \frac{176}{1024}$$

मत कम से कम 4 लडके प्रति दिन होने की प्राधिकता,

$$P(r>4) = 1-P(r<3)$$

=1 - 172
= 828

हिप्पणी: इसी प्रकार सम्य किसी भी द्विया चर के निष् यो दिपद बटन का पासन करता है प्रामित्रता क्षात कर सबते हैं। इसी प्रकार के बुद्ध स्य उदाहरण प्रामिकतों सिद्धान्त के प्रश्मास में दिये गये हैं।

जपर्युक्त उदाहरण में डिपद बटन का माध्य,

भौर प्रसरण,

दिपद घटन का श्रभिलक्षण फसन

= 172

डिपद बटन का अभिनक्षण पनाः मूत्र (5.56) द्वारः निमा शकार ज्ञान कर सनते हैं।

$$E (e^{ilr}) = \sum_{r=0}^{n} {n \choose r} p^{r} q^{n-r} e^{itr} \qquad \dots \{6.4\}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {n \choose r} (pe^{it})^{r} q^{n-r}$$

$$= (q+pe^{it})^{n} \qquad \dots \{6.4\}$$

प्रमेस 6.1 : ब्रिट \mathbf{r}_1 भोर \mathbf{r}_2 दो स्वतन्त चर है दो द्विपद बटन ना पासन वरते है भौर इनके प्राचल तमक: $\{p, \mathbf{r}_2\}$ व $\{p, \mathbf{r}_2\}$ है, तो $\{r_1 + r_2\}$ वा बटन भी द्विपद बटन होना है।

प्रमाण वर (r, +r,) ना समिस्साण प्रसन

$$\label{eq:point_eq} \begin{split} & \leftrightarrow \left(t \right) \approx E \left\{ \begin{array}{l} e^{it(r_1 + r_2)} \\ & = E \left(e^{itr_1} \right) e^{itr_2} \right\} = E \left(e^{itr_1} \right) E \left(e^{itr_2} \right) \\ & = \left(pe^{it} + q \right)^{n_1} \left(pe^{it} + q \right)^{n_2} \\ & = \left(pe^{it} + q \right)^{n_1 + n_2} \end{split}$$

दार्थीणर-१९ व्यन्तक द्विपर बटन का व्यन्तिनक्षण फनन है जिसके कि प्राचल p मीर (n₁-ү-n₂) हैं।

बरनुली प्रनेय

माना p ररोक्षणों में p सफलनाएँ होनी है और एक परीक्षण में सम्पन्ता की प्राधिकता p है भी सनुपात $\frac{p}{p}$ और इसके माध्य p का सन्तर एवं सनारम्क सम्यणु मंच्या व में स्थित p होंगे की प्राधिकता पूर्व की स्थेर प्रकृत होंगे है जबकि p सनम्ब की स्थेर प्रकृत होता है। स्पर्यन्

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{r}{n}-p\right| > \epsilon\right) = 0 \qquad \dots (6.5)$$

्न प्रमेष को क्या प्रकार समझ सबने हैं। यदि एक परीक्ष्य को समान परिन्यितियों में बहुत बार, माना n बार, बचे और उनमें र सरसतामें प्राप्त हों तो घनुपात र सनभग p के स्थान होता है जबकि एक परीक्षण से सरसता की प्राधियता p है।

ब्राघूर्ण जनक फलन

दिपद बटन ने लिए घाषुणे जनर पत्रन निम्न प्रसार ज्ञान कर सबने हैं

$$M(t) = \sum_{r=0}^{n} e^{tr} {n \choose r} p^{r} q^{n-r} \qquad \dots (66)$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {n \choose r} (pe^{t})^{r} q^{n-r}$$

$$= (pe^{t} + q)^{n} \qquad \dots (67)$$

(67) में $(p^{\frac{1}{2}} + q)^{3}$ ना एवं बार, दो बार, k बार ध्यवस्थन नरने, ग्रीर रंगा मान सूर्य स्थवर त्रमय सायूज u'_{1} , u_{2} , u_{3} , ..., u_{k} ज्ञान रिये जा सन्ते हैं। जीने

$$\frac{d}{dt} M (t) = \frac{d}{dt} (pe^t + q)^n$$

$$= n (pe^t + q)^{n-1} pe^t$$

t=0 र स्ने पर,

$$\begin{array}{l} \text{pr} \ \ \text{if} \ \ \text{qr}, \\ \text{pr} \ \ \text{qr} \ \ \text{pr} \\ \text{pr} \ \ \text{qr} \ \ \text{qr} \\ \text{dt} \ \left\{ p + q = 1, \, e^0 = 1 \right\} \\ \\ \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \left\{ M(t) \right\} \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d}{dt} M(t) \right\} \\ \\ = \frac{d}{dt} \left\{ npc^t \left(pc^t + q \right)^{n-1} \right\} \\ \\ \\ = npc^t (pc^t + q)^{n-1} + n(n-1) \, pc^t \left(pc^t + q \right)^{n-2} pc^t \\ \end{array}$$

t=0 रमन पर.

$$F'_{2} = np+n (n-1) p^{2}$$

$$= np+n^{2} p^{2}-np^{2}$$

$$= np+n^{2} p^{2}-np (1-q)$$

$$= np+n^{2}p^{2}-np+npq$$

$$= n^{2}p^{2}+npq(69)$$

हम जानते हैं कि,

$$\mu_{2} = \mu'_{2} - \mu'_{1}^{2}$$

$$\therefore \quad \mu_{2} = n^{2} p^{2} + npq - (np)^{2}$$

$$= npq \qquad (6.10)$$

इसी प्रकार

$$q = \operatorname{spq}(q - p) = \dots(6.11)$$

भीर

$$\mu_3 = npq (q - p)$$
(6.11)
 $\mu_4 = npq \{1+3 (n-2)pq \}$ (6.12)

भ्रायश्यकता पटने पर किसी भी भ्रन्य उच्च कम के भ्रायूर्ण पाठक स्वयं ज्ञात कर सकते हैं।

प्वासों-बंटन

यदि एक याद्र ज्ञिक चर X का प्रायिकता बटन इस प्रकार है कि,

$$P(X \in r) = \frac{e^{-m} \cdot m^r}{r!} \dots (6.13)$$

(जहाँ m एक धनात्मक सचर मान है धौर r=0, 1, 2, 3,) है तो चर X को प्यासो बटित चर कहा जाता है।

एक डिपट बंटन में, जिसके प्राचल (n,p) हैं, घर के मान r धारण करने की प्रायिक्ता $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} p^T q^{n-T}$ हैं।

यदि np=m हो और n मत्यधिक बृहत् हो तो यह प्रायिकता लगभग

होगी । इस तथ्य को निम्न प्रकार सिद्ध कर सकते हैं :-

सूत्र (62) के भनुसार n प्रयोगों में r सफलताओं की प्राधिकता P, निम्न है :-

$$P_{r} = {n \choose r} p^{r} q^{n-r}$$

$$= {n \choose r} \left(\frac{m}{n}\right)^{r} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{n-r} \qquad \left\{\begin{array}{c} \therefore q = 1 - p \\ \text{with } p = \frac{m}{n} \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{ll} \overline{q} & P_r = \frac{n(n-1)(n-2)....(n-r+1)}{r!} \left(\frac{m}{n}\right)^r \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{-r} \\ & = \frac{m^r}{r!} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right).....\left(1 - \frac{r-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{m}{n}\right)^r} \end{array}$$

$$=\frac{m^r}{r!}$$
 e^{-m} जट n $\to \infty$

यहाँ र का मान कोई पूर्ण संख्या 0, 1, 2, 3, हो सकता है। अन किसी याहन्द्रिक चर X के प्राधिकता फलन,

$$P(X=r) = \frac{e^{-m} m^r}{r!}$$

जविक ा≔0, 1, 2, ...

नी प्वामी-बटन फ्लान कहन हैं। यह एन असवत बटन है जिसमें परीक्षणों की सम्या बहुत वडी होनी है और इस सरया की प्रपेक्षा में सुफनताओं की सरया बहुत कम होती है। इस बटन की विशेषता यह है कि इसका एक ही प्रावक है। इस बटन का माध्य एव प्रसरण समान होता है। यहाँ इस बटन का माध्य व प्रसरण मा है। प्यासों बटन के कुछ उदाहरण निम्नाकित हैं—

- एक सहर मे घोडे के लात मारने से मृतको की संस्था।
 - 2 100 बालवेयरिंगों के प्रत्येक डिब्बे में दोषपूर्ण बालवेयरिंगों की सल्या ।
 - 3 किसी टकत किये हुए पृष्ठ मे टकन के कारण प्रशुद्धियों की सस्या, मादि।

प्यासों-बंटन का प्रभिलक्षण फलन

प्वासी-बटन का ग्रमिलक्षण फलन निम्न प्रकार है —

$$\phi_{r}(t) = E(e^{tr})$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} e^{tr} \frac{e^{-m} m^{r}}{r!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(me^{tt}\right)^{r} e^{-m}}{r!}$$

$$= e^{me^{tt}} e^{-m}$$

$$= e^{m(e^{tt} - 1)} \dots (614)$$

इसी प्रकार व्यासो-बटन का धायूर्व जनक पनन,

$$M_r(t) = E(c^b)$$

= $e^{m(c^t - 1)}$ (615)

है। इस भ्रापूर्ण जनक फलन का के सम्बन्ध में एक बार धवत्रलन वरकेt≕ 0 रमने पर पहलामापूर्ण झात हो जाताहै।

$$\frac{d}{dt}\ M(t)\ = \frac{d}{dt}\left\{e^{m\left(e^{t}-1\right)}\right\}$$

$$= {}_{e}m(e^{t}-1)$$
 met $t=0$ रखते गर, " $\mu'_{1}=m$ (616)

फलन M (t) का दो बार अवकलन करके t=0 रखने पर दूसरा आधूर्ण μ'_2 ज्ञान हो जाता है।

$$\begin{split} \frac{d^3}{dt^2} \left\{ \ M \ (t) \ \right\} &= \frac{d}{dt} \left\{ \ _{me}t \ _{e}m \ \left(e^t - 1 \right) \ \right\} \\ &= me^t \ _{e}m \left(e^t - 1 \right) + me^t \ _{e}m \left(e^t - 1 \right) me^t \end{split}$$

t=0 रखने पर.

$$m'_2 \approx m + m^2$$

इसलिए प्वासी-बटन का प्रसरण श्रयांत् दूमरा माध्य का परित बाधुणं,

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

$$= m + m^2 - m^2 = m \qquad(6.17)$$

म्रत (616) भ्रीर (617) द्वारा सिद्ध होता है कि प्वासा-बटन का माध्य व प्रक्षरण एक समान होता है। दिये हुए प्वासो-बटन के लिए इसका मान m है।

इसी प्रकार K att M (t) या ग्रावनलन करने t=0 त्व कर k बौ श्रापूर्ण ज्ञात किया जा सकता है जबकि k=1,2,3,

प्रमेस 62 यदि X_1 और X_2 दो स्वतन्त्र वर है विनवर बटन, व्यामो बटन है और प्राचन कमस m_1 व m_2 हैं तो (X_1+X_2) वर बटन और प्वासो-बटन होगा है जिसका प्राचन (m_1+m_2) है।

प्रमाण $(X_1 + X_2)$ का ग्राभिलक्षण फलन

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{A}}^{T} \left\{ \begin{array}{l} e^{i\mathbf{t} \left(\mathbf{X}_{1} + \mathbf{X}_{2} \right)} \right\} &= \mathbf{E} \left(\begin{array}{l} e^{i\mathbf{t}\mathbf{X}_{1}} & e^{i\mathbf{t}\mathbf{X}_{2}} \right) \\ &= \mathbf{E} \left(\begin{array}{l} e^{i\mathbf{t}\mathbf{X}_{1}} \right) \mathbf{E} \left(\begin{array}{l} e^{i\mathbf{t}\mathbf{X}_{2}} \right) \\ &= e^{m_{1}}(e^{t} - 1) & e^{m_{2}}(e^{t} - 1) \\ &= e^{\left(m_{1} + m_{2} \right) \left(e^{t} - 1 \right)} \end{aligned}$$

उपर्युत्त ग्राभिक्षसण फ्लन, प्वासों-बटन का ग्रामिनक्षण फ्लन है जिसवा प्रापल (m_1+m_2) है। ग्रान (X_1+X_2) का बटन, प्वासो-बटन है ग्रोर इसके प्राचल (m_1+m_2) है।

ऋणारमक द्विपद संटन

यह एक विषेष प्रकार का बदन है जिसका प्रयोग मुस्यत उद्योगों से उत्पादित बस्तुमों के सम्बन्ध में होता है। मान सीजिये प्रयोग में कुल परीक्षण (x+x) किये गये हैं जिनमें x सफलताएँ हैं धर्माव परीक्षण तबकक करते रहते हैं जबक कि x सफलताएँ प्राप्त में हो जाये माना कि एक सफलता को प्रार्थिकता p है और (x+x) परीक्षणों में x सफलतामों की प्रार्थिकता p (x) है। (x-1) और उदी सफलता की सिम्मिलत प्रार्थिकता, होनों सफलतामों की प्रार्थिकता के गुणक्क के समान होती है ब्योकि सब परीक्षण स्वतन हैं। सत दिवद बटन की सहायका है

$$P[X=r] = \begin{pmatrix} x+r-1 \\ r-1 \end{pmatrix} p & q \cdot p \\ = \begin{pmatrix} x+r-1 \\ x \end{pmatrix} p \cdot q &(6.18)$$

जब कि x=0, 1, 2, भौर r>0, 0<p< 1

शत x के समस्त सम्भव मानो के लिए प्राधिकता,

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(x) = \sum_{x=0}^{\infty} {x+r-1 \choose x} pq^{x}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} {x+r-1 \choose x} pq \dots \dots (6181)$$

$$= 1$$

$$\left\{ {\cdot \cdot \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}} \right\}$$

(618) द्वारा दिये गये बटन को ऋणात्मक द्विपद घटन कहते हैं। इस बटन का

साध्य $\frac{rq}{p}$ भीर प्रसरण $\frac{rq}{p^2}$ है। हम जानते हैं कि

$$p = \begin{cases} x+r-1 \\ r-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+r-1 \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow (x+r-1) \cdot (x+r-2) \cdot ...(r+1) \cdot (r) \\ x \mid x \end{cases}$$

$$\text{wht} \quad {r \choose x} = {r \choose x} \cdot {r-1 \choose x} \cdot {r-2 \choose x} \cdot {r-x+1 \choose x} \\ \Rightarrow {r \choose x} \cdot {r \choose x} \cdot {r-x+1 \choose x} \cdot {r-x+1 \choose x} \\ \Rightarrow {r \choose x} \cdot {r \choose x-1} \cdot {r-x+1 \choose x}$$

(6 18) हारा,

$$P(x) = \begin{pmatrix} -x \\ x \end{pmatrix} p^{T} (-1)^{X} q^{X}$$

$$= \begin{pmatrix} -x \\ -x \end{pmatrix} p^{T} (-q)^{X} \dots (619)$$

(6 19) द्वारा निरूपित बटन को पास्कल बटन (Pascal's distribution) भी पहते हैं। इस बटन के दो प्राचल p व : हैं।

यदि पास्कल-बटन में र⇔ी रख दिया जाय तो

$$P(x) = {\binom{-1}{x}} p(-q)^x \dots (620)$$

जद कि X=O, 1, 2, 3, (6 20) द्वारा दिये गये बटन को गुणोत्तर बटन कहते हैं।

टिप्पणी: प्राय यह जानने की उत्कंठा होनी है कि (6 19) हारा दिये गये बटन को ऋणात्मक दियद बटन वयो बहते हैं ? इसका कारण यह है कि दियद बटन मे F (x=r), (q+p) का (r+1) वाँ पद होता है और उपर्युक्त बटन मे प्रायिनता P(x), $(Q+P)^{-1}$ as (x+1) at $a \in \mathbb{R}$ and $a \in \mathbb{R}$ and $a \in \mathbb{R}$ and $a \in \mathbb{R}$

है। साय ही Q+P=1

(Q+P)- = (x+1) at qc

$$= \begin{pmatrix} x \\ -t \end{pmatrix} Q^{X} P^{T-X}$$

$$= \begin{pmatrix} -t \\ x \end{pmatrix} Q^{X} P^{T-X}$$

$$= \begin{pmatrix} -t \\ x \end{pmatrix} Q^{X} P^{T-X}$$

भत (x-l-1) वाँ पद भीर (6 19) सर्वसम है।

(Q+P) की पात - है अत उपर्युक्त बटन की ऋणात्मन द्विपद बटन कहते हैं। ग्रतिगणोत्तर खंटन

माना कि एक बैसे मे n गेंदें हैं भीर इनमे से n, सफेद गेंदें हैं भीर n, काली गेंदें हैं !

 $n=n_1+n_2$ इस धैले में से र गेंदें बिना प्रतिस्थापन के बैले को हिलाने के परचात निकासी

जाती हैं।

माना कि \mathbf{r} में से \mathbf{x} मकेद गुँद होने की प्राधिकता $\mathbf{P}\left(\mathbf{x}\right)$ है । इस प्रकार चयनकृत गेंदों में से $\left(\mathbf{r}-\mathbf{x}\right)$ कार्ने रग की गेंदें होगी । यदा प्राधिकना

$$P(x) = \frac{\binom{n_1}{x} \binom{n_2}{y-x}}{\binom{n_1}{x}} \dots (6.21)$$

जब कि x = 0, 1, 2,₹

प्राधिकता बटन फलन के लिए.

$$\begin{array}{c}
r\\ x = 0 \\
x = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
r\\ x = 0 \\
x = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
r\\ x = 0
\end{array}$$

(6.21) द्वारा निरूपित बटन को प्रतिगुणोत्तर बटन कहने हैं शहस बटन का

माध्य
$$=\frac{n_{\uparrow}f}{n}$$

धीर

प्रमरण =
$$\frac{n_1 n_2 r (n-r)}{n^2 (n-1)}$$

प्रश्तावली

- द्विपद वटन के मुख्य गुण बताइये।
- 2 प्यासी-बटन गौर द्विपद बटन का बन्तर स्पष्ट रूप से बताइये 1
- 3 यदि X₁ मीर X₂ दो बार्टाब्युट स्वतन्त्र वर हैं वो कि प्वारोाचिटत हैं मीर इतके प्रावस कमत्र λ₁ मीर λ₂ हैं, तो निढ करो कि (X₁+X₂) का बटन भी प्यासो-यटन है जिनका प्रावस (λ₂+λ₂) है।
- 4. यदि p बृहत् हो भीर p शस्प हो, ती सिद्ध की निये कि डिपद बटन

$$P\left(r\right) = {n \choose r} p q$$
 पासी-बटन की धोर प्रवृत्त होता है।

- प्यासी-बटन के शून्य के पारित प्रवम तथा दिनीय शायूर्ण जात कीजिये ।
- एक द्विपद बटन का साध्य 18 और प्रसरण 6 है तो n, p व q के मान परिकतित की निमें।
- प्लासंन्यटन का प्रश्नित्सण फनन ज्ञान कीजिये ।
- 8 दिगढ बटन भीर ऋणात्मक द्विपद बटन का भन्नर स्पष्ट वीजिये ।

- 9 झापूर्य जनित फलन किस प्रकार से जात विये जाते हैं और इनका बटन फलनो के लिए क्या महत्व हैं? विस्तार पूर्वक बताइये ।
 10. तीन प्रव्रतिन समलत बटनो के नाम बताइये और प्रत्येक का एक उदाहरण
- दीजिये। 11. किसी ग्रसतत बटन का स्वरूप विन बातो पर निर्मर रहता है? इसका उल्लेख
- कीजिये ! 12. यदि प्रभीर मृक्षमणः प्यासो-बटन के साध्य धौर केन्द्रीय ग्वां घापूर्ण हैं तो

 यदि A भौर म, कमण. प्यासो-बटन के मान्य भौर केन्द्रीय उर्दा मापूर्ण हैं तं निम्न माद्रुत्ति-सवय को ज्ञात कीजिये ।

$$\mu_{r+1} = r\lambda \mu_{r-1} + \lambda \frac{d}{d\lambda} \mu_r$$

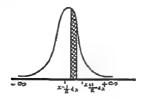
भौर eta_1 तथा eta_2 भी ज्ञात कीजिये।

(एस॰ ए॰ पटना, 1956)

एक प्रत्यणु घन्तराल $(x - \frac{1}{2} dx)$ भीर $(x + \frac{1}{2} dx)$ मे एक सतत चर X के विचर मानो के होने वी प्राधिकता (() निम्न सम्बन्ध के बनुसार होती है -

$$\lim_{dx\to 0} \frac{P(x - \frac{1}{2}dx < X < x + \frac{1}{2}dx)}{dx} = f(x) \qquad(7.1)$$

फलन f (x) (dx) को प्राधिकता धनत्व फलन कहते हैं। इसी प्राधिकता को चित्र (7-1) मे दिखाया गया है।



चित्र 7-1 रेलाच्छादिस क्षेत्र जो P (x - 1 dx < X < x + 1 dx) का प्रदर्शित करता है।

f (x) dx को प्राधिकता अवकल (probability differential) रहते हैं। सत्तत वक y=f(x) को प्राधितता पनत्य वक नहते हैं। चर X की सीमाएँ प्राप्त प्रयाद -∞ < X < ∞ मानी जाती हैं। यदि चर X की सीमाएँ परिमित हो तो भी चर X की सीमाएँ धनन्त भान सनते हैं । ऐसी दशा ने यह सभिधारणा रखनी होती है कि प्रायरता धनस्य फलन निर्धारित शीमाधी के बाहर शुन्य है । इसी बात की गणितीय भाषा में निम्न प्रकार कह सकते हैं -

माना कि चर X की सीमाएँ (a, b) हैं तो प्राधिकता वनस्य कसन (x) निम्न

प्रकार दिया जा सकता है -

f (x)=0, अविक x<a या x>b

f(x) == ∳(x), जहाँ ∳(x), सीमासा a व b मे प्राधिकता यनस्य फलन है।

शतत घटनी का सैदान्तिक विवरण सध्याय 5 में दिया जा चुका है। यहाँ केवल सतत इटन दिये गये हैं।

प्रसामान्य बंटन

यदि रिसी घर X के बटन का प्रतिवरना घनत्व फलन निम्न प्रकार का हो तो उसे प्रमामान्य चर कहते है और उसके बटन को प्रसामान्य बटन कहते हैं।

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \dots (72)$$

जहाँ $\sigma > 0$ स्रीर ν दो स्रवर हैं। यह सिद्ध किया जा सकता है वि $(7\ 2)$ में बटन को सिस्स ν स्रीर सानक विचलन σ है। इस बटन को N (ν,σ) से सूचित करते हैं।

यदि $\mu = 0$ और $\sigma = 1$ हो तो समोकरण (72) का रूप निम्नावित हो जाता है –

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \dots (73)$$

इस स्थिति मे चर X नो मानन प्रसामान्य विचर (standard normal variate) नहते हैं। मानन प्रशासान्य बटन फना और चनत्व कपन नी साराज्यां बनायां जा जुकी हैं। यदि X एन N (μ , σ) चर है जीर हम उसने अचर मानो x_1 चौर x_2 ने बीच होने की प्रायिकता सात नरना चानते है तो

$$P(x_1 < X < x_2) = P\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= F\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{\mu_2 - \mu}{\sigma}\right) \qquad ...(74)$$

यह सिद्ध विया जा सकता है कि यदि $X{\sim}N$ (μ , σ) है तो $\frac{(X-\mu)}{\sigma}$ मानक प्रसा-

मान्य विचर होगा। इसने बटन फलन की सारणियाँ बनायी जा चुकी हैं मीर हम $P\left(x, \leqslant X \leqslant x_{2}\right)$ जात कर सकते हैं।

माना कि
$$Z = \frac{x - \mu}{g} \xi$$
, नहां $Z \sim N(0, 1)$.. (75)

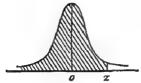
कार्ल पियसँन द्वारा दी गयी सार्यों से 0 और Z पर कोटियों के बीच का सेत्रफल शात किया जा सकता है। यही क्षेत्रफल एक घटना की प्राधिकता या कुत्त कर प्रमुपात बताता है। यदि इस सेत्रफन की 100 से गुणा करते तो एककी या आधा का 0 से Z के बीच प्रतिशत शत हो जाता है। यानक विचर के उपयोग की निम्न उदाहरण द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

उबाहरण 7.1 हाई स्तूल नी परीक्षा म एन शहर के विद्यापियों के प्राप्त सको पा भाष्य 228 और मानक विचलन 36 है, जहा पूर्णीकों नी सस्या 500 हैं। यदि यह करना नी गयी है कि सना का बटन प्रसामान्य है तो शात करना है कि कितने प्रतिक्षत विद्यार्थियों के प्रप्तोक (1) 350 से क्या हैं (2) 165 से क्या हैं (3) 240 से 299 तक हैं (4) 300 से स्राधक हैं (5) 150 से 250 तक हैं।

(1) सूत्र (7 5) के धनुसार इस स्थिति म

$$Z = \frac{350 - 229}{36} = 339$$

सारणी द्वारा छ से 2 तब का क्षेत्रफल शांत कर निया जो कि 0 4997 है।



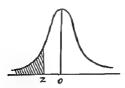
चित्र 7-2 रेलाच्छादित क्षेत्र जी P (Z<3 39) को प्रदर्शित करता है।

यहाँ वित्र (7-2) में दिलाये गये रेलाच्छादित भाग का क्षेत्रस्य मात्रस्य भतुपात को प्ररक्षित करता है। इस भाग का क्षेत्रकल≔0 5 ∔0 4997

मतः 350 से रम मक पाने वाले विद्यार्थिया र* प्रतिसर्≃=0 9997 × 100 ==99 97

(2) इस स्थिति म

$$Z = \frac{165 - 228}{36}$$



चित्र (7-3) रेलाण्डारित सेंद को P (Z<-175) को प्रदक्षित करता है।

चित्र (7.3) म दिये गये रेलाच्छादित क्षेत्र को झात करने के लिए पहले 🛭 से 1.75 तक का क्षेत्र ज्ञात करके, फिर 0.5 में से इस क्षेत्र को घटा देना चाहिए जिससे मावस्यक क्षेत्रफल ज्ञात हो जाता है।

0 से 1 75 तक वा क्षेत्रफल=0·4599

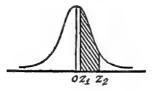
अत रेखाकित क्षेत्र=0 5 - 0 4599= 0411

यत विद्यार्थियो का प्रतिशत=0 411×100=4 11

(3) इस स्थिति में Z ने दो मान ज्ञात किये गये हैं। इन Z माना के बीच वा क्षेत्र ही भावश्यक क्षेत्र है जैना कि चित्र (7-4) में दिलाया गया है।

$$Z_1 = \frac{240 - 228}{36} = 333$$

$$Z_2 = \frac{299 - 228}{36} = 197$$

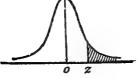


वित्र 7-4 रेखाच्छादित क्षेत्र जो P (333 € Z € 197) को प्रदक्षित करता है।

0 से Z₂ तक का क्षेत्रफल == 0 4756

0 से Z₁ तक का क्षेत्रफल= 1293

प्रत Z_1 की दीव का क्षेत्रफल =0 4756 − 0 1293 = 3463 भ्रत: विद्यापियों का प्रतिप्रत =0 3463 \times 100 = 34 63



वित्र 7-5 रेसाच्छादित क्षेत्र जा P (Z>20) को प्रदर्शित नरता है।

(4) इस स्थिति मे

$$Z = \frac{300 - 228}{36} = 2.0$$

Ⅱ से Z तक का क्षेत्रफल = 0 4772

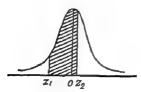
चित्र (7-5) के मनुमार रैलाक्टरादिन भाग का क्षेत्रकल = 0 5 - 0 4772 = 0 0228 यत प्रतिमत्ति विद्यासिया की सस्वा = 0 0228 × 100

=228

(5) इस स्थिति मे Z ने दो मान ज्ञात करने होते है । यहाँ

$$Z_1 = \frac{150 - 228}{36} = -217$$

$$Z_2 = \frac{250 - 228}{36} = 0.61$$



चित्र 7.6 रैलाच्छादित क्षेत्र जो P (-2 17 < Z < 0 61) को प्रदर्शित करता है।

0 से Z, तक का क्षेत्र≔0 4850

ध से द, तक का क्षेत्र=0 2291

चित्र (7.6) के बनुसार Z_1 धीर Z_2 के बीच का रेखाकित क्षेत्र = 4850+0 0291 =0 7141

धन प्रतिज्ञन विद्यार्थियो की सस्याः == 0 7141 × 100

≈7f 4f

टिप्पणी सीट दिसी प्रशास प्रतिकत सक्यान पूछार, प्राविकता पूछी गयी हो सो इन भागो का क्षेत्रफन ही प्राविकता को निर्दाष्त करना है सर्पात् इन सक्याधा को 100 से गुणा करने की सावक्यकता नहीं है। प्रसामान्य बंटन के लिए माध्य के परित श्राधूण

सतत बटन के लिए माध्य के परित Kवां आधूर्ण सूत्र (5 47.1) द्वारा जात कर सकते हैं।

स्यिति 1 : यदि K एक सम सस्या है,

प्रवांत् K=2r, जहाँ r=1, 2, 3,.... ...है तो निम्न व्यजक का समाकतन करके Kवाँ प्रापूर्ण ज्ञात कर सकते हैं।

$$\mu_{2r} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^{2r} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2} dx \qquad(7.6)$$

(7 6) का समाकतन करने पर निम्न सम्बन्ध प्राप्त होता है। पाठक चाहे तो स्वय समाक्तन करके इस सम्बन्ध की पुष्टि कर सकते हैं।

$$\mu_{2r} = (2r - 1) e^2 \mu_{2r-2}$$
 (7.7)

मतः प्रेरण विधि द्वारा,

$$\mu_{2r-2} = (2r-3) \sigma^2 \mu_{2r-4}$$
(7.8)

समीकरण (7.7) मे । । 21-2 का मान रखने पर,

$$\mu_{2r} = (2r - 1)(2r - 3) \sigma^4 \mu_{2r-4} \dots (7.9)$$

इसी प्रकार निरन्तर प्रेरण विधि द्वारा,

$$\mu_{gr} = (2r-1)(2r-3)(2r-5)....3\cdot 1 s^{2r}$$
(7.10) π को विभिन्न मान 1, 2, 3,.... सादि देकर कोई सा भी सम कम का स्नामूर्ण शांत कर

ा को विभिन्न मान 1, 2, 3, आदि देकर काई सा शासम कम क सकते हैं।

$$\mu_4 = 3\sigma^4$$
 অৰ $r=2$

$$\mu_6 = 15 \sigma^6$$
 जब $r=3$

भादि ।

प्रसामान्य वक के लिए ककुदता-गुणाक 3 के बरावर होता है। इस तथ्य को यहाँ प्रापृणों की सहायता से सिद्ध किया जा सकता है।

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

$$= \frac{3\sigma^4}{(\sigma^2)^2}$$

$$= 3$$

स्थिति 2 · यदि K एक विधम संस्था है,

है, जहाँ \mathbf{r} =0, 1, 2, 3, है तो निम्न समाकलन इस्टा \mathbf{K} वौ मापूर्ण $\boldsymbol{\mu}_{gr+1}$ शात कर सबते हैं ।

$$\mu_{2r+1} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^{2r+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2} dx \dots (711)$$

यदि x - म - Z का प्रतिस्थापन करदें तो उपर्युक्त समावसन का रूप निम्न हो

जाता है :--

$$\mu_{\text{grel}} = \frac{g^{2r+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z^{2r+1} dZ \qquad(7.111)$$

(7.11.1) द्वारा दिये गये समावतन से Z का फलन क्षिपस है। धन इस समावतन का सान कृत्य है।

$$\mu_{y+1} = 0$$
, with $t = 1, 2, 3, ...$

....

इससे सिद्ध होता है कि असामान्य बटन के विषय तम के साध्य के परिल सब सामूर्ण सूच्य के बराबर होते हैं।

प्रसामान्य बंटन का अभिलक्षण फलन

माना कि चर $X \sim N(\mu, \sigma)$ है। ब्रध्याय S में दी नयी परिशया के धमुनार मिमलक्षण फलन,

$$\phi_{x}(t) = E(e^{hx})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^{2}}(x-\mu)^{2}} dx \dots (712)$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - \frac{1}{2\sigma^{2}}(x-\mu)^{2}dx} \dots (7121)$$

प्रतिस्पापन $\frac{x-\mu}{\sigma} = Z$ का प्रयोग करने (7 12 1) का गमाकसन करने पर प्रभिनदाण पसन ϕ_{α} (1) ज्ञात हो जाता है जो कि जिन्न प्रकार है :---

$$\phi_x(t) = e^{\left(it \ \mu - \frac{\pi}{2} \ t^2 \ \sigma^2\right)}$$
 (7 13)

यदि $X \sim N$ (0, 1) है बर्यान् $\mu = 0$ और $\sigma = 1$ है तो प्रसामान्य बटन का स्त्रभिलक्षण फलन,

$$\phi_x(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$
 ...(7 13 1)

प्राप्त हो जाता है।

प्रमेख 1 यदि स्वतन्त्र एव बाहिन्छन चरा X धौर Y के योग ना बटन प्रमामान्य है तो चर X धौर Y भो प्रतग-प्रतग प्रमामान्य न्य में बटिन होते हैं । यहां प्रमेय को सिद्ध मही किया गया है ।

मापताकार बंदन

एक याहिष्टर चर X का बटन धायनावार कहा जाना है यदि इसका धारम्बारता फलन धन्तराल (a-h,a+h) से सर्वेद $\frac{I}{2h}$ के समान होता है धीर इस धन्तराल के बाहर सून्य होता है। घर प्रायिकता प्रनान

f(x) =
$$\frac{1}{(a+h) - (a-h)} = \frac{1}{2h}$$
(7.14)
= 0, सन्यपा
जवहि (a-h)

 $\frac{1}{2h}$ (a-h) (a+h)

वित्र 7-7 मायताकार बटन

इम बटन का माध्य a धीर प्रमरण $\frac{h^2}{3}$ के बराबर होना है। घर के रेजीय स्पान्नरण a हारा बटन के विचरण विस्तार को किसी भी भन्नराल में परिवर्तित किया जा सकता है। उदाहरण के लिए घर,

$$U = \frac{X - a + h}{2h}$$

ग्रन्तराल (0, 1) में एक समान रूप से बटित है । इस स्थिति में,

षोशो-बंटन

एक घर 🗴 के लिए कीशी-यदन का बारम्बारा। यसन.

$$f(x) = \frac{1}{\pi \alpha} \frac{1}{1 + \left(\frac{x - \mu}{\alpha}\right)^2} \dots (7.15)$$

पहां -∞ < र< ∞

द्वारादिया जाताहै।

इस पणन में μ ग्रीर α दो प्राचल हैं बंदि μ =0 ग्रीर α =1 हो तो वारम्बारता पलन,

$$f(x) = \frac{1}{\pi (1+x^2)} \qquad(7.151)$$

होता है।

इस बटन का चाभिलक्षण पलनः

$$\phi_x(t) \approx e^{\mu_1 t - \alpha |t|}$$

$$\pi e^{t} \quad \alpha > 0$$
....(7.16)

होता है।

नोती-सटन एल-कटुननीय है छोर सिन्दु x=+ ने परित नम है। भ इम बटन नी माध्यिना प्रोर बहुतन है। इस बटन से निसी भी धायून ना प्रस्तित्व नही है। इसके निम्न व उच्च चतुर्वन (+-a) व (++a) होने है धोर प्रधे प्रत्वचनुर्वन परिगर a कै समान है।

काई-धर्ग चंदन

यह यहन मध्यम हैलमहें (Helmert) भीर बाले विवर्शन (Karl Pearson) ने दिया। यदि X एक यहन्तिम चर N (0, 1) है ता X2 वा बारम्वारण पाना,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}$$
 ...(7.17)

होता है।

$$u)_{\zeta} \quad f(x) = 0 \qquad \qquad \forall x \in \mathcal{C}$$

X² वे बटा का स्थितशण पत्तन,

$$\phi_x(t) = (1-2it)^{-\frac{1}{2}}$$
(7 18)

बाना कि n स्वतन्त्र याहन्छित चर $X_1, X_2, X_3,, X_n$ हैं जिनमे से प्रत्येक N (0,1) विटित है तो घर,

(7 18) द्वारा हम जानते हैं कि प्रत्येव X,2 के बटन का प्रश्नितक्षण पनन

$$(1-2it)^{-\frac{1}{3}}$$

है। X2 के बटन का अभिलक्षण फलन निम्न बकार ज्ञात कर सकते हैं।

$$\begin{split} \phi\left(t\right) &= E\left(\begin{array}{c} e^{it}X^{2} \end{array} \right) \\ &= E\left\{ e^{it} \left(X_{1}^{2} + X_{2}^{2} + + X_{n}^{2}\right) \right\} \\ &= E\left(\begin{array}{c} e^{it}X_{1}^{2} \end{array} \right) E\left(\begin{array}{c} e^{it}X_{2}^{2} \end{array} \right) E\left(\begin{array}{c} e^{it}X_{n}^{2} \end{array} \right) ... E\left(e^{it}X_{n}^{2} \right) \\ &= \left(1 - 2it\right)^{-\frac{n}{2}} & \cdots (7.19) \end{split}$$

(7.19) द्वारा दिये गये फलन $(1-2\pi)^{\frac{n}{2}}$ को χ^2 जटन का मिनललण फलन कहते हैं।

गामा-बंटन

यदि क्ति पर X के बटन का बारम्बारता फलन निम्नलिखित हो, तो उसे गामा बटन कहते हैं।

$$f(x,\alpha,\beta) = \frac{\alpha^{\beta}}{|\beta|} x^{\beta-1} e^{-\alpha x} \dots (7.20)$$

जबकि x>0

== 0 जबनि x<0

जहाँ a>0, $\beta>0$ बटन के दो प्रापल हैं। इस बटन का अभिलक्षण फलन,

$$\phi_{x}(t) = \left(1 - \frac{\pi}{\alpha}\right)^{-\beta} \qquad \dots (721)$$

है। यदि इस भ्रभिनक्षण फलन मे

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ with } \beta \Rightarrow \frac{n}{2}$$

समान हो तो चिमलक्षण पलन का रूप निम्नोक्ति हो जाता है ---

$$\phi_x(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}}$$
(7 21 1)

(7 21 1) द्वारा यह निष्मर्थ विकलता है कि χ^2 का बारम्बारता करूर वही होगा जो

$$n = \frac{1}{2}$$
 where $\beta = \frac{n}{2}$

होते पर भागा बटन के लिए है। यत समीकरण (7 20) से

$$a = \frac{1}{2}$$
, $\beta = \frac{n}{2}$

भौर म ने स्थान पर X² रसने पर X²-बटन का बादिकता घनस्य करून कात हो जाता है जो कि निम्निसितित है —

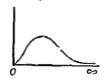
$$f_n(x^2) \approx \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \left| \frac{n}{2} \right|} (x^2)^{\frac{n}{2} - 1} e^{-\frac{x^2}{2}} \dots (7.22)$$

== 0 मन्यया

 X^2 -बंदन के एक मात्र प्राचल n को उस बदन की स्वतंत्रवा-नीर्टि (degrees of freedom) कहते हैं।

काई-वर्ष बंदन बक

स्वतन्तता कोटि 6 या इससे स्रधिक होने की स्थित से χ^2 -कटन के कार्म्यारता वज्ञ का रूप चित्र (7-8) से दिखाया गया है।

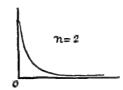


चित्र 7-8 वार्धियमंबटन यर जब n>6

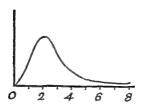
सह कत्र X—सद्यापर 0 ते ∞ तक्ष विचरता है धौर इसका कोई भी भाग ऋणि भतुषौत से नही होताहै। X²–वटन के कारस्वारता कक कारूव n के सान पर निर्मर

1. स्रतन्त्रज्ञा-कोटि का वर्णन बहराय 9 वे दिला तरा है। वने वहाँ पहिरे हैं

रहता है। यदि n=2 हो तो वक का रूप वित्र (7-9) और n=4 या 5 होने की स्थिति में वक का रूप वित्र (7-10) में दिखाया गया है।



वित्र 7-9 वाई-वर्गबटन वक जब n=2



चित्र 7-10 काई-वर्ग बटन वक जब n=4 या 5

काई-वर्ग बंटन के भागूर्ण

x²-वटन का शूर्य के परित L वा श्रापूर्ण मा तिस्न होता है।

$$\mu_{k}^{s} = \frac{2^{k} \left[\frac{n}{2} + k \right]}{\left[\frac{n}{2} \right]} \dots (7.23)$$

सम्बन्ध (7.23) में k के मान 1, 2, 3, रखने पर ४²-बटन के पहले, दूसरे, तीमरे तम के सापूर्ण ज्ञात हैं। यहाँ नेवल प्रथम दो सापूर्ण दिये गये हैं।

$$F_1' = \frac{2 \cdot \left[\frac{n}{2} + 1 \right]}{\left[\frac{n}{2} \right]} = n \qquad(7.23.1)$$

$$\mu'_{3} = \frac{2^{2} \sqrt{\frac{n}{2} + 2}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} = (n+2) n \dots (7 23 2)$$

पत X3 वर प्रसरण F. निष्न प्रवाद ज्ञात वर सकते हैं --

$$\mu_2 = \mu_3^{\ \ \prime} \sim (\mu_1^{\ \prime})^2$$

$$= (n+2) \ n \sim n^2 = 2n \qquad(7 \ 23 \ 3)$$

गरे न्द्रीय काई-वर्ग बंटन

यदि $X_1, X_2, X_3, ..., X_k$ स्वतन्त्र चर हैं, जहाँ X_i वा बटन N (μ_i , 1) है (i=1, 2, 3,, k) तो चर

$$U = \sum_{i=1}^{k} X_i^{a}$$

के बटन का पनरव पलन निम्न होता है —

$$f_u(u) \approx \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{(\beta)!} \frac{r^{\beta}}{2^{\frac{k}{2}+\beta}} \frac{1}{\left[\frac{\beta+\frac{k}{2}-1}{\beta+\frac{k}{2}}\right]} e^{-\frac{u}{2}}$$

जबिट 0<∪<∞

(7 24) में k प्रकामान्य चरो की सस्या है और

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{k}{3} \mu_1^2$$

है। इस बटन को घनेन्द्रीय काई-वर्षबटन कहते हैं। क्रे और कहल बटन के प्राप्तन हैं। क्रुको घनेन्द्रीयता प्रापल कहते हैं।

यदि 🕆 = 0 हो तो उपर्युतः बटन वेग्द्रीय वाई बगें बटन वे सर्वसम हो जाता है ! (7 24) द्वारा दिये गये U वे बटन वा प्रापृत्तं जनक चनन,

$$\sum_{R=0}^{\infty} \frac{e^{-r} r^{B}}{B!} (1-2t)^{-\left(\frac{k}{2}+\beta\right)} \dots (725)$$

है। टिप्पणी र ने विभिन्न मानों ने लिए मिल एवनित हिन्स (Mess Evelyn Fix) ने मनेन्द्रीय बाई वर्ग कटा ने लिए लारणियाँ बनायों। वे नारणियाँ वैनियोनिया विश्व-विद्यालय भेग द्वारा 1949 से प्रवाणित हुई हैं। स्ट्डेन्ट का ध-बंटन

यह बटत सर्वप्रथम डब्नू एस गासेट (W S Gosset) ने 1908 में दिया था। माना कि U म्रोर U_1 , U_2 , U_3 , U_n , (n+1) स्वनन्त्र यादिच्छन चर हैं। इनमें से प्रत्येक का बटन प्रसामान्य है भीर इनने प्राचन्त्र $(0, \sigma)$ हैं।

माना कि,

$$V = \sqrt{\frac{1}{n}} \frac{n}{\Sigma} U_i^2 \qquad(7.26)$$

यहाँ केवल घनारमक वर्गमूल ही लिया गया है।

चर U को चर । कहते हैं।

$$t = \frac{U}{V} = \frac{U}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{n}{x} \cdot U_i^2}} \qquad(727)$$

१ का बटन फलन,

$$F(t) = P(t \le x)$$

$$= P\left(\frac{U}{V} \le x\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\sqrt{\frac{(n+1)}{2}}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}} dt ...(728)$$

व्यजन (7 28) में t बटन की स्वतन्त्रता की कोटियाँ n है ! t सा वारम्बारना फलन

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\sqrt{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \dots (729)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

को β (1/2, 2/2) में भी मूचित किया जाता है।

इस बटन के प्राचस n का उसकी स्वतन्त्रता-कोटि कहते हैं।

जबिक n=1, 2, 3,...

ध्यटन का मध्य $\bar{0}$ है ग्रीर n>2 वे लिए प्रसरण $\frac{n}{n-2}$ है।

टिप्पणी यदि चरा U_1 , U_2 , U_3 , ... U_n का प्रश्नरण समान न हो तो उस स्थित में प्रत्येत्र चर को उसके तदनुमार मानन विचलन से भाग दे देना चाहिये। इन प्रकार क्यान्तिरित परा का प्रमास ! वे समान होया प्रयान् क्यान्तिरित परो के सिए $\sigma = 1$ हो जायेगा।

साधारणतया । बटन को निम्न प्रवार से समक्ष सबसे हैं। माना कि एक सामान्य समग्र, जिनका मान्य म श्रीर प्रगरण σ^2 है, से से Ω परिवाल के एवं श्रीतदर्श का चयन विचा गया है और श्रीतदर्श प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ हैं इन श्रीतदर्श द्वारा परिकालित मान्य X भीर मानव विचलन S हो तो परिकालन मान्य X भीर मानव विचलन S हो तो परिकालन मान्य X

$$t = \frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{\overline{n}}}{\epsilon} \qquad ...(7.30)$$

हाता है।

घर t का बारभ्यारण फलन (7 29) हारा दिया गया है। यदि व बृहत् हो तो घर स्वा बटन प्रसारात्य हो जाता है।

1-घंटन के गण

- (क) ।—सटन का सारम्बारता वक एक-सहस्तव है और विन्दु 0 के परित समिमत है।
- (ग) k<n में लिए k वौ कापूर्ण विशित होता है धर्षीत् यदि u>2 हो तो मानक विचलन भीर उच्च त्रम ने कापूर्ण विशित होते हैं !
- (ग) १-वटन समझित होने वे वारण इसवे सभी विषय त्रम के सामूर्ण शून्य होते हैं। सत यदि 2r+1<n हो तो Pass=0
- (प) यह सिद्ध रिया जा सबता है वि

$$\mu_2 = \frac{n}{n-2}$$
 with $\mu_4 = \frac{3n^2}{(n-2)(n-4)}$

(इ) 1 स्वतन्त्रतर बोटि का १-बटन कीशी बटन होता है।

मनेन्द्रीय ।-यटन

मंद X भौर U बाहिन्छन चर हा जिनम से $X \sim N\left(D, \sigma\right)$ भौर चर U नेन्द्रीय χ_{σ}^{0} मंदित हो तो भनुभात

का बटन ग्रवेन्द्रीय t-बटन बहलाता है जिसकी स्वतन्त्रता-बोटि ॥ है भौर ग्रवेन्द्रीय प्राचल D है जो वि गुरुव नही है। धनुपात

का प्रायिकता घनरव फलन f (t) निम्नाक्ति होता है .--

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} e^{-\frac{D^2}{2\sigma^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{D^2}{2n\sigma^2}\right)^k \frac{1}{k! \beta\left(\frac{n}{2}, k + \frac{1}{2}\right)} \frac{t^{2k}}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} + k + \frac{1}{2}} \dots (7.31)$$

टिप्पणी : मकेन्द्रीय बटन के लिए जी जे. रेनीकाफ (G. J. Renikoff) मीर जी. जे. लिबरमैन (G J Liberman) ने सर्वप्रथम व्यापक सारणी दी भौर इसे स्टेनफोड विश्व-विद्यालय ने 1957 में प्रकाशित किया।

F-riza

माना कि स्वतन्त्र एव प्रसामान्य ($n_1 + n_2$) याद्दच्छिक चर U_1 , U_2 , $U_2, \dots U_{n+1}$

भीर Yr. Var Yarm, Yes हैं जिनमें से प्रत्येक के प्राचल (0, e) हैं।

$$\xi = \sum_{i=1}^{n_1} U_i^2$$
 मोर $\eta = \sum_{j=1}^{n_2} V_j^2$

£ मौर η के मनुपात के बटन को F_{P1m2} (ξ/4) द्वारा निरूपित करते हैं या इसे केवल F-बटन कहते हैं। स्पष्ट है कि £ और ग अलग-अलग €2×2 बटन का पालन करते हैं। इसका मित्राय है कि दो X2 चरों के मनुपात का बटन P होता है।

माना कि

$$w = \underbrace{\frac{\xi}{\eta} n_1}_{\eta n_2} = \underbrace{\frac{1}{\eta} \frac{U_l^2}{\eta_1}}_{n_2} \dots (7.32)$$

$$= \underbrace{\frac{\xi}{\eta} n_2}_{\eta n_2} = \underbrace{\frac{1}{\eta} \frac{V_l^3}{\eta_3}}_{\eta n_3}$$

 ξ घोर ग स्वतत्र एव धवारमत हैं यह w>0 है। यहाँ ξ व ग त्रमस $\chi^2_{n_1}$ σ^2 व $\chi^2_{n_2}$ σ^2 यहित हैं यह यह सिद्ध शिया जा मरना है हि w का बटन Σ —उटन होता है। यह बटन ξ घोर ग ने धनग असग बारम्बारता एसता में समान से ते गुजनकर ने समान होता है जोवि प्रसमिवाधा ग>0 धौर $0 \le \xi \le \eta w$ ढारा दिये गये प्रक्षेत्र (domain) पर परिमादित है।

व्यवहार में F-बटन का प्रयोग दो प्रसरका के अनुवात के लिए होता है। अब इसी को सेक्ट F-बटन का वर्णन दिया गया है।

प्रमेख 2 प्रति एवं समग्र N (μ, σ) हो धौर उससे सिए गये प्रतिदर्श प्रेराण X_1, X_2, X_3 , X_n हा बंदन प्रतिदर्श को साध्य X धौर प्रसरण s^2 हो, सो कर $\frac{(n-1)}{s^2}$ का बटन χ^2 होना है जिसकी क्वतवना-नोटियाँ (n-1) हैं।

माना कि दो समग्रो से, जिनने प्रसरण समान हैं, परिमाण $a_1 \equiv a_2$ के प्रतिदशों ना चयन दिया गया है। इन प्रतिदशों के प्रसरण जमय $a_1^2 \equiv a_2^2$ हैं।

(7.32) के लिए दिय वर्णन के आधार पर प्रमय 2 के उपयोग से निम्नांक्ति सम्बन्ध दिया जा सकता है :---

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} F_{\nu_1} \quad \nu_2 = \frac{\nu_1 \, s_1^2 / \sigma^2}{\nu_2 \, s_2^2 / \sigma^2} = \frac{\chi^2}{\nu_2} \dots ... (7 \, 33)$$

$$\forall \xi_1^2 \, n_1 - 1 = \nu_1 \, \text{with} \, n_2 - 1 = \nu_2$$

उपर्युक्त सम्बन्ध से स्लब्द है कि दो बाई वर्गी का सनुपान 1-बदित है। यह अनुपात, माना x, एक बीटा चर है और इसका चनरव फलन निम्न होता है —

$$f(x) dx = \frac{x^{p-1}(1+x)^{-p-q}}{\beta(p,q)} dx$$
(734)

$$agt p = \frac{y_1}{2}, q = \frac{y_2}{2}$$

धौर 0<1<∞

धत Fका धनस्व पतन (7 34) की सहायना से,

$$f(x) dx = g(F) \frac{\nu_1}{\nu_2} dF$$

$$\therefore g(F) dF = \frac{\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}F_{(\nu_1,\nu_2)}\right)^{p-1} \left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}F_{(\nu_1,\nu_2)}\right)^{-(p+q)}}{\beta(p,q)} \frac{\nu_1}{\nu_2} dF$$

$$= \frac{\left(\frac{\nu_{1}}{\nu_{2}}\right)^{p} F_{(\nu_{1}, \nu_{2})}^{p-1}}{\beta (p, q) \left(1 + \frac{\nu_{1}}{\nu_{2}} F_{(\nu_{1}, \nu_{2})}\right)^{p+q}} dF$$

$$= \frac{\left(\frac{\nu_{1}}{\nu_{2}}\right)^{\nu_{1}/2} F^{\nu_{1}/2 - 1}}{(\nu_{1}, \nu_{2})}$$

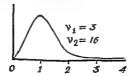
$$= \frac{\beta \left(\frac{\nu_{1}}{2}, \frac{\nu_{2}}{2}\right) \left(1 + \frac{\nu_{1}}{\nu_{2}} F_{(\nu_{1}, \nu_{2})}\right)^{\frac{\nu_{1} + \nu_{2}}{2}}}{2}$$

🛂 व 🛂 को F बटन को स्वतंत्रता कोटि वहते हैं।

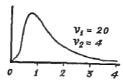
F-बंटन के गुण

- (प) F का मान कदापि ऋषास्मक नहीं हो सकता क्योंकि प्रशः व हर में प्रमरण सर्देव धनास्मक सन्याएँ हैं। धत. इनका अनुपात भी धनास्मक हो होता है।
- (ब) F-बटन एक धनारमक-विषम बटन है।
- (स) प्रिनिदर्श F—बटन वक का उच्चतम बिन्दु F— $\frac{n_2}{n_1} (n_2 + 2)$ पर स्थित होता है $\frac{n_2}{n_1} = \frac{n_2}{n_2}$ पर स्थित होता है। स्पष्टतः माध्य सर्वेदा 1 से

nू − 2 कुछ बडा होता है। विभिन्न स्वतत्रताकोटिंगे के लिए दो Fवको के रूप चित्र (7-11) भौर (7-12) में दिलाये असे हैं।



विष 7-11 F-वटन वक जब मा=3, म=16.



দিল 7-12 F-ৰবন বক সৰ ৮₁=20, ৮₂=4

भकेन्द्रीय F-संटन

सनेन्द्रीय F, एव शंकेन्द्रीय X² भीर एवं स्वतन व नेन्द्रीय X² वे सनुशन ने समान होता है। माना वि इनकी स्वतवा त्र वोटियाँ कमल № सीर ४₂ है और पाना कि प्रदेन्द्रीय नार्ड-वर्ग X₁² से सौर नेन्द्रीय कार्ड वर्ग X₂² से प्रदेशित किये गये हैं, सी सरेन्द्रीय F विचर निम्नावित होता है।

$$F_1 = \frac{\chi_1^2/\nu_1}{\chi_2^2/\nu_2}$$
 (7.35)

यहाँ प्रदेशक्तीय F को F_1 हारा निरुचित रिया गया है जिनही स्व० ता० ν_1 व ν_2 है। χ_1^2 —दश्त का प्रदेशीय प्राप्त τ हे जबित τ एक धनारमक प्रवर मान है और χ_2^2 का बश्त (7.22) के प्रमुगार है। प्रत χ_1^2 व χ_2^2 का सम्पितन बरन, दोनों प्रदर्श के गुणनपत के समान है बशीन χ_1^2 व χ_2^2 क्वतत्र है। गम्मितित बरन का χ_2^2 के सम्बन्ध प्रे प्रशिक्ष ममानसन वपने, $\frac{\nu_2 X_1^2}{\nu_1 X_2^2}$ के स्थान वर F_1 का प्रतिस्थापन करने पर F_1 का प्राप्त प्रदेश के सात है। प्रत F_2 का प्राप्त प्रत्य प्रता प्रदेश का है। प्रत F_2 का प्राप्त प्रता प्रता प्रदा प्रदेश के स्थान है। प्रत F_2 का प्राप्त प्रदा प्रदा प्रदा है।

$$f(F_1) = \frac{e^{-\tau}}{\left|\left(\frac{\nu_2}{2}\right)^{\beta}\right|^{2}} \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{\tau^{\beta} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} + \beta}{\beta^{\frac{\nu_1}{2}} + \beta^{\frac{\nu_1}{2}} + \beta^{-1}} \frac{F_1^{\frac{\nu_1}{2}} + \beta^{-1}}{\left|\left(\frac{\nu_1}{2} + \beta\right) \left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2} F_1\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}} + \beta} \dots (7.36)$$

$$= \frac{\pi \sqrt{\pi}}{\pi \sqrt{\pi}} \left(\frac{\nu_1}{2} + \beta\right) \left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2} F_1\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}} + \beta \dots (7.36)$$

फिशर का Z-खंटन

Z-बटन के लिए फिशर ने माना कि

$$Z = \frac{1}{3} \log_6 \frac{s_1^2}{s_3^2} = \frac{1}{3} \log_6 F$$
 (7 37)

या F=e^{2Z}(7.37.1)

मत (7 35) के मिके स्थान पर e 2Z रलने पर फिशर का Z बटन झात ही जाता है । इसिलए Z का प्रायिकता थनत्व फलन

$$f(Z) dZ = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} - \frac{1}{\beta\left(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right)} - \frac{\left(e^{2Z}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} - 1}{\left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}e^{2Z}\right)^{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}}} 2e^{2Z} dz$$

$$2e^{2z}dz=dF1$$

$$f(Z)=2\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\frac{y_1}{2}} \frac{\frac{y_1+y_2}{y_1+y_2}}{\frac{y_2}{2\frac{y_2}{2}} \left(1+\frac{y_1}{y_2}e^{2Z}\right)^{\frac{y_1+y_2}{2}}} \dots (7.38.1)$$

बटन F सौर e^{2z} के तिए दिवे यये फलनो से कोई मूल बन्तर नहीं है। यह एक हो बटन के दो रूप हैं। इसी कारण F या e^{2z} बटन के तिए एक ही प्रायिकता सारणो दी आती है।

बोटा-बंटन

माना कि

$$\theta = \frac{w}{1+w} = \frac{\xi}{\xi+\eta} \qquad \dots (7.39)$$

जदकि w का मान (7.32) द्वारा दिया गया है। ∂ की सीमाऐं0 से 1 हैं मर्पात् 0 < ∮ < 1 पत् 🛭 दा बारम्बारता पलन,

यत व का बटन पनन.

$$P(\theta < x) = P\left(w < \frac{x}{1-x}\right) = F_{y_1, y_2}\left(\frac{x}{1-x}\right) = (740)$$

भीर ह का बारम्बारता फलन निम्नाहित है -

$$f(\theta) = \frac{1}{(1-x)^2} f_{(\nu_1, \nu_2)} \left(\frac{x}{1-x} \right) \dots (741)$$

$$\frac{\sqrt{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}} \quad \frac{\nu_2}{2} + 1 \quad \frac{\nu_2}{2} - 1}{\frac{\nu_1}{2} \mid \frac{\nu_2}{2} \mid \frac{\nu_2}{2}} \quad x \quad (1 - x) \quad \dots (7.41.1)$$

$$=\beta\left(x, \frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right)$$
 (7.41.2)

बयोक्ति हम जानते हैं कि,

$$\beta(m, n) = \int_{0}^{1} x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \sqrt{\frac{m \cdot n}{m+n}}$$

बीटा-बटन का ध्वां प्राधूर्ण

परिभाषा के अनुसार,

$$\mu'_{k} = \int_{0}^{1} x^{k} \frac{\frac{y_{1} + y_{2}}{2} \frac{y_{1}}{2} - 1}{\frac{y_{2}}{2} \frac{y_{2}}{2} - 1} dx \qquad \dots (7.42)$$

$$\frac{y_{k} - y_{k}}{2} \frac{y_{1} - y_{k}}{2} \frac{y_{1} - y_{k}}{2} \frac{y_{1} - y_{k}}{2} + k \qquad \dots (7.42.1)$$

व्यञ्चक (7.42 १) मे k के विभिन्न मान रक्षने पर विभिन्न मापूर्ण बात हो जाते हैं। भव k⇒ी हो हो,

$$F_{1}' = \frac{\frac{y_{1} + y_{2}}{2} \frac{y_{1}}{|2| + 1}}{\frac{y_{1} + y_{2}}{2} + 1} = \frac{y_{1}/2}{(y_{1} + y_{2}) 2} \qquad \dots (7.43)$$

$$\forall \forall \mathbf{x} \ \mathbf{k} = 2 \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}} \mathbf{x} \mathbf{x},$$

$$F_{2}' = \frac{\frac{y_{1} + y_{2}}{2} \frac{y_{1}}{2} + 2}{\frac{y_{1}}{2} \frac{y_{1} + y_{2}}{2} + 2}$$

$$= \frac{\left(\frac{y_{1}}{2} + 1\right) \left(\frac{y_{1}}{2}\right)}{\left(\frac{y_{1} + y_{2}}{2} + 1\right) \left(\frac{y_{1} + y_{2}}{2}\right)}$$

$$= \frac{y_{1} \left(y_{1} + 2\right)}{\left(y_{1} + y_{2}\right) \left(y_{2} + y_{2} + 2\right)} \qquad \dots (7.44)$$

सत बीटा बटन का प्रसङ्ख्य.

$$\mu_{2} = \mu_{2}' - \mu_{1}'^{2}$$

$$= \frac{\nu_{1} (\nu_{1} + 2)}{(\nu_{1} + \nu_{2}) (\nu_{1} + \nu_{2} + 2)} - \frac{\nu_{1}^{2}}{(\nu_{1} + \nu_{2})^{2}}$$

$$= \frac{2 \nu_{1} \nu_{2}}{(\nu_{1} + \nu_{2})^{2} (\nu_{1} + \nu_{2} + 2)} \quad(7.45)$$

इसी प्रकार दिसी भी कम के बाधूणे जात दिये जा सकते है।

Z. F. t भीर x2 में सम्बन्ध

ये सब प्रतिदर्भन एक दूनरे से निम्न हैं और इनका प्रयोग परिस्थितियों के सनुसार होता है। किन्तु कुछ विशेष परिस्थितियों में ये एक दूसरे से सम्बन्धित हो जाते हैं। इन सबका विवरण इस प्रध्याय में दिया जा चुका है यत यहाँ इनमें नेवल सम्बन्ध हो के विषय में बताया गया है।

मदि विभिन्न सार्यक्ता स्तरो के लिए Z-सारमी दी गयी हो तो F का मान झात कर सकते हैं मीर मदि F-सारणी उपलब्ध हो तो Z का मान झात कर सकते हैं।

$$t_{p_2} = \sqrt{F_{(1, p_2)}}$$
(7.47)

जब रि प्रतिदर्भन र नी स्व॰ नी॰ \mathscr{D}_2 है और F नी स्व॰ नो॰ $(1,\mathscr{D}_2)$ है। यहाँ भी यदि एन प्रतिदर्भन ना सारणीवद्ध मान शांत हो तो प्रत्य ना मान (7.47) भी सहायता से जात नर मनते हैं। यहाँ यह नान ध्यान देने योग्य है कि F में प्रक्ष (प्रतरण या χ^2) भी स्व॰ नो॰ 1 हो होना चाहिए, प्रचांत् $\mathscr{D}_1 = 1$

$$t^2_{\infty} = \chi_1^2$$
 ... (7.48)

यहाँ 1^2 वी स्व० को ∞ और X^2 की स्व० को ∞ 1 है इस गुण के कारण इस दोनों को एक ही प्राप्त में दिसाया जा सकता है। X^2 के बात F-सारणी हारा भी प्राप्त किये जा सपते हैं। ν_2 — ∞ स्व० को ∞ के लिए F के बात को ग्रज की स्व० को ∞ न सुणा करते से X^2 का बात बात हो जाता है।

श्रम सारियकी

माना नि एक सतित बटन वाले समग्र के से एक n परिसाण ने प्रतिवर्ध मा चयन किया गया है मीर प्रतिवर्ध प्रेशण X_1 , X_2 , X_3 ,..., X_n है। मानानि X को बारम्वारता प्रजन $\{x\}$ है जो नि सीमाओ n व b से x ने निमी सान के लिए बनारत्त है स्पर्शेष $a \le x \le b$. यदि प्रेशण X, से से सबसे एंद्रेट पेशण को y_2 से, उसने बाद उसते करें को y_2 ,...पीर सबसे बटे प्रेश को y_3 है। इसी के लिए पित नि से से से प्रतिवर्ध से प्रत

प्रमेष 1 : यदि yz, yz yz ... y, त्रमित प्रेक्षण हैं तो दन्तरा सस्मितित बटन,

f $(y_1, y_2, y_3...y_n) = n$ if (y_1) f (y_2) f (y_3) ... f (y_n) (7 49) जब रि f (y_1) , f (y_2) , f (y_3) , ..., f (y_n) जसस्य $y_1, y_2, y_3,...$..., y_n दे बार-स्वारता एतत हैं।

प्रमेव 2 : क्रमित प्रेक्षणी y2, y2, y3 ... ya मे मे व्हें प्रथण y1 का उपान बटन पत्तन,

$$f_{i}(y_{i}) = n^{1} \frac{\left\{1 - F(y_{i})\right\}^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\left\{F(y_{i})\right\}^{1-1}}{(i-1)!} f(y_{i}) \dots (7.50)$$

जब कि ि (१,), प्रांवा बटन पानन हैं भीर ि(प्रा), प्रांवा वारम्यास्ता पत्तन हैं।

प्रमेख 3 : त्रम साध्यवत्री मे y_1 स्वीर y_1 कर मध्यानिक वरस्वरका करन I_1 (Y_1,Y_2) विस्त होता है जब वि 1 < 3

$$f_{(i)}(x_i, y_i) = \frac{\prod_{j=1}^{i} (x_i, y_i)}{(i-1)! (i-1)! (i-1)! (i-1)!} [\Gamma(y_i)]^{i-1} \times$$

 $[F(y_i) - F(y_i)]^{1-1-1} \times [1 - F(y_i)]^{n-j} f(y_i) f(y_i)$ (751) $\# \text{Re} 4 : \# \text{Re} \text{Re} \text{Re} \text{Re} (y_n - y_j) \in \# \text{Re} \text{Re} \text{Per} \text{Re} \text$ माना कि $y_1 = U$ भीर $y_n = y_1 + R = U + R$ तो उपांत बंटन f(R), निम्नाकित होता है :—

$$f(R) = \int_{a}^{b-R} \frac{n!}{(n-2)!} [F(R+U) - (F)]^{n-2} \times f(U) f(R+U) dU \qquad(7.52)$$

प्रसेय 5: माना कि समय से एक n परिमाण के प्रतिदर्श $X_1, X_2, X_3,...X_n$) का खयन किया गया है धोर L_1 ($X_1, X_2, X_3,...X_n$) क तिया गया है धोर L_1 द्वारा प्रकार है कि L_1 द्वारा प्रकार तिया (L_1, L_2) में समय के एक निश्चित प्रतिशत का होना प्रत्याशित है, तो L_2 व L_2 को सहिष्णुता सीमाएँ कहते हैं। इन सहिष्णुता सीमाधो पर बारम्बारता फलन f(X) के रूप का कोई प्रभाव नहीं पदता।

माना कि
$$L_1(X_1, X_2, X_3...X_n) = y_1$$

भौर $L_2(X_1, X_2, X_3...X_n) = y_n$

तो y_2 भौर y_n के बीच में प्रेक्षणों का कम से कम α अनुपात होने की प्रायिकता $oldsymbol{eta}$ निम्न सम्बन्ध से ज्ञात कर सकते हैं।

$$P\left\{ (y_1 < X < y_n) > \alpha \right\} = \beta$$
 (7.53)

सूत्र (7·51) की सहायता से, y₁ व y₂ का सम्मिलित बारम्बारता फलन,

$$f_{1n}(y_1, y_n) = \frac{n!}{(n-2)!} \left[F(y_n) - F(y_1) \right]^{n-2} f(y_n)f(y_1)$$
 (7.54)

সৱা a < y₁ < y₀ < b

यदि रूपान्तरण $F(y_1)=Z_1$, $F(y_n)=Z_n$ कर दिया जाय

तो जैकोबियन
$$J = \frac{1}{f(y_1) f(y_n)}$$

घोर
$$f(Z_1, Z_n) = \frac{n!}{n(n-2)!} (Z_n - Z_1)^{n-2}$$
 (7.54.1)

जहाँ $0 < Z_1 < Z_n < 1$

ग्रन्थया $f(Z_1, Z_n) = 0$

फिर रूपान्तरण $\mathbf{Z_n} \!\!-\!\! \mathbf{Z_1} \!\!=\!\! \mathbf{p}$ ग्रीर $\mathbf{Z_1} \!\!=\!\! \mathbf{m_1}$ कर दें तो, जैकोत्रियन $\mathbf{J} \!\!=\!\! \mathbf{1}$

मोर
$$f(m_1, p) = n(n-1)p^{n-2}$$
 (7 54 2)

p का उपांत बटन,

$$\begin{split} f(p) &= \int_{0}^{1-p} f(m_1, p) dm_1 \\ &= \int_{0}^{1-p} n(n-1)p^{n-2} dm_1 \\ &= n(n-1)p^{n-2} \left(m_1 \right)_{0}^{1-p} \end{split}$$

$$= n(n+1)p^{n-2}(1-p)$$
 (7.54.3)

भत (7 54 3) के आधार पर प्रमेथ को निम्न रूप में लिख सकते हैं -

मर्दि भर वा सतत बारम्बारता फलन है और p इस सबय में से एवं n परिमाण के माहिन्द्रित प्रतिदर्शने चएस प्रेशकों के बीच समझ का प्रतुपत है सो p का बारम्बारना

भाषपा f(p)=0

स्पन्नतः (7 53) द्वारा दी गयी प्रायित्वता को सूत्रो (7 54) भीर (7 54 3) की महायता से ज्ञात कर सकते हैं

$$P\{(y_1 < X < y_n) > \alpha\} = \beta$$

$$\text{TI } \mathbb{P}\left[\left\{F(y_n)-F(y_n)\right\}>\alpha\right]=\beta$$

$$P\{(Z_n-Z_1)>a\}=\beta$$

$$P(p>a)=\beta$$

$$\int_{\alpha}^{1} n(n-1)p^{n-2} (1-p) dp = \beta$$

$$n(n-1) \left[\left\{ \begin{array}{c} p^{n-1} \\ n-1 \end{array} \right\}_{\alpha}^{1} - \left\{ \underbrace{p^{n}}_{n} \right\}_{\alpha}^{1} \right] = \beta$$

$$n(n-1) \left[\frac{1}{n-1} - \frac{\alpha^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{\alpha^{n}}{n} \right] = B$$

$$1-na^{n-1} + (n-1)a^n = \beta$$
 (7.55)

n के निम्बत मान ने लिए (7 55) द्वारा प्राप्त प्राधिकता n का फ्लन है मत β के दिये हुए मान ने लिए यह फ्लन नेवल n पर निर्भर है। सामान्य रूप में यह फ्लन n, α फ्रीर β पर निर्भर है जबकि $L_1=y_1$ भीर $L_2=y_n$ (L_1 , L_2) स्वतन्त्र सहिष्णुना सीमाएँ हैं।

उवाहरण 149 :—प्रतिदर्श परिमाण नितना हो, नि प्रनिदर्श के चरम प्रेक्षणो y_1 स्त्रीर y_n ने बीच 90 प्रतिशत समग्र ने घटन होने की प्राधिनता 95 है इसे निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —यहाँ $\alpha = 90$, $\beta = 95$

भ्रानभीकरण (7 55) द्वारा

$$1-n (90)^{n-1} + (r :) (90)^{n} = 55$$

$$(90)^{n} = 05-n (90)^{n-1} + n (90)^{n}$$

$$= 05-n (90)^{n-1} (10)$$

$$(90)^{n} + \frac{n}{10} (90)^{n-1} = 05$$

$$(90)^{n-1} \left\{ 90 + \frac{n}{10} \right\} = 05$$

$$(90)^{n-1} (9+n) = 5$$

$$\therefore 90^{n-1} = \frac{5}{9+n}$$

$$\pi(90)^{n} = \frac{45}{0.10}$$

म का मान जाँच और भूल विधि (Trial and error method) द्वारा पाठक स्वय ज्ञात कर सकते हैं।

कोटियों द्वारा प्रसरण-विश्लेषण

कोटियो द्वारा प्रसरण विक्तेषण अत्यन्त सुष्म है और इसका मुख्य लाग यह है कि इसने सिए प्रेक्षणो का बटन प्रसामान्य मानन या प्रसरणा की सजानीयना के प्रति करवना नहीं करती होनी है इस विधि के अन्तर्यन जोधनों के प्रतिलामा को कोटियो म परिवर्तित कर दिया जाता है और इसके परवाद प्रयोग म सिचे गये प्रेक्षणो का प्रयोग करने गोधनों मे अन्तर के प्रति परिवरणा जो दिवरण के प्रतिलाभ के प

प्रश्नावली

- मंदि X एक सतत घर है जिसका बारम्बारता फलन f(x) है भीर बटन फलन
 F(x) है, तो रेसीय फलन (ax+b) का बटन झात क्षीजिये।
- 2 प्रसायान्य बटन के मुखो का वर्णन की जिये।

- 3 : मप्राचल बटन से माप क्या सममते है ? स्पष्ट कीजिये ।
- 4 : बताइये नि, १-वटन वक्त में भीर प्रसामान्य बटन वक्त में क्या भन्तर होता है ?
- 5 : ितसी बटन के श्रीभासाण फतन से घाप क्या समक्रते हैं ?स्पष्ट कीजिये प्रीर यह भी यताइये वि इनका बटन की इप्टि से क्या महत्व है ?
- विस्ता विन्ही दो बटनो के स्मिलताण फलन एक से हो सकते हैं? उत्तर की पुष्टिं कीजिये।
- 7 · नीचे दिये गये सतत बटन के लिए,

$$\mathrm{d} F {=} \frac{1}{\beta(m,\ n)} \ (1-x)^{m-1} \quad x^{n-1} \ , \, o \, \leqslant \, x \, \leqslant \, 1, m, n {>} o$$

ज्ञात करिये कि,

समान्तर माध्य
$$=\frac{m}{m+n}$$
, हरास्मर माध्य $=\frac{m-1}{m+n-1}$,

मोर प्रसरण =
$$\frac{mn}{(m+n)^2 (m+n+1)}$$

भरवापन कीजिये कि

(भागरा, 1954)

भ्रमेक बार किसी समग्र में बारम्बारता बंटन का मान नहीं होता है परन्तु यदि हम उसमें से एक बृह्द् प्रतिदर्श लें तो प्रतिदर्श माध्य के बटन का सन्निकटन किया जा सकता है। सन्निकटन (approximation) प्रायिकता सिद्धान्त के कुछ प्रमेयो पर भाषारित है जो सीमा प्रमेय कहलाते हैं।

चेबीचेफ ग्रसमिका

माना X एक याहच्छिक चर है, जिसके लिए,

 $E(X)=\mu$ मौर $V(X)=\sigma^2$ है जहाँ, μ मोर σ^2 परिमित हैं, तो एक मऋणारमक राशि k के लिए.

$$P(|X-\mu| > k) < \frac{e^2}{k^2}$$
 (8.1)

प्रमाण : माना कि घर X का प्रायिकता वनत्व फलन f(x) है । तो

$$\sigma^{2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^{2} f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu-k} (x-\mu)^{2} f(x) dx + \int_{\mu-k}^{\mu-k} (x-\mu)^{2} f(x) dx$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^{2} f(x) dx$$
(8.2.1)

 $(8^{\circ}2^{\circ}1)$ में बीच के समाकलन का मान सदैव धनात्मक है तथा प्रथम भीर तृतीय समाकलन में $(x-\mu)^2 > k^2$ है।

$$\therefore \sigma^2 > k^2 \left[\int_{-\infty}^{\mu-k} f(x) dx + \int_{\mu+k}^{\infty} f(x) dx \right]$$

$$> k^2 P(|x-\mu| > k)$$

$$\text{at } P(|X-\mu| > k) < \frac{\sigma^2}{k^2}$$

मत: प्रमेष सिद्ध हमा ।

विभिन्न प्रकार के भ्रभिसरणों की परिभाषा

माना वि {X,,} याटच्छिक वरों का एक धनुकम है।

(क) प्राधिकता-ग्रभिसरण था बुबँतता से ग्रभिसरण

प्रस्पेक • > ० के लिए यदि

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n-C|>\epsilon)=0$$
 (83)

हो तो हम नहते हैं कि मनुक्रम $\{X_n\}$ प्राधिनता में स्थिएंक C की मौर समिष्ठत हो P

रहा है। इसके लिए प्रतीक X₀ → C ना प्रयोग किया जाना है।

(स) सदस या सगमग निश्चित ग्रमिसरण

यदि
$$\lim_{n\to\infty} P(X_n=C)=1$$
 (84)

हो तो इस कहते हैं कि सनुक्रम {Xn} सबस या निश्चित रूप से स्थितंक C की मीर

मिम्नुत होता है। इसके लिए प्रतीर Xn ---→ C का प्रयोग क्या जाता है।

(ग) द्विपात-माध्य अभिसरण

हो तो हम वहते हैं कि अनुजय {X_n} द्विपात मध्य में स्थितक 🗈 की मोर मिस्तुत

यही प्रमुक्त के प्रशिक्षरण के विषय में जामान्य रूप से ही क्यन किया गया है। इसके पूर्ण विवरण या प्रमाण के लिए प्राधिकता सिद्धान्त पर निस्तित पुस्तकों का प्राध्यमन कीजिये।

बृहत् संख्या का नियम

माना कि (X_s) बाहिस्तत करो ना एक सनुत्रम है जिसमें प्रत्येक कर सर्वेसम बटित है भीर उनना मान्य परिमित है।

$$Z_n = \left[\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} - \frac{E(X_1 + X_2 + X_3 \dots + X_n)}{n} \right]$$

स्रोतसरण की भावना ये शून्य की और प्रवृत्त होना है जब n सनन्त की घोर प्रवृत्त होता है।

यदि 2, प्रापिनता में क नी धोर प्रिमृत होता है तो धनुश्य (X,) दुवल दृहत् सस्या

ने नियम को पालन करता हमा कहा जाना है।

यदि 2., प्रायिनता 1 से ० की घोर धामिनृत होता है ता धनुकम {X.,} मबल कृट्य सक्या के नियम का पासन करता हुचा कहा जाना है। जिन परिस्थितिया में ये धामिमरण होने हैं उनका विकरण हुछ नियमों में दिया हुया है जो कृट्यू सक्या के नियम कहलाते हैं।

बहुत संस्था का दुबंल नियम

इस नियम के भ्रन्तगंत (6.3 के धनुसार) यह मिद्ध करना है कि

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \left| \begin{array}{c} X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n \\ n\to\infty \end{array} \right| > \epsilon \right\} = 0 \tag{8.6}$$

जब कि । एक घनात्मक धरमणु जात राशि है।

प्रमाण : यह शहत है कि,

$$E\left(\frac{X_1+X_2+X_3+....+X_n}{n}\right)=E(\overline{X}_n)=\mu$$

with
$$V\left(\frac{X_1+X_2+X_2+....+X_n}{n}\right)=V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$$

नेबीचेफ प्रमेय के मनुसाद,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \left| \frac{X_1+X_2+X_3+....+X_n}{n} - p \right| > \epsilon \right\} < \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \quad (8.7)$$

जब कि ६ एक मत्यणु घनात्मक संस्था है।

मतः प्रमेय सिद्ध हुमा।

यदि यह भी मार्ने कि प्रेक्षण स्वतन्त्र न होकर युग्मतः ग्रसहसंबधित (pairwise uncorrelated) हैं तो भी यह प्रमेय सत्य रहता है वयोकि

$$V\left(\begin{array}{c} X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n \\ n \end{array}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

बृहत् संस्या का सबल नियम

इस नियम को कोलमोगोरक प्रमेव (Kolmogorov theorem) भी कहते हैं। यदि $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ मार्शक्त करो का एक सनुष्म है जियमे प्रत्येक X_1 स्वतन्त्र एव सर्वसम् वेदित है तो $X \triangleq \mu$ को भोर कामल निष्वत रूप ये प्रस्तिन्त होने के लिए यह मारायक भीर पर्याप्त है कि $E(X_i)$ का परित्त है और $E(X_i) = \mu$ है।

इस प्रमेय को यहाँ सिंद नहीं किया गया है बत्रोकि इमके प्रमाण के लिए कुछ प्रावंश्यक विषयों का वर्णन इस पुस्तक के क्षेत्र से बाहर रखा गया है।

विचित-प्रमेय

यह प्रमेय भी बृहत् सच्या के दुवंत नियम में सम्बद्ध है। इसमें और पेवीचेफ प्रमेय में केवल इतनी भिन्नता है कि यदि हम यह न मानें कि याँडिच्छक चर X, वा प्रमरण परिमित है तो भी यह नियम सत्य रहता है। इस प्रमेय में केवल इतनी ही करपना की गयी है कि प्रत्येक पर X_I का बटन सर्वेसम है जिल्लका माध्य ⊯ परिमित है। लिंचिन प्रमेय का प्रकयन इस प्रकार है —

माना कि $X_1, X_2, X_3, ...X_n$ स्वतन्त्र एव सर्वसम n सार्वच्छक चर है भीर इनमे से प्रतिक रका सटन फ्लान F(x) है तथा F(x) ना परिमित मान्य P है ती पर

$$\overline{X}_n = \sum_{i=1}^n X_{i/n}$$
 प्राधिकता में माध्य P की कोर अभिमृत होता है।

केन्द्रीय सीमा प्रमेय

यदि n यारच्छिक चरा का अनुकम $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ है जिसमे प्रत्येक X_1 स्वतन्त्र एव सक्षेतम बटित है सीर

$$E(X_i) = \mu$$

$$V(X_i) = \sigma^2$$

तो सबल या दुर्बल हुइन् सक्या नियम के बनुसार हम जानते हैं कि जैसे $n\to\infty$ तो \overline{X}_n माध्य μ की धोर प्रवृत्त होना है किन्तु इससे \overline{X}_n के बटन के विषय में कोई ज्ञान नहीं होता है।

केन्द्रीय सीमा प्रमेश के अनुसार किसी प्रतिदर्श के माध्य \hat{X}_n का शटन ऐसे प्रशामान्य शटन की प्रोर प्रश्नुत होता है जिसका माध्य P धौर प्रश्नुत $\frac{e^2}{n}$ है, यदि प्रतिदर्श परिमाण \mathbf{n} बहुद हो।

इस प्रमेय में यह बात ब्यान देने योग्य है कि याइण्डिक पर X, के बटन के विषय में पुछ नहीं बहा गया है सर्वात इस चर का बटन दुछ भी हो सरता है। यत यदि n बृह्य हो तो परिमित प्रतरण वाने किसी भी समय से चयनकृत प्रतिरचे का माध्य समिन्नट समायान्यत बटित होता है। इसी कारण बृह्यू प्रतिरची पर आधारित विभिन्न समझो के च्यास प्रकारण्य वटित मान विश् जाते हैं।

द-मॉयवर (De-Moivre) ने बह भी सिद्ध किया कि किसी पर X का बटन कुछ भी हो, n पदो का भोग लगभग प्रसामान्यत बटित होता है, यदि प्र कुट्ट हो !

लिडवर्ग झौर लेबी-प्रमेय

यदि ॥ सार्टिन्द्रक घर $X_1, X_2, X_3,, X_n$ है जो कि स्वतन्त्र एवं सर्वक्रम बिटत हैं भीर $E(X_1) = p$ व $V(X_1) = \sigma^2$ है। यह भी कस्पना की गयो है कि μ व σ^2 का मितरत है तो Z_n का बंटन पसन $F(Z_n)$, प्रधानान्य बटन पसन को मोर प्रदुत होता है यहाँ यारन्यिक घर.

$$Z_{n} = \frac{\sqrt{\pi (X - \ell)}}{\pi} \qquad \dots (8 8)$$

माना कि ϕ (t), घर $(X_1 - \mu)$ का भिनतसर्गिक फलन है। चर $(X_1 - \mu)$ के पहले दो मापूर्ण 0, σ^2 हैं क्योंकि दो मापूर्ण का मस्तित्व है, तो

$$\phi(t) = 1 - \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 + O(t^2) \qquad(8.9)$$

जब कि (8.9) मे पद 0 (t2), t के बर्ग से उध्य कम के पदों को निरूपित करता है

$$\begin{split} Z_n &= \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu) \sqrt{n}}{\sigma} \text{ का प्रश्निसक्षण कराव,} \\ \phi_n (t) &= \left\{ \phi \left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma} \right) \right\}^n \\ &\stackrel{\checkmark}{=} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sigma^2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma} \right)^n + 0 \left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma} \right)^2 \right\}^n \\ &= \left\{ 1 - \frac{1}{2L} t^2 + 0 \left(\frac{t^2}{n\sigma^2} \right) \right\}^n \\ \log \left\{ \phi_n (t) \right\} &= n \log \left\{ 1 - \frac{t^2}{2n} + 0 \left(\frac{t^2}{n\sigma^2} \right) \right\} \\ &\rightarrow -\frac{t^2}{2} \quad \text{evg} \quad n \rightarrow \infty \end{split}$$

2 स्पोंकि $0\left(\frac{t^2}{nc^2}\right) \to 0$ जद $n\to\infty$

$$\vdots \quad \phi_n(t) \rightarrow c \qquad \frac{t^2}{4} \qquad \dots (8.10)$$

r n→∞

हम जानते हैं $e^{-\frac{r}{2}}$ प्रशामान्य बंटन N (0, 1) का धनिसक्षण फलन है। धतः (8.10) से यह निष्कर्ष निकतता है कि Z_n का बंटन फलन $F(Z_n)$, n बृहत् होने की हिपति में प्रशामान्य बंटन F(x) की धीर प्रवृत्त होता है, जबकि

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

 $\lim_{x \to \infty} F(x) = F(x)$...(8,11)

-400

(8.11) द्वारा स्वष्ट है कि X का बंटन संविकट असामान्य बंटन की बीर प्रवृत्त होता है जिसके प्रापल म ग्रीर 🔐 है जबकि n का मान बृह्त् हो ।

सिम्रापुनीय-प्रमेय

मंदि $X_1, X_2, X_3,, X_n$, n बाहण्डिक चरो का एक अनुक्रम है जिसमे $\mathbf{E}(X_i) = \mu_i$ पौर $\mathbf{E}(X_i - \mu_i)^2 = \sigma_i^2 < \infty$ माना कि माध्य के परित तीसरा निरपेश मायूर्ण β3, п के प्रत्येक मान के लिए परिमित है और इसका बस्तित्व है जहाँ,

$$\rho_1^3 = E(|X_1 - \mu_1|)^3$$

मदि सम्बन्ध $\lim_{n\to\infty}\frac{\rho}{\sigma}=0$ सत्य है जर्बार्क

$$\rho^{3} = \rho_{1}^{3} + \rho_{3}^{3} + \dots + \rho_{n}^{3}$$

तो योग 💈 X_। भनन्तस्पर्गत प्रसामान्य होता है जिसका

माव्य #=#1+#2+ ...+#a बोर प्रसरण $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + + \sigma_n^2$ है।

ब्रमेस 8 1 यदि $X_1, X_2, X_3,, X_n$ एक द्विपद अटित चरो का सनुकम है जिनके माध्य व प्रसरण जमज np व npq है तो सिंड करना है कि चर X, सफनतामो की संख्या, का बटन प्रसामान्य बटन की धोर प्रकृत होता है जैसे-जैसे 1 सनन्त की घोर

प्रवृत्त होता है। प्रमाण क्योंकि सभी चर स्वतन्त्र धौर सदसम बटित हैं घौर उनके माध्य एव प्रसरण परिमित हैं, इस तिए यह लिडबर्ग-देवी प्रमेय का ही एक प्रमुप्रयोग है। इसी प्रमेय के

प्रयोग को यहाँ प्रदक्षित किया गया है।

ग्राच्याय में में दिया गया है कि छ परीक्षणों में X सफलताएँ होने की स्थिति में प्रापिकता पस्तत $\binom{n}{X}$ p^{X} q^{n-X} है। इस बटन का समितसागिक फनत

$$\phi (t) = (q + pe^{it})^n \stackrel{?}{\otimes} 1$$

माना कि

$$Z = \frac{X - np}{4 / npq}$$

यदि यह सिद्ध कर दें कि Z का ग्रीमसझणिक फेलन

है, हो प्रमेय सिंह हो जायेगा।

हम जानते हैं कि
$$E(Z) = 0$$
 बौर $V(Z) = 1$ है। यहाँ

$$\phi_{Z}(t) = E\left(\begin{array}{c} e^{itZ} \end{array}\right)$$

$$\forall t \quad \phi_{Z}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{it}(X - np)}{e^{\sqrt{npq}}} \binom{n}{X} p^{X} q^{n-X} \qquad(8 12)$$

$$= e^{-i\sqrt{\frac{pp}{q}}} t \qquad \frac{it}{q + pe^{\sqrt{\frac{p}{npq}}}} t$$

$$= \left[qe^{-i\sqrt{\frac{p}{nq}}} t + e^{\sqrt{\frac{it}{npq}}} - i\sqrt{\frac{p}{nq}} t \right]^n$$

$$= \left[pe^{-it\sqrt{\frac{q}{np}}} + qe^{-it\sqrt{\frac{p}{nq}}} \right]^n$$

$$d_{\mathbf{Z}}(t) = \left[p \left\{ 1 + it \sqrt{\frac{q}{np}} + \frac{1}{2^{1}} \left(it \sqrt{\frac{q}{np}} \right)^{2} + \frac{1}{3^{1}} \left(it \sqrt{\frac{q}{np}} \right)^{3} + ... \right\} \right]$$

$$+q \left\{ 1 - \left(1t \sqrt{\frac{p}{nq}} \right) + \frac{1}{2!} \left(1t \sqrt{\frac{p}{nq}} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left(1t \sqrt{\frac{p}{nq}} \right)^5 + \right\} \right]^n$$

$$= \left[p \left\{ 1 + it \sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2!} t^2 \frac{q}{np} - \frac{it^3}{3!} \frac{q}{n^2} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{q}{2}} + \dots \right\} \right]$$

$$+ q \left\{ 1 - it \sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2!} t^2 - \frac{p}{nq} + \frac{1}{3!} it^3 \left(\frac{p}{nq} \right)^{\frac{1}{2}} + ... \right\}^{\frac{n}{2}}$$

$$=\left[\left(p+q\right)-rac{1}{2n}\,t^2+$$
पद जिनके हर में $n^{rac{3}{2}}$ या उज्बतर पात है $ight]^n$

 $= 1 - \frac{1}{2} t^2 + 4 \pi \sqrt{3} + 4 \pi^{\frac{1}{2}}$ या उज्बंतर मात है

$$\phi_Z(t) \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$$
 (sq. $a \rightarrow \infty$

ान प्रमेग सिद्ध हुमा।

प्रमेस 2 . यदि X एक बाहिन्छक चर है जिसका बंटन 1 स्वतन्त्रता-कोटि के साथ X^2 है घोर प्रभिनक्षणिक पतन $\phi(t) = (1-2\pi t)^{-\frac{1}{2}}$ है तो

$$\xi_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$$

का 🚜 बटन, जिसकी स्वतन्त्रता-कोटि 🗈 है, प्रसामान्य बटन की घोर प्रवृत होता है अब n धनन्त की घोर प्रवृत्त होता है।

प्रमाण उपर्युक्त प्रमेष लिंडवर्ग सेवी प्रमेय का अनुध्योग है। इसी की सहायता से यहाँ प्रमेय को सिद्ध किया थया है।

प्रध्याय 7 में दिया जा चुका है कि X₀2 का समिलकाण फलन

$$\phi(t) = (1-2t) - \frac{n}{2}$$
where $E(\xi_n) = n$ of $V(\xi_n) = 2n$

$$\therefore \text{ where set } \xi = \frac{\xi_n - n}{2}$$

£ का प्रशिलक्षण फलन

$$\psi(t) = \mathbb{E}\left(e^{it\xi}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left\{e^{it\xi}\right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{e^{i(\xi_n - n)}\right\}$$

$$= e^{it}\sqrt{\frac{n}{2}}$$

$$= e^{it}\sqrt{\frac{n}{2}}$$

$$= e^{-it}\sqrt{\frac{n}{2}}$$

 $\log \psi_n(t) = -it \sqrt{\frac{n}{2}} - \frac{n}{2} \left(-it \sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{t^9}{2} \cdot \frac{2}{n} + \, \text{ut fack gt } \tilde{\textbf{u}} \right)$

n ³ या राज्यतर यात है।)

 $m=-it\sqrt{\frac{n}{2}}+it\sqrt{\frac{n}{2}}-\frac{t^2}{2}+$ पद जिनके हुए में $n^{\frac{1}{2}}$ मा उक्बतर

षात 🕻

$$= -\frac{1}{2} t^2 + 0 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix}$$

$$\log \psi_n(t) = -\frac{t^2}{2} \xrightarrow{\eta_n(t) = e} n \rightarrow \infty$$

$$\therefore \psi_n(t) = e$$

— है । * e ु प्रसामान्य बटन का घमिलदाणिक फलन हैं घत ४ * बटन भी प्रसामान्य बटन की भीर प्रवृत्त होता है जबकि प्रक्षकों की सख्या य बृहत् हो ।

प्रस्तावली

- केन्द्रीय सीमा प्रमेय को समम्भावर लिखिए भीर बताइये कि इसे प्रत्यिष्ट महत्वपूर्ण प्रमेय क्यो समम्भा जाता है?
- क्षीमा प्रमेषो ना नया महत्त्व है और इनका सास्थिको मे किस प्रकार प्रयोग होता है?
- 3 यदि X₁, X₂, X₃, ..., X_n व्यासो बटित स्वतन्त्र चरो का झनुत्रम है भीर इनके प्राचल ॿ हैं तो सिद्ध कीजिये कि जब n का मान धनन्त की भीर प्रकृत □

होता है तो Σ X_i ना बटन प्रसामान्य बटन नी स्रोर प्रवृत्त होता है। 1 = 1



किसी प्रतिदर्श का प्रध्यवन समय के प्रति जानकारी के हेनु विया जाता है, न कि स्वय प्रात्त में जानकारी के उद्देश्य से । इस प्रध्यवन में एक ती पित्री परिकटना की परीक्षा को जाती है । इस प्रध्याय में परिकटना—परीक्षा के विषय में जानकारी दी गयी है । विभिन्न परीक्षा में जानक से पूर्व विभिन्न परीक्षा में जानक से पूर्व विभिन्न परीक्षा मों जानकारी की जानना प्रावस्थक है । इस पाटकों की निम्न विवस्ण जाती भीति समक्षता चाहिये।

सांश्यिकीय परिकल्पना

साधारणतया हमको विश्वी भी बटन के प्राथन जात नहीं होते हैं धर्मों समय के विषय में पूर्ण जान नहीं होता है। निन्तु विश्वी विद्वान्त, धनुभव या-सम्य परीदाणों के प्राधार पर यह धनुभान लगाया जाता है कि विश्वी प्राथन का हता थाने होता परिहरे या विश्वी एक से प्रीधार करने के प्राथन के प्राधार पर मह धनुभान लगाया जाता है कि विश्वी सम्बन्ध होना पाहिये। मत प्रापंत प्रता को एक परिलक्ष्यता के व्य के कार्यव करने हैं भी प्रविव ता होता परिहरे भी भी उचित सामको परिहरे का प्राथम करने यह निर्माण करने हैं कि निराय परिका परिकाश का प्रयोग करके यह निश्वित करना होता है कि निराय परिकाश परिकाश का प्रयोग करके यह निश्वित करना होता है कि निराय परिकाश परिकाश का प्रयोग करके यह निश्वी परिकाश निया परिकाश का प्रयोग करने यह कार्य परिकाश कार्य परिकाश करने हैं कि कोई सिद्धान्त, धनुभव या धनुमान जिसको कि विश्वी प्राय प्रत्येष्य के हेतु मान निया जाता है किन्तु भौविश्वीय परिहरूलना से धिमाय विश्वी समय के विषय में या मुक्ततया समय के एन या एक स्वाधिक भी क्षाय म विश्वी विश्वी क्या से हैं वैदे, एक सिक्के भी उद्योग तो हो परिवा के प्राय परिहरूल के परिवा के प्राय परिवा है है। इसी प्रवार एक पास को उसते तो हार करने विश्वी कार करने कि विश्वी के परिवा के प्रीय निया है है। इसी प्रवार एक पासका के स्वाध कार्य हो। इसी प्रवार एक पासका के स्विधी कार्य के तो ता परिवा है है। इसी प्रवार एक पासका के स्विधी कार करने करने कि स्वाधीय के स्वाधी करने के स्वाधी करने करने करने करने कि स्वाधीय करने करने कि स्वधी करने करने प्रवास करने कि स्वाधीय करने के स्वाधीय करने करने स्वाधीय करने स्वाधीय करने स्वाधीय करने स्वाधीय करने स्वाधीय करने स्वाधीय करने स्वधीय करने स्वाधीय करने स्वाधीय करने स्वाधीय करने स्वाधीय करने स्वाधीय करने स्वाधीय स्वाधीय करने स्वाधीय क

परिकल्पना को H द्वारा निक्षित करते हैं। माध्य एव प्रवरण के लिए बुख परिकरपनायों को सामान्य रूप में इस प्रशास दिया जा सहता है .--

> H: $\mu = \mu_0$ (जबकि μ समय माध्य है धीर μ_0 एक रियरांक है जिसका कोई भी मान हो सन्दा है।)

> $H ext{ } \mu < \mu_0 ext{ } \pi_1 ext{ } \mu > \mu_0$ $H ext{ } \mu_1 > \mu_2 ext{ } \pi_1 ext{ } \mu_1 < \mu_3 ext{ } \pi_1 ext{ } ext{ } \pi_1 ext{ } ext{ } \pi_1 ext{ } ext{ } \pi_1 ext{ } ext{ }$

दा $H: \rho_1 = \rho_2$ $H: e^2 = \sigma_0^2$ (जबकि e^2 एक समय का प्रसरण है भीर σ_0^2 एक समय मान है।)

 $H: \ \sigma_1^2 > \sigma_8^2 \ vi \ \sigma_1^2 = \sigma_8^2 \ (जबकि \ \sigma_1^2 \ vi \ \sigma_2^2 \ c) \ (जिल्लाकि \ \sigma_1^2 \ vi \ \sigma_2^2 \ c)$

निराकरणीय परिकल्पना

वित्ती भनुसमानवर्जी के सद्य को प्राय परिकल्पना के रूप में दिया जाता है भीर इस परिकल्पना के विषय में यह निश्चित करता होता है कि इसे स्वीकार किया जाय या नहीं किया जाय। ऐसी परिकल्पना को निराकरणीय परिकल्पना कहते हैं भीर इसे H_0 द्वारा निरुपित करते हैं। निराकरणीय परिकल्पना को दो प्रकार से विभाजित किया गया है—

(क) सरस परिकरणना —एक परिकरणना जो कि सम्बाग्धित कर के बटन प्रस्त का पूर्णतमा उत्सेख करतो है सरस परिकरणना कहलाती है। जैसे परिकरणना H_0 कि एक सिक्स अनिभनत है अर्थ है हेट या टेस माने की प्राधिकता $\frac{1}{6}$ है।

(स) संयुक्त परिकल्पना —प्राय वह निरावरणीय परिवल्पना 'H₀' जो सरल नहीं है सयुक्त परिकल्पना कहनाती है। इसको विस्नावित उदाहरण द्वारा समना जा सकता है —

H, • चर X का बटन प्रसामान्य है।

इस परिकलना में बटन के प्राचलो (माध्य एवं प्रसरण) का कोई उल्लेख नहीं है इस कारण बटन फलन वा उल्लेख पूर्ण नहीं हैं वेदल बटनों के एक समूह का उल्लेख है जिनमें से कोई भी एक प्रेक्षित चरका बटन हों सरता है।

वैकल्पिक परिकल्पना

निराकरणीय परिकल्पना के विपरीत परिकल्पना को वैकल्पिक परिकल्पना कहते हैं और इसे प्राय H_1 या H_A डारा निरूचित किया जाता है। व्यवहार से सदैय निराकरणीय परिलल्पना H_0 की ही परीक्षा को जाती है। वैकल्पिक परिकल्पना किसी प्रयोगकर्ता की प्रमुख्यान परिलल्पना वा विक्रात्मक क्यन (Operational statement) है। प्रतः H_1 जब हक्यन का गठन करता है जिसको कि H_0 के धस्वीकार किया जाता है तो H_1 को कर जिया जाता है तो H_2 को प्रयोगर कर दिया जाता है तो H_1 को प्रयोगर कर दिया जाता है तो H_2 को प्रयोगर कर दिया जाता है तो H_3 को प्रयोगर कर दिया जाता है तो H_3 को प्रयोगर कर दिया जाता है ते

निराकरणीय व वैकल्पिक परिकल्पना के कुछ उदाहरण निम्न हैं। यहाँ सभी सकेंद्र बही हैं जो परिकल्पना के साथ दिये नुये हैं।

निराकरणीय परिकश्यना	वैकत्यक परिकल्पना
Ho: ≠=≠ ₀	$H_1: \mu \neq \mu_g$
Ho: #1>#2	$H_1: \mu_1 < \mu_2$
Ho: #1=#2	$\mathbf{H_1}: \mathbf{p_1} \neq \mathbf{p_2}$
Ho: € ² >0	$H_1: \sigma^2 > 0$
Ho: \$12=\$2	$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
भादि ।	

परिकल्पना परीक्षा में बुटियाँ

निरावरणीय परिवरूपना Ho नो स्वीनार करना है या नहीं इस बात का निर्णय, प्रतिदर्भ प्रेसामों के आधार पर किसी भी उपयुक्त सास्यिकीय परीसा वा प्रयोग करके, करना होता है। परीक्षा कोई भी हो इस निर्णय से दो प्रवार की जुटि होने की सभावना सर्देव रहती है। इन्हीं दो प्रवार की जुटियां का वर्णन किन्न प्रवार है ---

प्रयम प्रकार को कृटि यदि Ho को अस्वीकार कर दें जब कि Ho बास्तव में माय है।

प्रथम प्रवार वी पृष्टि होने की प्रायिकता को or द्वारा निरुप्ति करते हैं। विलोध प्रकार की बृष्टि यदि H₀ को क्योकार कर निया जाये जब कि H₀ प्रमुख या विकास है को क्ये क्योग प्रकार की की करते हैं। किस प्रकार की की को प्रायिक्त की

ध्यताच प्रकार का बाट । यदि H₀ को स्थीनार कर निया जाये गव कि H₀ प्रनाय भी मिथ्या है तो इसे द्वितीय प्रकार की जूटि कहते हैं। द्वितीय प्रकार की जूटि की प्रायक्ता की \$ द्वारा निक्षित करते हैं।

इन दीनो प्रकार की बुटियों को इस प्रकार समग्र सकते हैं --

माना वि एक व्यक्ति ने बुद्ध धपराध विवा है पर न्यायाधीय हारा वह व्यक्ति छोड दिया जाता है। यह प्रथम प्रकार की जुटि है।

एक यक्ति ने अपराध नहीं किया है जिल्तु उसे दोवी मान लिया जाता है भीर दण्ड दे

दिया जाता है। यह द्वितीय प्रकार की बटि है।

इस उदोहरण से स्वय्ट है कि इन टीनो प्रकार की जुटियों में डितीय प्रकार की जुटि स्वयिक हानिकारण है। सन कोई सी निर्णय करते समय यह प्रयत्न दिया जाता है कि किसी भी प्रकार की जुटिन हो जोकि पूर्णत्वस समय नहीं है। सत मुख्यनयां यह प्रयत्न रहता है कि प्रथम प्रकार की कोई जुटि चाहे हो जाय, यर डितीय प्रकार की जुटि कम ने कम होनी क्याहिये।

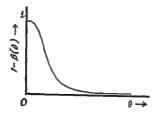
सार्थं नता-स्तर

प्रथम प्रशास की जुदि होने की प्राधिकता को सार्थकता कर बहुते हैं। व्यावहारिक हिंदि से यह प्रथम प्रवास की जुदि की बाजा है जिसकी कि कोई निषय सेते समय जीतिय (risk) भी जाती है। यदि यह प्राधिकता α है तो सार्थकता स्तर को प्राय 100 α प्रतिकत सरो के रूप से दिया जाता है। जैसे बाता α =005 है तो सार्थकता कर 5 प्रतिकत कहतता है। इसी प्रवास α =001 होने की स्थित से तार्थकता कर 1 प्रतिकत कहतता है। इसी प्रतास α =001 होने की स्थित से तार्थकता कर 1 प्रतिकत कहतता है। किसी परिकल्पना की प्रशिक्ष कर विश्व प्रतिकत्ता की स्तर्भ स्तर से स्वयं प्रतिकत्ता है। इसी प्रतिकल्पना की प्रशास कर के स्वयं प्रयोग करने से प्रशिक्त कर तीक स्वयं कर से स्वयं प्रतिकत्ता कर से सिम्पन सिम्पन से सिम्पन सिम्पन से सिम्पन सिम

परीक्षा की सामध्य

िनमां परीक्षा द्वारा निष्या परिकल्पना ने धस्त्रीनार विधे जाने नी प्राधिनका को उस परीक्षा को सामर्थ्य पहुँने हैं। यह प्राधिनना वैनितन परिकल्पना ने धन्तर्पन धार्मिक प्राधित सामर्थ पहुँने हैं। यह प्राधितना वैनितन परिकल्पना ने धन्तर्पन धार्मिक प्राधित के प्रधित के प्राधित के प्रधित के प्रध

है उतनी परीक्षा ग्रन्थी समभी जाती है। यदि दो परीक्षाएँ समान प्रतिदर्भ परिमाण व समान सार्यंग्वा स्वर पर भाषारित हैं तो एक परीक्षा दूसरे से मधिक प्रक्तिगानी कहताती है जब पहली परीक्षा में डितीय प्रकार की पूटि की प्रायिक्ता हूसरी परीक्षा को प्रपेशा कमा है। प्रायिक्ता हुसरी परीक्षा को मपेक्षा कमा है। प्रायत θ व परीक्षा की सामर्थ्य $\{1-\beta\}$ वे मानों का लेकर मानेसित विन्दुर्घों द्वारा प्राप्त वक को सामर्थ्य वक कहते हैं और इसका रूप प्राय विक (9-1) प्रैमा होता है।



वित्र 9-1 सामध्यें बक्र का एक रूप।

स्वतंत्रता-कोहि

विन्ही प्रेमणो के समुख्य में स्वतन प्रेसणों की सस्या को स्वतनता-तेटि कहते हैं। इस परिभाषा नो इस प्रकार भी समक्ष सनते हैं — निसी समुख्य के प्रेसणों नी सख्या में से इस समुख्य सम्बच्धी भात प्रसित्यों की सदया पदादें वो स्वतनता-कोटि प्राठ हो जाती है। प्रेस माना कि एक प्रसिद्ध में n प्रेसण X_1 , X_2 , X_3 ,..., X_n , ξ । पर इतने से कि इन प्रेसणों के मोन मा सदेव एव नियत मान होता है। यत इतने से (n-1) प्रेसणों के मान बात हो तो शेष एक प्रेसण ना मान सदेव बात कर सकते हैं। इस प्रकार केवत (n-1) एवं प्रस्ता में स्वतन प्रस्ता है। या इन प्रतिदर्श के लिए स्वतनता-कोटि (n-1) है। प्रति कोई एक प्रमाप प्रतिदर्श में प्रस्ता पर सकते हैं। इस प्रवर्श के लिए स्वतनता-कोटि (n-1) है। प्रति कोई एक प्रमाप प्रतिदर्श के स्वत्य बात हो तो इस प्रतिदर्श के लिए स्वतनता-कोटि (n-2) होगी। यह ध्यान रहे कि निम्न-भिम्न प्रतिदर्श के लिए स्वतनता-कोटि (n-2) होगी। यह ध्यान रहे कि निम्न-भिम्न प्रतिदर्श के लिए स्वतनता-कोटि भी निम्न भिन्न हो सकती है।

निराकरण-क्षेत्र

एक परोक्षा के निए निरावरण क्षेत्र R, विशो परोक्षा प्रतिदर्शव के वास्त्रविक मार्गो का वह उपसमुक्त्रव है जिसमें परिकत्ना को परोक्षा के धन्तर्गत धन्त्रोक्षार कर दिया जाता है। किसी परोक्षा मे क्षेत्र R वी सीनाओं (bounds) वो जातिक मान (crucal values) कहते हैं। उदाहरणार्थ यदि विभी t- परोक्षा में H_0 वो धन्त्रोक्षार कर दिया जाता है जब $t > t_0$ हो तो t_0 जातिक मान है।

एक पुच्छ व दो पुच्छ परीक्षा

यदि निराकरण क्षेत्र निम्नोकित में से किसी प्रकार का हो,

मपवा t>x⊾

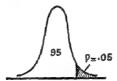
तो इन दोनो ही प्रवस्थाची से परीका को एक पुच्छ परीक्षा नहते हैं, जबकि ध्यरीक्षा-मितदमंत्र है।

मदि निराकरण-क्षेत्र निम्न प्रकार का हो,

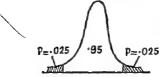
$$x_1 < t < x_2$$

तो परीक्षा को को पुष्छ परीक्षा बहुते हैं। इनके मामो की सार्पकता प्रतिदर्शन के बार-म्बारता फलन के बक्त से स्पष्ट हो जाती है।

वैकल्पिन परिस्त्यना वे आधार पर यह जात हो जाता है कि निराकरण क्षेत्र जार-म्बारती वक के एक सिरे पर है वा दोनो लियो पर । यदि यह सेत्र एक सिरे पर हो तो इसे एक पुष्छ परीक्षा और दोनो सिरो पर हो तो हुने यो पुष्ठ परीक्षा कहते हैं। इस क्षेत्र ना क्षेत्रफल सार्यन्ता स्तर α के समान होता है। α= 05 अर्थाव् 5 अतिश्रत सार्यकरा-स्तर ने लिए एक पुष्ठ व दो पुष्ठ परीक्षा की स्विति में निराकरण सेत्र कमगा विश्व (9-2) स (9-3) में रिसाबा गया है।



चित्र 9-2 एक पुच्छ परीक्षा में a = 05 के लिए रेखाच्छादित सेत्र, कांतिक दोव है।



चित्र 9-3 को पुष्छ परीक्षा में a = 0.5 के लिए देशाक्टादिन क्षेत्र क्रांतिक क्षेत्रों को प्रदर्शिद करते हैं 8

स्टुडेन्ट ध्-परीक्षा

यदि इस परिकल्पना की परीक्षा करना है कि समय माध्य का मान μ_0 है तो t-परीक्षा का उपयोग होता है जिसको नीचे समकाया गया है। यह परीक्षा एक प्रतिदर्शन के मान पर प्राधारित होती है जिसका बटन t-बटन के समान होता है। परीक्षा के नाम का यही कारण है। स्टुडेन्ट t-परीक्षा का प्रयोग केवल एक समग्र माध्य या दो समग्र माध्यो के प्रति परिकल्पना की परीक्षा के लिए ही किया जाता है जिनका वर्णन इस प्रध्याय मे दिया गया है। इस परीक्षा का प्रयोग एक या दो सहसम्बन्ध गुणाको या समाप्रमण गुणाको से सम्बन्धित परिकल्पनाथों ने परीक्षा के लिए भी किया जाता है जिनका वर्णन मागामी प्रध्यायों में दिया गया है।

मान सीजिये कि समझ में से a परिमाण का एक यहिन्छक प्रतिदर्श चुना गया जिसमे प्रेसण-मान X₁, X₂, X₃,,X_n हैं। यदि इन मानी का माध्य 🏋 प्रीर मानक विच-सन a से सुचित किया जाय हो प्रतिदर्शक,

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \qquad(9.1)$$

का बटन (n - 1) स्वतंत्रता कोटि के 1-बटन के समाव होता है।

t-परीक्षा के प्रति सभिधारणाएँ

यदि प्रयोग में निम्नोकित कल्पनाएँ सत्य प्रतीत होवी है तो t-परीक्षा द्वारा प्राप्त परिणाम मुद्ध होते हैं।

- (क) याद्य चित्र का बटन प्रसामान्य है।
- (ख) प्रतिदर्श प्रेक्षण परस्पर स्वतत्र हैं।
- (ग) प्रेक्षणो के समिलेखन मे कोई चृटि नहीं हई है।
- (१) प्रतितर्भ परिमाण बृहत् नहीं है। इसके लिए कोई विशेष सस्था बताना तो सम्भव नहीं है फिर भी यह माना जाता है कि प्रतिदर्भ का परिमाण 50 से प्रांचक नहीं होना चाहिये। यदि प्रतिदर्भ बृहत् हो तो ध-बटन प्रसामान्य बटन के सुस्य हो जाता है।

परीक्षा निकव

यदि X एक \mathfrak{t}_{n-1} चर है तो इस बटन की मुजास $\mathfrak{t}_{\mathfrak{Q}}$ वह मान है जिसके लिए

 $\mathbb{P}\left(\mathbf{x}>\mathbf{t}_{\alpha}\right)=\alpha/2$ यहाँ ≡ पूर्व-निर्घारित सार्यकता स्तर होता है ।

 $H_0: \mu = \mu_0$ की $H_1: \mu \neq \mu_0$ के विरुद्ध परीक्षा हेतु, $t \mid t \mid > t_{\alpha}$ हो तो H_0 सस्वीकृत है

भौर यदि |t| < t हो तो H_0 स्वीकृत है

 $\mathbf{H}_0: \mu = \mu_0$ की \mathbf{H}_1 $\mu > \mu_0$ के विरुद्ध परीक्षा हेतु एक पुच्छ परीक्षा का उपयोग होता है ।

यहाँ यदि परिकलित । का मान ऋणात्मकः हो तो परोक्षा निकप का बिना प्रयोग किये ही $\mathbf{H_0}$ को स्वीकार किया जा सकता है ।

यदि परिवितत t का मान धनात्मक है तो t_{α} वह मान है जिसके लिए $P\left(x>t_{\alpha}\right)$

= द है।

इस स्थिति मे परीक्षा निकष इस प्रकार है ----

यदि १>१ हो वो Ho मस्वीहत है अर्थीत् H1 स्वीहन है

भीर यदि ${}^{t}<{}^{t}_{\alpha}$ हो तो H_{σ} की H_{I} ${}^{\mu}<{}^{\mu}_{0}$ के विरुद्ध परीक्षा हेन् भी एक पुष्का कर उपयोग होता है।

इस स्थिति मे परिकलित । वा मान बाँद छनास्पक हो तो H_g को बिना परोक्षा निकप वा प्रयोग किये ही प्रस्थीकार विचा जा सबता है ।

यदि । का परिकतित मान ऋणात्मक हो तो परीक्षा निकय निम्नाक्षित है — यदि -1 < -1 हो तो H_0 अस्वीकृत है प्रपत्ति H_1 स्वीकृत है

भौर यदि -1>-1 हो तो H_0 स्वीकृत है मर्यात् H_1 मस्वीकृत है ।

महीं यह बात प्रयान देने योज्य है कि यदि उपकृत ससिमना को -1 से गुणा करतें स्वर्ण है कि यदि उपकृत सिं $_0$ $P>P_0$ के लिए निक्य के तत्व हो जाता है।

यदि कभी ऐसी स्थिति या जाए कि परिकलित । का मान कारणीवद्ध । वे मान के समान हो तो किमी याय परीसा का प्रयोग करना चाहिये यदि ऐसा करना उचित हो, या एक नया प्रतिदर्श लेकर किर से t-4रीसा करनी चाहिये । इसके ब्रिजिरिक एक जपाय यह भी है कि इस परीसा हारा H_0 के स्वीचार होने की प्रायिवता ज्ञान करसी जाय और समस्या में महस्य के अनुसार निर्णय कर तिया जाय ।

दिप्पणी सदि : बटन के लिए सारणी दोनो पुच्छों पर निराकरण क्षेत्र में लिए उप-सम्ब हो, तो एक पुच्छ परीक्षा में रू का मान देखते समय व सर्पनवा स्तर के लिए, 2a

प्राधिकता पर सारणी का मान देखना होता है क्योंकि निराकरण क्षेत्र का क्षेत्रपत इस स्थिति में एक पुच्छ पर व ही होगा।

उदाहरू 91. यहते किये गये प्रयोगों के भाषार पर ऐसा सममा जाता है कि विकार पत्रुमी (steers) की प्रति दिन भौतत बहुल शक्ति 75 किसोबाय है। एक नये प्रयोग से प्रति दिन बहुल व्यक्ति सम्बाधी निम्न वैद्याप प्राप्त हुए ।

प्रति दिन भौसत

प्रहण गतिः (कि॰ ग्राम) 7 53, 5 84, 6 72, 6 78, 7 72, 7 54, 5 71,

तो परीक्षा करनी है कि यह प्रेक्षण पहले दी गयी 7 5 कि ग्राम प्रति दिन ग्रहण शक्ति का समर्थन करते है।

इस प्रयोग मे परिवरूपना

के विरुद्ध परीक्षा करनी है। अत t-परीक्षा का प्रयोग किया गया है। इस परीक्षा के ਕਿਹ.

$$\Sigma X = 5391$$
, $\Sigma X^2 = 368144$
 $X = 67438$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n} \right\}$
 $= \frac{1}{7} (368144 - 363286)$
 $= \frac{1}{7} \times 4858$
 $= 0.6940$

s=0 83

$$t = \frac{6738 - 75}{83/\sqrt{8}}$$

= -260

सारणी परि 1 घ-3) हारा $\alpha = 05$ भीर स्व वी 2 7 के लिए t (05)=2 365 सारणीवढ t का मान परिकलित t वे मान से कम है यत a = 05 वे लिए Ho को मस्वीकार कर दिया । इससे यह निष्कर्ण निकलता है कि नये प्रयोग के आधार यर 7 5 कि ग्राम ग्रहण शक्ति से सहमति नही है।

यदि यहाँ H, ==75 की H, =<75 के विरुद्ध परीक्षा करनी हो तो एक पुच्छ परीक्षा करनी होगी। इस स्थिति में (05,7) = 1895 है। धका परिकलित

मान सारणीवद t के मान से प्रधिक है। ग्रत Ha ग्रस्वीवत है या H1 स्वीवत है।

दो समग्र माध्यो के प्रति परिकल्पनाम्रो की परीक्षा

माना कि दो प्रसामात्य समग्र हैं जिनके प्राचल भगश

$$(\mu_1, \sigma_1^2)$$
 भीर (μ_2, σ_2^2) हैं। परिवस्पना

- परि०—रिशिय्ट
- 2 सर्वे॰ नो॰—स्वतवता नीटि

$$H_0 \cdot \mu_1 = \mu_2 + H_1 \cdot \mu_1 \neq \mu_2$$

वे विरुद्ध परीक्षा वरनी है

माना कि इन समयों में से कमश्र n_1 मीर n_2 परिमाण के बार्टिन्छन प्रतिदशों का चयन किया गया है।

इन प्रतिदशों में प्रेक्षण इस प्रकार हैं।

Ho की परीक्षा दो स्वितियों में की जा सकती है --

(ক) সৰ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ লাবৈ অসাত ই্লি) পৰ $\sigma_1^2 ≠ \sigma_2^2$ থাবে ঐ মনবেদ্দানত ই $\sigma_1^2 ≠ \sigma_2^2$ থাবে ঐ মনবে ই $\sigma_1^2 ≠ \sigma_2^2$

स्मिति (क) \cdot $H_n \cdot \mu_1 = \mu_p$ जब $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ और श्रज्ञात हैं !

परिकल्पना \mathbf{E}_0 की परीक्षा के लिए विस्त प्रविदर्शन t का प्रयोग करना होता है

$$t \approx -\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$
(92)

जब कि स्पञ्जन (92) में 🔀 व 🧏 সদল সম্ম ব हिनीय प्रतिकारी ने माध्य है। sp एनजित मानन विभावत है। इनना परिन्मन निम्मानित सुत्री होरा नरने हैं —

$$\overline{X_{3}} = \sum_{i=1}^{n_{1}} X_{1i}/n_{1}, \ \overline{X_{2}} = \sum_{j=1}^{n_{2}} X_{2j}/n_{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n_{1}} (X_{2i} - \overline{X_{1}})^{2} + \sum_{j=1}^{n_{2}} (X_{2j} - \overline{X_{2}})^{2}$$

$$(9 3)$$

$$\begin{cases} xX_{11})^{2} & xX_{21} \\ xX_{11}^{2} - \frac{1}{n_{1}} \\ x \\ y = 1 \end{cases} + \begin{cases} \frac{n_{2}}{2} & x_{21}^{2} - \frac{3}{n_{2}} \\ y = 1 \end{cases} \qquad \dots (9.31)$$

$$= \frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2}{(n_2 + n_2 - 2)} \qquad \dots (9.3.2)$$

जब रि s₁° व s₂° त्रभन्नः प्रथम व द्वितीय प्रतिदर्गी ने प्रगरम है।

t के परिचलित मान भी, $t_{n_1+n_2-2}$ वे α विष्टु t_{α} से तुलना वरने पिछले खण्ड में दिये गये नियमानुसार H_0 वी स्नीइति या घस्त्रीइति ने बिष्टन में िणंग नियमानाता है। उदाहरण 9.2: एक देरी भामें पर ढोरो वी गर्माविध पाडा (male) या पिडिया (Female) जन्मने ने अनुसार निम्मावित वारणी में दी गयी है \longrightarrow

गर्मावधि पादे के लिए, XI (दिन)	वर्भावधि पविद्या के लिए 🗓 (दिन)
288 60	287 95
289 44	286 47
291 24	285 20
290 61	287 95
291 04	287 17
288 50	287 63
289 29	286 49
289 86	287 87
289 87	287 95
288 75	287 59
289 45	286 72
291 43	

परीक्षा करनी है कि पाड़े के जन्मने में माध्य गर्भाविध μ_1 और पड़िया के जन्मने में गर्भाविध μ_2 समान हैं अर्थात् Ho $\mu_1 = \mu_2$ वी H_1 $\mu_1 \not\simeq \mu_2$, के विरुद्ध परीक्षा करनी हैं।

माना कि चाडा व पंडिया के जन्मने की गर्भावधि का प्रसरण समान है प्रशांत् $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. यहाँ,

$$\overline{X}_1 = 289 84$$
,
 $\overline{X}_2 = 287 18$
 $(n_1 - 1) s_1^2 = 11 6582$
 $(n_2 - 1) s_2^2 = 7 6991$
 $s_0^2 = 0 9218$
 $s_0 = 0 96$

$$\text{wit } t = \frac{28984 - 28718}{96\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{11}}}$$
$$= 6645$$

 $\alpha = 0.5$ और स्व को = 2.1 के लिए सारकों (परि प= 3.5 द्वारा कि नाम त्रि $t_{0.5} = 2.080$ है जो कि परिकलित कि मान से प्रियं है। पत H_0 मस्बोहत है सर्पोद्द प्रधान परियों के लिए नामोबंधि समान नहीं है।

स्यिति सा परिवरपना

 $H_0 = \mu_1 = \mu_2$ की $H_1 = \mu_2 \neq \sigma_2$ के विरुद्ध परीक्षा करनी है, जब कि $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ मीर ये मतात हैं।

स्थित 'ब' की भौति वहाँ भी सब उन्हों घरेतनो का प्रयोग विद्यागया है। परिकल्पा की यह परीक्षा जिल्लार बाहेन (Tisher and Berhen) ने दो थी । $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ की स्थिति म सज्ञान प्राथना ने किए पूरा व वर्षान्त प्रतिदर्शन का सस्तिहत है निन्तु 'त' स पूर्ण व वर्षान्त प्रतिदर्श का प्रसिद्ध है। प्रत (92) हारा इस विद्यालय जिल्ला की वरीक्षा नहीं को सब्बती। इस स्थिति से निन्नांक्ति प्रतिदर्शन का सम्बद्ध हारा इस विद्यालय है। प्रत प्रतिदर्शन का स्थान करना हाता है —

$$t = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$
 (94)

इत सूत्र में 512 मीर 522 प्रयम व हितीय प्रतिदशी के कमण प्रसरण हैं।

इस मूत्र द्वारा परिचित्र । के मान की सारकी (परि प−3) की प्राप्त 'Ω के सान से सुसना नहीं कर शना क्यांक्रिय हो । यो स्व को (n₁-4 n₂-2) नहीं है ।

सुलना के लिए गुळ हर वा निम्नास्ति गुळ हारा जान करने, सारणीयळ १ का मान सात कर निया आना है भीर इसकी परिस्तित । स सुनना करने H₀ क विषय म निर्णय कर तिया जाता है।

$$\eta = \frac{\left(\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 + 1} \left(\frac{\delta_1^2}{n_2}\right)^2 + \frac{1}{n_2 + 1}} \qquad 2 \tag{9.5}$$

पूर्वनिर्धारित सार्थकता स्तर व ही रहता है।

्र उपर्युक्त मुद्र (9.5) बाद रक्षने वीहिन्द के पुछ विश्व प्रतीश होता है इस वास्प (9.4) द्वारा परिपक्तिक इसी एवं धन्य बान इसी भी तुलनाकी जाति है। खब v₂ ≠ v₂ हो ठो,

$$t' = \frac{\frac{s_1^2}{n_1} \times t_1 + \frac{s_2^2}{n_2} \times t_2}{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_0}}$$
(9 6)

यदि $\mathbf{n_1} = \mathbf{n_2} = \mathbf{n}$ हो तो \mathbf{t}' का मान, स्व को $\{\mathbf{n-1}\}$ व \mathbf{c} सा स्त पर सारणीबद्ध \mathbf{t} — मान के समान हो जाता है।

दिष्यणी —यदि दो प्रमरण σ_1^2 व σ_2^2 समान नही हो, तो १—यरीक्षा वैध नही रहती है। यत प्रतिदर्श र वो दो विभिन्न रचा में एव ता फिरार व बरहेन हारा धीर मन्य वैत्य व एसिन (Welch and Aspın) हारा दिया गया है। विन्तु हिसति 'व' व' 'व' में मेंकर (Cochran) हारा दिया गय मिनवर मान परीक्षा वे हेतु पर्योच्त परिजुद्ध हैं धीर विवोचता सह है कि इनवे निए साधारण ६ सारणी का प्रयोग करना होना है। यही कारण है कि (9.2) व (9.4) वा हो अधिकनर प्रयोग होना है।

उदाहरण 93 यदि उदाहरण (92) के यह माने नि पांडा या पिडया की गर्माबींछ का प्रसरण समान नहीं है धर्यान् $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ और धरात होने की स्थिति मे, $H_0 = \mu_2 \approx 1 H_1 \quad \mu_1 \neq \mu_2$ के निरद्ध परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं — परिस्तन करने पर,

$$\overline{X}_1 = 289 \ 84, \ \overline{X}_2 = 287 \ 18$$

$$5_1^2 = \frac{116582}{11} = 106$$

$$5_2^2 = \frac{76991}{10} = 077$$

$$\overline{X}_1^2 = \frac{289 \ 64 - 287 \ 18}{\sqrt{\frac{106}{12} + \frac{077}{11}}}$$

$$= \frac{266}{\sqrt{0883 + 0700}}$$

$$= \frac{266}{2306} = 668$$

सूत्र (9.5) द्वारा,

$$\text{sign} = \frac{(1583)^2}{(0883)^2 + (07)^2} - 2$$

-22 90

स्वतन्त्रता कोटि एव पूर्णीव है बत 229 दा समायोजन दरदे 23 नियाजा

सकता है। a = 05 व 23 स्व को के लिए सारकी (परि य-3) हारा १(05) = 1 069 है को कि परिवर्तित । वे मान 6 68 से वस है सत H_o सस्वोहत है। इससे यह निष्यर निक्सता है कि पाड़ा व पड़िया दे हेतु मर्भोविध काल समान नही समक्षे जा सकते।

यदि घाहेतो मुद्ध स्व को ज्ञात न करते । के माधार पर निणय निस्न प्रकार मे ले सकते हैं -

सूत्र (96) द्वारा,

$$t' = \frac{0.0883 \times 2.201 + 0.07 \times 2.228}{0883 + 0700}$$

जहां सारणी (परि प-3) द्वारा,

परिकलन करने पर. t'=2 213

परिकालत t का मान धे से प्रधिक है धत Ha के विषय में वही निष्मय निकलता है को कि उत्पर दिया जा जुना है।

विश्वास्यता मन्तराल तथा विश्वास्थता सीमाएँ

यदि दो मान ६ घोर 🗽 यो नि देवल प्रतिदश्च प्रेक्षणो दे पलन हैं, बात वरने सम्भव हैं मीर प्राचल € जिसका मानजन करना है वह इस प्रकार है कि

(96) $P(t_1 < \theta < t_2) = 1-\alpha$

जब कि ॥ एक निश्चित प्राधिकता है तो ध भीर 🔩 के बीच का भन्तरात विश्वास्था धन्तराल बहुसाता है। इसका अभित्राय है कि अवहार में प्राचल है वे इन दो मानों, t धौर 1, के बीच में होने की प्रायशता 1-0 है।

इस विश्वास्थना अन्तरात के त्रमतं न्यूनाम व अधिकतम मान १ व १, ही विश्वास्थना

सीमाएँ बहुनाते हैं। विश्वास्थता धन्तराल का वणन ग्रष्ट्याय (12) मंशी दिया गया है। प्रधिक स्वर्णन बारण के लिए इसे प्रतिचयन मिडान्त के बाव्याय में भी पड़ें।

विश्वास्यता-गणांक

प्राधिकता माथ जो दि प्राचन के घन्तराल संस्वीहत होने की प्राधिकता बताता 🖥 **रिश्वा**स्यता-गुणार कहलाता है ।

विश्वास्यता क्षेत्र

यदि ग्रनेन प्राचनों रा भागणन करा। हो और प्राच्ल ग्रवकाश में ऐसा क्षेत्र निर्धारित करना सम्भव हा कि प्राचलों ने इस क्षेत्र म समावेश होने की प्राधिकता (1-α) है तो इस क्षेत्र को विश्वास्थता क्षेत्र कहते हैं।

समग्र माध्य म की विश्वास्यता सीमाएँ

यदि एक चयनज्ञत प्रतिदशं मं n स्वतन्त्र प्रेक्षण X_1 , X_2 , X_3 , ..., X_n है तो इनने द्वारा $(1-\alpha)$ प्राविचता पर विश्वास्त्रता सीमाएँ ज्ञात करने ने निए प्रतिदर्श t ना प्रयोग करना होता है जब यि n सा स्त 2 या प्रथम प्रचार नी चूटि है ।

यह ज्ञात है कि अतिदर्शन,

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

यदि \sqrt{n} $(X - \mu)/s$ का मान शास्त α पर $- {}^{t}\alpha$ और ${}^{t}\alpha$ ने बीच में स्थित है प्रयोद स्वीष्टति क्षेत्र म है तो समग्र माध्य μ का ग्रागणित मान स्वीष्टत होने की प्रायिक्ता $(1-\alpha)$ है।

धन्यया इसका मान स्वीहत नहीं हैं। अत म के विश्वास्थवा धन्वराल के लिए निम्न समिका का सत्य होना आवश्यक है।

$$-t_{\alpha} < \frac{\overline{X} - \mu}{s / \sqrt{n}} < t_{\alpha}$$
 (97)

जब कि ¹α, (n-1) स्व को व α सा स्त के लिए सारणीवद्ध मान है।

$$\operatorname{tr} t_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}} < (\overline{X}^{-\mu}) < t_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\operatorname{tr} \overline{X} - t_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}$$
(98)

श्रसमिका (98) में 天, s और n के मान प्रतिदर्श के बायार पर प्रतिस्थापित कर विये जाते हैं। ातु का मान 1-वटन सारणी (परि ध-3) द्वारा देखकर प्रतिस्थापित कर

दिया जाता है। यहाँ
$$\mu$$
 ना मान सीमाओं $(\overline{X} - t_{\alpha} = \frac{s}{\sqrt{n}})$ और $(\overline{X} + t_{\alpha} = \frac{s}{\sqrt{n}})$

के बीच स्वीकृत हैं घर्त μ की उपरि सीमा $\overline{X}+t_0\frac{s}{\sqrt{n}}$ धौर निम्न $\overline{X}-t_0\frac{s}{\sqrt{n}}$ तक

है या
$$\mu$$
 की विश्वस्थता सीमाएँ $\overline{X} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}$ के समान है। (9.9)

उपरि सीमा व निम्न सीमा के भन्तर वा विश्वास्थना धन्तराल वहते हैं।

दो समग्र माध्यों मे ऋन्तर, (+1-+2) की विश्वास्थता सीमाएँ

(µ1-µ2) विसी भी प्राचल की विश्वास्थता सीमाएँ पिछने खब्ड में दिये गये सिद्धान्त री जात कर सक्ते है। अ्यञ्जल (99) को देखने से पता चलता है जि विश्वास्यता ग्रन्तराल की सीमाएँ ज्ञात वरने हेतु उस प्राचल के भावसन में जिसका विश्वास्यता घन्तराल ज्ञात करना है, इस बागणक वे मानक विचलन को प्रतिदर्शन के सारणीयध्र—मान से गुणा वरने एक बार जीड देने व एक बार धटा देने पर विश्वास्यता र्तामाएँ तात हो जाती है। इसी बात को ध्यान में रखकर (#1-#2) की विश्वास्थता सीमाएँ ज्ञात वर सकते हैं। यहां भी दा स्थितियो, (π) $\sigma_1^{\,2} = \sigma_2^{\,2}$ मीर मज्ञात है (π) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ स्नीर सजात है वे सन्तर्गत सीमाएँ ज्ञात वरनी होयी।

स्यिति 'र' म (12-12) की विश्वास्यता सीमाएँ

$$(X_1-X_2)\pm {}^5p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} {}^1a,(n_1+n_2-2)$$
 (9 10)

पूत्र (9 10) म सर्वतन सूत्र (9 2) वे धनुसार है। (a), (a_1+a_2-2) , स्वाब सास्त्र व (a_1+a_2-2) स्व को के लिए। हा

सारणीयद मान है। गुत्र में सभी सवेतना ने मान रत्यकर (#1—#2) का विश्वास्पता प्र-तरास या सीमाएँ जात कर सकते है। स्थिति 'ख में (#1-#2) विश्वास्यता सीमाएँ हैं,

$$(X_1 - \bar{X}_2) \pm \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \cdot t'$$
 (9 11)

सुद्र (9:11) म सभी सवेतन सूत्र (9:4) के बनुसार हैं जब कि ए का भारित मान सूत्र (96) के ब्रह्मसार है। यदि चाह सो । के स्थान पर शुद्ध स्व को व ब सा स्त. पर सारणीयद । मात का प्रतिस्थापन कर रातने हैं । सभी सकतना क मान, सूत्र (9 11) म रत कर, विश्वास्थता सीमाऐ शान कर सकत है।

उदाहरण 94 उदाहरण (91) म दिय गये प्रनिदेश प्रेक्षणों ने द्वारा समद्र माझ्य u की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ निस्त प्रकार झात *कर* सकते हैं।

मूत्र (99) द्वारा ह वे लिए विसी,

=6 738± 293×2 365

=6 738+ 683

सुत (96) में X, s/√ a व °a दे मान उदाहरण 91 द्वारा प्रतिस्पापित कर दिये गये हैं। मत निम्न सीमा

L=6 055 चोर उपरि सोमा U=7 42

3. वि सी. 🖂 विश्वास्यदा सीमाएँ

उदाहरण 95: उदाहरण (92) में दिये न्यास के ब्राधार पर $(\mu_1 - \mu_2)$ की 99% विश्वास्थता सीमाएँ सुत्र (910) द्वारा झात कर सकते हैं।

स्व को 21 के लिए विसी (जब कि $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)

यहाँ सूत्र (9 10) में
$$(X_1 - \overline{X}_2)$$
, $s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$ के मान उदाहरण (9 2)

द्वारा प्रतिस्थापित निये गये हैं और 101 21

=2 831 है (१ का मान सारणी द्वारा देखा गया है)

चत निम्न सीमा L=1 50 चौर उपरि सीमा U=3 82

युगल १-परीक्षा

इस परीक्षा ना प्रयाग तब करते हैं जब कि युगन प्रेक्षण एक ही या एक रूप जीव या किर्जीब पर तिए गये हु"। समग्र मे इन युगन प्रेक्षणों के प्रत्य के माध्य के प्रति निराक्तणीय परिकल्ला H_0 D=0नी H_1 $D\neq 0$ या C (जब कि C एक बास्तविक ज्ञात मान है) के विरद्ध परीक्षा की जाती है। माना कि प्रतिदर्श में R युगन प्रेक्षण एक इनमे तदनुसार प्रस्त किम्मिनित हैं —

ন্তুগল ইন্নল (X ₁) (X ₂)	घम्तर 'd' (X₁−X₂)
X ₁₁ X ₂₁	X ₁₁ -X ₂₁ =d ₁
X ₁₂ X ₂₂	$X_{12} - X_{22} = d_2$
X ₁₃ X ₂₃	$X_{13} - X_{23} = d_3$
.	7
X_{1n} X_{2n}	$X_{1n} - X_{2n} = d_n$

युगल प्रेसणों में मन्तर 'd' ज्ञात करते समय यह ध्यान रखना चाहिये कि मन्तर (X_1-X_2) या (X_2-X_1) नोई भी ले सकते हैं किन्तु जो क्रम एक मन्तर के लिए है वही सब मन्तरों के लिए रहता है। जो मन्तर ऋषात्मक हो उन्हें ऋषात्मक हो रसा जाता है मोर परिकत्तन करते समय इनका विकार करना होता है। मन्तरों को ज्ञात करके, H_0 की परीसा निम्नाकित प्रतिदर्शन द्वारा करते हैं।

$$t = \frac{\overline{d - D}}{s_d / \sqrt{n}} \qquad \dots (9.12)$$

यहाँ t की स्थनन्त्रता कोटि (n - 1) है।

$$\text{wit} \qquad S_d^2 = \frac{1}{n-1} \, \frac{x}{i} \, (d_i - \overline{d})^2$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i}d_{i}-\frac{\left(\sum_{i}d_{i}\right)^{2}}{n}\right\}$$

Sa2 ना वर्गमूल सक्द d का मानर दिवलन Sa ज्ञान हो जाता है।

 \overline{D} नामान H_0 के धनुनार रूपा जाता है। अधिनतर H_0 $\overline{D} \approx 0$ की ही परीक्षा करते हैं।

 $(9\ 12)$ द्वारा परिकलित ।, की α सार करत व $(n-1)^2$ हम को को कि लिए सारणीयद्व । वे मान से सुनना बरने H_0 के विषय से पहले भी भीति निर्णय कर तिया जाता है।

परिवलित । < t होने वर H_g को स्वीकार वर निया जाता है इसका मिश्रियम

है विस्ताय से अन्तरों का माध्य बूत्य के समान है। 1 होने की स्थित से H_0 को प्रस्थीकार कर दिया जाता है जिसका अभिप्राय है कि बारतव से इन पुगन प्रेक्षणों से सन्तर है न कि सुगन प्रेक्षणों से सन्तर है न कि स्वाप्त है न कि स्वाप्त है न कि सुगन प्रेक्षणों से स्वाप्त है न कि स्वाप्त है न कि स्वाप्त है न स्वाप्त से स्वाप्त है न स्वाप्त है न स्वाप्त से स्वाप्त से स्वाप्त है न स्वाप्त से से स्वाप्त से स्वाप्त से स्वाप्त से स्वाप्त से स्वाप्त से स्

D का विश्वास्वता सन्तरास

D का विश्वास्थता चन्तरास (99) के धनुरूप सूत्र

$$d \pm \frac{S_d}{\sqrt{B}} t_a$$
 (913)

द्वारा ज्ञात विमा आता है। इस यूत्र में सभी सर्वेतन (912) में दिये प्रतिदर्शन के प्रमुगार है। t_{g} a सा \circ रत \circ (ये) कि दिम्मृत हो) घीर (n-1) स्व \circ को \circ पर t

वा सारणीबद्ध मान है। सभी सबेनारे वे मान प्रतिदर्भ वे घनुमार सूत्र मे रतवर, एव बार (+) जिस् और एव बार (-) जिस् वो मेवर विश्वस्थता सीमाएँ हान हो जाती हैं। उपरि सीमा मे से निम्ब सीमा पटावर विश्वस्थना धन्तेरास हान हो जाना है।

उदाहरूल 96. 12 बाम जैब सामधी को धनग-धनम प्लेटिनम व मिनिका की प्यानियों में मेमिन किया गया धौर अल्पेक अकार की 9 प्यानियों से कुल महस की निम्मोक्ति मात्रा वाची क्यी:—

प्यासी सध्या	प्सैटिनम की प्याप्ती में घरम की माता (X)	सिनिका की प्यानी मध्यम की माता (Y)	
1	16 99	16 71	
2	17 84	1794	
3	16 44	16 76	
4	12 45	13 37	
5	13 84	14 13	
6	12 03	11 49	
7.	18 45	17 81	
8	14 79	13 62	
9	11 27	12 26	

परिकल्पना, कि दो प्रकार की प्यालिया द्वारा प्राप्त भस्म की माध्य मात्राचा म चन्तर शुन्य के समान है झर्यात्

 H_0 $\overline{D} = 0$ की H_1 $\overline{D} \neq 0$ के विरद्ध परीक्षा प्रतिदशंज (9 12) द्वारा कर सकते हैं।

प्रन्तर (X-Y)=d 28, - 10, -32, -92, -29, 54, 64, 117, -99 $\Sigma d_i \approx 0.01, \Sigma d_i^2 = 4.1715$

मोर
$$s_d^2 = \frac{1}{8} \left\{ 41715 - \frac{(001)^2}{9} \right\}$$

= 05214

$$s_d = 0.722$$

$$s_d = \frac{s_d}{\sqrt{n}} = \frac{.722}{3} = 2406$$

सारणी (परि॰ प-3) हास t 05.8 = 2 306

यहाँ t<t _{05: 8} है।

थत. परिकलका H_0 को स्पीकार पर निया जाता है। जिसका सर्व है कि दोनो प्रकार की प्यासियो द्वारा अस्य की समान भाषा प्राप्त होती है।

किन्हीं दो वास्तविक बारम्बारता, प्रतिज्ञत या ध्रनुपात में धन्तर की सार्यकता परोक्षा

ध्यवहार में प्रेसणों को बारम्बारता बटन के रूप में दिवा जाता है। यह बटन या तो पूर्ण सख्या, प्रतिकत या बनुपान के रूप में दिये जाते हैं। दिन्ही दो वर्गों की बारम्बारता या प्रतिकत में प्रस्तर जो सार्वकता परोक्षा की प्राय जावक्वकता होती है। इस परिस्तकता की परोक्षा प्रतिकर्ण । द्वारा की जाती है।

माना कि वर्गीहत बारम्बारना बटन निम्न प्रकार है -

वर्ग (i)	समग्री यूनिटो की सच्या (श्री)	प्रतिदर्भ में यूनिटों की संक्याः (धां)	प्रतिवर्श में प्रतिवर्श (14)
G ₁	N_3	$\mathbf{f_1}$	p_1
G_2	$N_{\mathbf{g}}$	f_2	P_2
G^3	N_3	f_3	p_s
i	Ě	:	i
Gk	N_k	fk	Pĸ
-	k	k	
	$N = \sum_{i=1}^{n} N_i$	$\sum_{i=1}^{n} f_i = n$	

N, मीर N, के मन्तर (1, j=1, 2, 3, k, i≠j)

की सार्पकता परीक्षा करने के लिए प्रतिदर्शक

$$t = \frac{\{f_i - f_j\}}{s_{Df}} \sim t_{n,1}$$
(9.14)

को निरूप माना जाता है

जहाँ

$$s_{Df} = \sqrt{\frac{2}{n-1} (nf - f^2)}$$
 (9.15)

यहाँ

$$f = \frac{f_i + f_j}{2}$$

(9.14) में सभी सबेतनों का मान रसकर, परिक्रित १ जात हो जाता है इस १ की (n-1) स्व॰ की॰ व α सा॰ स्त॰ पर सारणीवड़ १ के मान से तुनना करके समग्र के लिए इन वारस्वारताग्रों में मन्तर के प्रति परिकस्पना की सार्यक्ता के विषय में निर्णय कर लिया जाता है।

यदि वर्गों के तदनुसार प्रतिमत दिये गये हो, (जो उत्पर सारणी के चीपे स्तम्भ मं दिये गये हैं) तो समग्र मे दो प्रनिमता p, व p, (1≠1) की समानता के प्रनि परिकल्पना की परीक्षा, प्रतिदर्शन

$$t_{n-1} = \frac{p_i - p_i}{s_{Dn}}$$
 ..., (9.16)

সদ্ধি

$$s_{Dp} = \sqrt{\frac{2 p_0 q_0}{n-1}}$$
 ... (917)

वहाँ

$$p_0 = \frac{p_1 + p_1}{2}$$
, $q_0 = (100 - p_0)$

द्वारा की जाती है।

पहले नी मौति प्रतिषतों में अन्तर नी सार्यन्ता के प्रति निर्णय कर सकते हैं।

यदि दो भिन्न समग्रों में अनुपातों के ममान हाने की परिकल्पना की परीक्षा करनी हो तो हम स्थिति में $(9\ 17)$ में s_{Dp} का मान निम्न सूत्र में सात करते हैं —

$$s_{Dp} = \sqrt{p_0 q_0 \left(\frac{1}{n_1 - 1} + \frac{1}{n_2 - 1}\right)}$$
 (9 18)

उदाहरण 9.7 एक जनानिकीय (Demographic) चर सम्बन्धी प्रध्ययन द्वारा प्राप्त प्रांकडे प्राप्तीय तथा नगरीय जनसंस्था के लिये प्राप्त के प्रमुक्तार निम्न धारणी में दिये गये हैं।

वर्तमान बाव्		नगरीय			दाशीय	
(वदी में)	बारं ०	शब्दा	श्रीतश्चर	संद्रा	মরিতর	
15-19	f ₁	2	03	52	97	
2024	ſ,	56	9 4	136	254	
2529	f ₃	137	22 9	121	22 5	
30-34	f_4	152	253	101	188	
35-39	f_5	149	24 8	57	107	
40-44	f_6	83	13 8	41	76	
45 या ग्रधिक	f ₇	21	3 5	28	5 3	
योग		600		536		

(1) परिवरणना H_0 िन नगरीय जनसम्बा के लिए (25—29) और (30—34) माप्त यंगी की वारस्वारतायों में कोई सार्थक श्रन्तर नहीं है, की परीक्षा (9 14) में दिये गये प्रतिदर्शन t द्वारा करते हैं।

मही
$$f_0 = 137$$
, $f_4 = 152$
जनिंग $f = \frac{137 + 152}{2}$
 $= 144.5$
 $s_{DD} = \sqrt{\frac{2}{600 - 1}} (600 \times 144.5 - 144.5^2)$
 $= \sqrt{219.76}$

सूत्र (9.14) के बनुसार,

$$t = \frac{137 - 152}{14.9} = 1.01$$

=1482

t 05:599 = 1 96 > t झत Ho को स्वीकार कर सिया जाता है।

(u) H_0 : नगर और बाम दोनों से बाखुवर्ग (35—39) का प्रतिशत वरावर ${\bf B}$ सर्घात

 $H_0: p_1 = p_2$ की $H_1: p_1 \neq p_2$ के धिक्छ परीक्षा निम्न प्रकार कर क्ष्मते हैं '— $p_0 = \frac{248 + 107}{2} = \frac{355}{2} = 17.75$

$$s_{Dp} = \sqrt{17.75 \times 82.25 \left(\frac{1}{599} + \frac{1}{535}\right)}$$

$$= \sqrt{1459.94 (0036)} = \sqrt{5.2558} = 2.29$$

$$\therefore t = \frac{24.8 - 10.77}{2.79}$$

a == 05 मोर 1135 स्त्र॰ को॰ पर धना सारधोबद्ध मान 196 है जो कि धर्मे सम्हे। मत परिकरपता H₀ को म्रस्थोकार कर दिया जाता है जितका अर्थ है कि नगरीय तथा मामीण व्यक्तियों की प्रतिवृत्त, मायू वर्ष (35—39) में समान नही है।

K समग्रो के माध्यां की समानता की परीक्षा जबकि K>2

माना वि k समक्षो ने माध्य कमा 📭, 📭 📭 🚉 🚉 हैं। तो परिकल्सना

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = ... = \mu_k$$

की, H_1 : (कि बम से बम बोर्ड दो माध्य ममान नहीं हैं) के विरुद्ध परीक्षा थरनी है। माना वि H_0 वी परीक्षा वे लिए k समग्रा म k स्वनन्त्र प्रतिदर्शों वा चयन त्रिया गया है जिनके परिमाण कमश

हैं। 1 में प्रतिदर्श के j वें प्रेक्षण को X_{ij} द्वारा निरूपित किया गया है जबिक $i=1,2,3,...,n_1$

है। यह कल्पना करते हैं कि

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \dots = \sigma_k^2$$

मा यह नहे कि समग्र प्रसरण ममान हैं तो परिकरपना H_o की परीक्षा स्नैष्टेकर (Snedecor) F-परीक्षा ढारा की जाती है और प्रतिदर्शन,

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (\overline{X}_i - \overline{X})^2 / (k-1)}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (X_q - \overline{X}_j)^2 / 2(n_i - 1)} \sim F_{k-1; n-k} ... (919)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (X_q - \overline{X}_j)^2 / 2(n_i - 1)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - 1) s_i^2} \cdot \frac{n - k}{k - 1} \qquad \dots (9191)$$

वहाँ 🗷 गा=ग

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{X_{i}^{a}}{n_{i}} - \frac{G^{2}}{n}}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_{i}} X_{ij}^{a} - \sum_{i=1}^{k} \frac{X_{i}^{a}}{n_{i}}} \cdot \frac{n-k}{k-1} \qquad(9 19.2)$$

(जहाँ G बुत्त प्रेंक्षणो का योग है और n बुल प्रेक्षणो की सस्या है। Xi s वें प्रतिदर्श में प्रेक्षणो का योग है।)

यदि परिक्तित F वा मान α सा॰ स्त॰ घौर $\{(k-1), \Sigma(n_i-1)\}$ स्वतन्त्रता कोटि पर सारणीवद्ध F से अधिक हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है। प्रायः k माध्यो की समानता को परीक्षा प्रसरण विक्लेपण-सारणी द्वारा करते हैं जिसका विवरण फ्राध्याय (19) में दिया गया है।

उदाहरण 9.8 : धटर वी इपिजोपजानि (Pea cultivars) के साध्य गुरून भार पर सीन तापत्रमाँ का प्रमान देशा गया। इस प्रयोग द्वारा प्राप्त प्रेक्षण निम्न मारणी में दिये गये हैं। प्रेक्षणों की सहस्वता से परिकल्पना H₀ (नीजो तापत्रमों का, साध्य गुप्त भार पर समान प्रभाव है) की गरीक्षा निन्तरोसा द्वारा निम्न प्रवार कर सकते हैं —

बटर		माध्य १	हुष्ड भाव (द्वाप)		
			शासम्ब		
		12°C	17°C	25°C	
	गुर्फभारः	X _I	X _t	X ₃	
î		9-0	130	66	
2		7.3	9 3	79	
3		7.7	8.9	7.5	
4		9.7	7.6	4.7	
5		4.4	8 6	6.6	
6		3.0	9-1	4.2	
7		4.8	5.7	49	
8		4.3	5 6		
9		2.9			
10		2-7			
	बोग	55.8	67.8	42:4	

यहां $H_0: \mu_2 = \mu_2 = \mu_3$ की $H_1:$ (िक कम की कम कोई दो तापत्रमां का माध्य प्रभाव समान नहीं है) के विरद्ध परीक्षा की सभी है।

प्रभाव समान नहीं है) में विदेव पंचार को से । थार k=3 $\Xi = 20$ $\Xi = 166$ 0, $\Xi = 166$ 0/25 $\Xi = 66$ $\Xi = 20$ $\Xi = 20$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{X_{i}^{2}}{n_{i}} = \frac{(558)^{2}}{10} + \frac{(678)^{2}}{8} + \frac{(424)^{2}}{7}$$

== 1142·792

सूत्र (9 19.2) द्वारा

$$F = \frac{114279 - 110224}{125586 - 114279} \times \frac{22}{2} = \frac{4055}{11307} \times 11$$

= 394

 $\alpha = 0.5$ फ्रीर (2, 22) स्वतंत्रता कोटि पर सारणी (परि थ – 5.2) से F = 3.44 जो कि परिकलित F से कम है। स्रत H_0 को सस्वीकार कर दिया जाता है जिसका फ्रांभिप्राय है कि तीनो तापत्रमां का, माध्य कुष्क भार पर, समान प्रभाव नहीं है।

प्रसामान्य विचर परीक्षा

यदि एक समग्र से, जिसका माध्य P व सानक विचलन σ है, परिमाण \mathbf{n} के यदा सम्प्रद प्रतिदर्शों का चयन विया जाय तो इन प्रतिदर्श माध्यों \mathbf{X} के बटन का माध्य P व मानक विचलन σ/\sqrt{n} होता है जैसा कि शब्दाय 8 से बृहद् सक्या के दुर्बल नियम में दिया जा चुका है।

माना कि एक चर $X \sim N$ (μ , σ) है और σ जात है। तो इस स्पिति में एक परिमाण n ने प्रतिवर्ध ने ध्राधार पर परिकल्पना,

 $H_0: \mu = \mu_0$ की H_1 $\mu \not= \mu_0$ के विरुद्ध परीक्षा प्रमामान्य विकर द्वारा करते है जिसके लिए निम्न मुत्र है —

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \qquad \dots (9 \ 20)$$

मिंद पूर्व निर्मारित साक स्त्रक $\alpha = 0.5$ पर परीक्षा नरती है तो, परिनित्त Z नी 196 से सुलता बरते हैं। यदि Z > 196 हो तो H_0 नी अपनीकार नर दिया जाता है मर्याद H_1 स्वीकत होता है। इसका अर्थ है कि \overline{X} व μ वे मान म सायंव स्थलर है। इसी प्रकार $\alpha = 0.0$ होने पर Z नी जुलूना Z 58 से बरते हैं। अपन विभी भी मार्यकता सरत वे तिए प्रमामान्य बटन सारणी से Z वा मान आन वरने और परिकृतित Z से जुलूना करके H_0 के विषय में नियमानुसार निर्णय कर सिया जाता है।

िन कु व्यवहार में प्रधिनतर σ जात नहीं होता है। निन्तु यह चिंदत है कि n नृहत् होने की स्पिति में ι_{n-1} बटन प्राय मानक प्रसामान्य बटन ने ममान होता है ग्रीर इस कारण ι_{n-1} की सारणी के स्थान पर N (0,1) की सारणी में हो नाम चलाया जा सकता है। सूत्र (9.20) में σ ने स्थान पर बृहत् प्रतिदर्श के मानक विचनन s को रामना

होता है। यहाँ भी परिकलित Z के मान की सारणीबद्धः Z के मान से तुनना करके H_0 के विषय में नियमानुसार निर्णय ने निया जाता है।

इमी प्रकार बृहत् प्रतिदर्शों की स्थिति में H_0 $\mu_1 \Longrightarrow \mu_2$ की परीक्षा t के स्थान पर प्रसामान्य विवर परीक्षा द्वारा कर सकते हैं।

द्विपर चर के लिए परिकल्पना-परीक्षा

एक सिनके को उछान कर बरजूजी परीक्षण किया । किसी भी एक परीक्षण में सिन्दा या तो गीर्थ की घोर से गिरेमा या सन् की घोर से । साना कि एक परीक्षण में मिक्के के गीर्थ की घोर से गिरने की प्राधिकता P है थीर सन् की भीर से गिरने की प्राधिकता Q है जबकि $P+Q\approx 1$ है।

सिनके को a बार उद्यासा गया है और माना कि देन वरीक्षणों में सिनका r बार गीप की मीर से गिरता है। इस वरीक्षण के मामार पर एक वरीक्षण में भीष के उत्तर को मोर होने की प्रायक्ति $\frac{r}{n}$ है। यदि इस परिकल्पना की, कि निर्मा भी परीक्षण में सीप उत्तर होने की प्रायक्ता $\frac{r}{n}$ है धर्षांत् $P=\frac{r}{n}$ है, परीक्षा करनी है, तो n बृहत् होने की स्थिति में परिकल्पना की परीक्षा किल्ल प्रवार कर सबते हैं. स्थापक रूप में परिकल्पना की परीक्षा किल्ल प्रवार कर सबते हैं. स्थापक रूप में परिकल्पना

 $H_0:p=p_0$ की $H_1:p\neq p$, के विरुद्ध परीसा के सिए मानक प्रमामान्य विचर निम्मावित है:—

जहाँ po एक अवर मान है।

भारतीर चटनाएँ ॥ है भीर इन ॥ घटनाओं से से ग्रवह है जो प्रायक्ता p से सम्रोटन हैं। परिकल्पना की परीक्षा के हेतु मानक प्रमासान्य विकर 22 वा सात निम्न मूत्रों से ज्ञात कर निया काला है।

Field 1:
$$Z = \frac{(r+0.5) - np_o}{\sqrt{np_o(1-p_o)}} \forall t \in (np_o)$$
(9.21)

Realist 2.
$$Z = \frac{(r-0.5) - np_0}{\sqrt{np_0.(1-p_0)}} \approx r > np_0 \dots (9.22)$$

यदि Z का परिवनित मान श्रासाधान्य बटन सारणी द्वारा देने यये मान $Z_{\alpha/2}$ ने कम या समान हो, या $Z_{1-\alpha/2}$ से प्रथिक या समान हो तो H_0 को धन्यीकार कर दिया जाता है। (प्रपांत् सदि $Z < Z_{\alpha/2}$ या $Z > Z_{1-\alpha/2}$ तो H_0 को धन्यीकार कर दिया जाता है।

चराहरक 99: एक रोग ते थीडित 186 रोमियों में से 80 नित्रयों भी। इस परि-बस्पना, बी कि इस रोग से वीडित की व पुरुषों की नवान प्राविकता है परीना इस प्रकार वरते हैं:--

यहां $H_0 \cdot p = \frac{1}{3}$ की $H_1 \cdot p \neq \frac{1}{3}$ के विरूद परीक्षा रुप्ती है। r = 80 और $np_0 = 186 \times \frac{1}{3} = 93$

यहाँ r<npa है इसनिए सूत्र (921) वा प्रयोग वरना होगा।

$$Z = \frac{(80 + 05) - 93}{\sqrt{186 \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{-125}{4/\overline{465}}=\frac{-125}{682}-183$$

सारणी (परि॰ प-2) द्वारा सा॰ स्त॰ a=05 के निए Z=196 है जो कि Z के परिकलित मान से प्रधिक है, धत परिकल्पना H_0 कि $p=\frac{1}{2}$ स्वीहत है।

इससे निष्टपं निक्तता है कि 5 प्रतिशत मार्क्टन पर रोगियों में पुरयो व स्त्रियों की मध्यासमान है।

इसी प्रकार पुरदो वी सम्बा 106 लेकर सूत्र (922) वा प्रयोग करके निष्कर्षे निकाला जासकताहै।

काई-वर्ग द्वारा सार्थकता परीक्षा

x² एक सामजन-मुख्युता (goodness of fit) की परीक्षा है। रि द्वारा कारको (factors) की स्वतनता या विपमागता (heterogenesty) की परीक्षा की जाती है।

यदि परिकल्पिन बटन वे प्रमुसार n प्रेक्षणो की विभिन्न वर्गों म प्रत्याश्चित वारम्बारताएँ प्रमह्म $E_1, E_2, E_3, ..., E_k$ ग्रीर वास्तविक वारम्बारताएँ $O_1, O_2, O_3,..., O_k$ हो तो,

$$\gamma^2 = \frac{(O_1 - E_1)^2}{E_1} + \frac{(O_2 - E_2)^2}{E_2} + \frac{(O_3 - E_3)^2}{E_3} + ... + \frac{(O_4 - E_4)^2}{E_4}$$

$$\begin{array}{ll} k \\ = \sum\limits_{i=1}^{k} (O_i - E_i)^2 / E_i & (9 23) \end{array}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} O_i^2 / F_i - n \qquad (9 23 1)$$

यदि n इतना मृहत् हो नि बोई भी प्रत्यामिन वारम्बारता 5 से वस न हो तो मिद्ध निया जा सकता है नि X^2 ना बटन लगभग X^2_{R-1} ने समान होगा । सनुनान (suffix) (k-1), X^2 नी स्वतन्त्रता नोटि नो सूचित नरता है ।

मंदि χ^2 का परिवर्तिन मान χ^2_{k-1} के α बिन्दु से अधिक होना है तो परिवरूपना को α मार्थकता स्तर पर अस्वीकार कर दिया जाता है ।

दिष्यपी प्रत्येत निवित्त में प्रेशित बारम्बारतायी ना योग भीर प्रत्यानित (या रीदान्तिक) बारम्बारनायी का योग मधान होता है प्रयान्

$$\Sigma O_i = \Sigma E_i$$

ग्रासंग सारणी

यह एक दिन भारती है जिनवे दिन्ही दो खांबनकामा वा नारते A व B वे विभिन्न वार्मी संपित बारकारना जिलने वी विधि है। साना वारत A व p वर्ष और B म व वर्ष है विदि बारत A व p वर्ष और B म व वर्ष है विद बारत A वे हो वर्षक की विधि B को नामन को धोर दिवा गया है मो p विक्त और A रत्यामा की माणणां हो (PA) जम की धामन मारती वरने हैं। द्रावेश की कि वर्ष में माणणां हो (PA) जम की धामन मारती वरने हैं। द्रावेश की विकास की विकास

(p×q) तम की बाहर चारणी

A/B	B_1	B ₂	B ₈ B _i	B _q	मोग
A ₁	0,1	Ola	O ₁₃ O ₁	O ₁ q	Oi
A ₂	O ₂₁	022	O ₂₃ O ₂₁	024	O ₂ .
A ₃	O ₃₁	0,2	O ₃₃ O _{3j}	034	O ₃
í Aı	Oil	0,2	0,3 0,5	Oʻd	О,
	:	:	: :	£	į
Ap	O_{pl}	Ω_{g2}	Op3 Op1	Ogq	O _p
मीग	01	02	03 01	Oq	O ⊨n

उपर्युक्त भारणों में 0, मीर 0 , जमज ादी पति वृत्तं स्तम्म ने उपात योग है आहो ।== 1, 2, 3, p मीर j== 1, 2, 3, वृत्ते है। बारम्बारनार्मों का बुत योग ☑ == 1 है जो दि प्रतिदर्श परिवाल के समान है। साथ ही,

यदि परितकाता बहाते कि कारक A बीट B स्वत्वत है तो (१,४)यो कोटिया (ccll) में बारम्यारता O,) का अप्याजित मान Eij निम्त मूर्या में प्राप्त होगो .—

$$E_{ij} = \frac{O_i \times O_j}{n}$$
 ... (9 24)

सूत्र (924) द्वारा प्रत्येक कोष्टिका की प्रेक्षित कार्यकारता के सगत प्रत्याशित कार्यकारता ज्ञात करली जातो है।

 $O_{i,j}$ व $E_{i,j}$ के मानों को निम्न प्रतिदर्शन $-X^2$ में रखकर परिकल्पना H_{θ} (िक कारक A फ़ोर B स्वतंत्र हैं) को परीक्षा करने नी विधि इस प्रकार है —

$$\chi^{2} = \prod_{i=1}^{p} \prod_{j=1}^{q} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^{2}}{E_{ij}} \qquad(925)$$

 $(p \times q)$ कम की प्राप्तग सारणी की स्थिति म X^2 की स्वतंत्रता कोटि (p-1) (q-1) होती है। यदि α सार्यगता स्तर व (p-1) (q-1) स्व॰ को॰ के सिए X^2 बटन सारणी

(परि० प-4) द्वारा प्राप्त मान x^2 परिकलिन x^2 के मान से कम हो, तो H_0 को सस्वीकार कर दिया जाता है भीर इसके विपरीन स्थिति से H_0 को स्थीकार कर सिया जाता है।

उदाहरण 9.10 अ्यक्तियां नो सस्या छनके स्थान एवं पेस्टीसाइड उद्योग के बारे में प्रभिवृत्ति के प्रतुसार निम्न सारणी में दी गयी है —

वैसीक्षाइड उद्योग के प्रति	रहने	हा स्वान्	
লদিবৃত্তি	नगर	শ্বৰ	योग
श्रुकूल	74	55	129
	(86)	(43)	
प्रतिकूत	43	15	58
	(38)	(20)	
उदासीन	82	31	113
	(75)	(38)	
योग	199	101	300

परिकल्पना H₀ (कि रहने के स्थान और वेस्टीबाईट उद्योग के प्रति प्रभिवृत्ति स्वतन्त्र है) भी परीक्षा, ײ-परीक्षा द्वारा निकन प्रनार नर सनके हैं :--- यह एक (3×2) कम की पासन मारणी है। प्रत्येक कोण बारम्बारता की तक्ष्युवार संद्रात्तिक बारम्बारता सूत्र (924) द्वारा ज्ञान कर सक्ष्ये है।

$$E_{11} = \frac{129 \times 199}{300} = 8557 = 86$$

इसी प्रकार प्रत्य सेट्रानिक वारम्बारताएँ परिकतित की गयी है प्रीर पूर्णीका करते. इन्हें उपर्युक्त सारणी में वोच्डकों में दिया गया है।

सूत्र (9.25) हारा,

$$\chi^{2} = \frac{(74 - 86)^{2}}{86} + \frac{(55 - 43)^{2}}{43} + \frac{(43 - 38)^{2}}{38} + \frac{(15 - 20)^{2}}{20} + \frac{(82 - 75)^{2}}{75} + \frac{(31 - 38)^{2}}{20} = 8855$$

5 प्रतिकात सार्वकता स्तर व दम χ^2 की 2 स्व॰ को॰ के तिए सारणी (परि॰ प-4) शरा प्राप्त काने χ^2 (05) ≈ 5991 है।

परिपण्तित χ^2 बा मान $\chi^2_{\{05\}}$ में ग्रविष्ट है। खनः परिचल्पना H_0 प्रस्तोहन है। इसना प्रशिष्टाय है कि प्रश्नीबाहर उद्योग के विषय में प्रसिद्धार पर रहने के स्थान का प्रसाद परवा है।

दो समान्तर प्रतिदर्शी की सजातीयता की परीक्षा

माना कि दो समग्री ने दो अतिदयों का वयन विद्या गया है जिनमें k वर्ग है। ये वर्ग सा तो पुषक् भूवक होने हैं या मान वर की स्थिति से बनारात होने हैं (भाना कि इन प्रतिदर्शों के k वर्गों में प्रीक्षान.

समयो के प्रतुमार अमन वर्ष बारप्यारनायों के मैद्धानिक प्रमुचन है तो परिकलना Ho (कि दोनो प्रतिक्रमों का चनन प्रामनवन के प्रतुमार स्वस्य नमयों से किया गया है) की प्रीमा करती है जबकि वास्तविक बटन के विषय में कुछ जान नहीं है प्रपीत्

$$H_0: r_1 = r'_1$$
 of $H_1 \neq r'_1$ of lates with each ξ , was: $1, 2, 3, ..., k$

परिकल्पना \mathbf{H}_0 की परीक्षा, \mathbf{X}^2 -परीक्षा द्वारा करने हैं।

प्रतिदर्शेज 省 का मान निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं 🕳

ছবিব	å	বৰ্ণ			
	1 2		3	3K	
1	0,11	O ₁₂	013	Olk	n ₁
2	O ₂₁	O ₂₂	O ₂₃	O_{2k}	n_2
योग	(O ₁₁ +O ₂₁)	(O ₁₂ +O ₂₂)	(O ₁₃ +O ₂₃)	(O1k+O2k)	n ₁ +n ₂ =1

यदि रा भीर रा बात हो तो परीक्षा के हेत्

$$\chi^{2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_{1i} - n_{1} r_{i})^{2}}{n_{1} r_{i}} + \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_{2i} - n_{2} r_{i}')^{2}}{n_{2} r_{i}'} \dots (9.26)$$

यहाँ x^2 की स्व॰ को॰ 2 (k-1) है। यदि $r_1=r_1'$ हो तो एकतित धनुपात.

$$r_1 = r_1^{\ r} = \frac{(O_{11} + O_{21})}{n_1 + n_0}$$
 (9.27)

(926) मे । वा, का (927) द्वारा मान रखने पर

$$\chi^{2}(k-1) = \frac{1}{n_{1}} \frac{k}{n_{2}} \frac{(O_{11} n_{2} - O_{21} n_{1})^{2}}{(O_{11} + O_{21})} \dots (9.28)$$

ब्यवहार मे म (या मं) का धानणन निम्न प्रकार से कर लिया जाता है :---

$$\begin{split} P_1 &= \frac{O_{11}}{O_{11} + O_{21}}, \ P_2 &= \frac{O_{12}}{O_{12} + O_{22}}, \ P_3 &= \frac{O_{13}}{O_{13} + O_{23}}, \\ & ... \, P_k &= \frac{O_{1k}}{O_{2k} + O_{2k}} \end{split}$$

भौर एकत्रित भागणित भनुपात,

$$P = \frac{n_1}{n_1 + n_4}$$

इन धनुषातो को प्रयोग करके X2 का परिकलन निम्न सूत्र द्वारा कर सकते हैं :--

$$x_{k-1}^2 = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{k} \{O_{ii} + O_{2i}\} P_i^2 - n_i$$
 (9.29)

$$X_{k-1}^2 = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{K} O_{ii} P_i - n_1$$
(9.30)

परिकलित χ^2 की, (k-1) हेब० की० व α सा० स्त० पर सारणीव χ χ^2 से तुलना करके परिकल्पना H_0 के विषय में नियमानुसार निर्णय कर लिया जाता है।

चहाहरू 9.11 : यायु के ब्रनुसार उन स्त्रियों य युख्यों का बटन नीचे दिया है जो कृषि (worms) के लिए धनारमक थे।

	चोषियों के दो प्रजित्सों में सायु-वर्ग (वर्षों में) (<4) (5-9) (10-14) (15-19) (20-24) (>25)						योग
<u>पु</u> रुष	6	19	26	13	11	21	96
स्त्री	9	26	18	9	12	16	90
योग	15	45	44	22	23	37	186

परिकल्पना H_0 (कि वे दोनो प्रतिदर्श इसि की इस्टिसे एक ही समग्र के लिये गये हैं) की परीक्षा करना है, तो सूत्र (9.30) को प्रयोग करना उचित है। यहाँ

$$P_1 = \frac{6}{15} = .40$$
, $P_2 = \frac{19}{45} = .42$, $P_3 = \frac{26}{44} = .59$,

$$P_4 = \frac{13}{22} = -59$$
, $P_6 = \frac{11}{23} = 48$, $P_6 = \frac{21}{37} = -57$

$$x^2 = \frac{1}{.516} (6 \times 40 + 19 \times .42 + 26 \times .59 + 13 \times .59 + 11 \times .48$$

$$=\frac{1}{-516}$$
 (50 64) - 96

माना कि S प्रतिवान साथेक्ता रूप पर परीक्षा करती है, तो सारधी (पीर॰ घ-4) द्वारा α = $^{\prime}$ 05 थीर $^{\prime}$ 4 स्व॰ को॰ ने निष् χ^2 $^{\prime}$ (05) $^{\prime}$ 11:1 है जो कि परिस्तिन χ^2 से क्म है। इतः H_0 नो स्वीकार कर निष्या जाता है। इत्तते यह निष्म्यें निक्तता है दि

कृमि को हरिट से स्वियो व पुरवों के प्रतिदर्श एक ही समुदाय से लिए गर्यमाने जा सकते हैं।

(2×2) क्ष्म की बासंग सार्घी

माना कि मिननसम् A मौर B के बेदल दो ही दये हैं और इनकी स्दर्शकरता की परीक्षा करना है। इन वर्षों और जन्दुनार कोष्टिका दारम्दारतामी को निम्न (2×2) मानंग नारणी में प्रवृक्ति किया गया है।

-			
 A/B	B ₁	B.	बीव
A ₁	a	Б	(a+b)
A ₂	c	d	(c+d)
योग	(a+c)	(b+d)	a+b+c+d=1

A और B की स्वतन्त्रता को χ^2 -परोक्षा करने की एक विधि तो यह है कि कोण्डिकाओं की मैदानिक बारम्बारना जात करके ऊपर विषे उदाहरण के अनुसार χ^2 के मान कुम परिकान किया जा सकता है। किन्तु दम विधि का प्रयोग करके मैदानिक बारम्बारनायों a, b, c, और d के परों में रककर χ^2 के लिए एक मुगम जूब आग्न हो जाता है। दस सुब में a, b, c, और d कार्यों के साम अतिस्थायित करके अतिदर्श के χ^2 का मान काता है। जाता है। यहां χ^2 को स्वर के a, b, c, और d कार्यों के मान अतिस्थायित करके अतिदर्श के a का मान काता है। यहां χ^2 को स्वर की० सर्देश एक होती है।

$$\chi^{2} = \frac{n (ad - bc)^{2}}{(a+b) (c+d) (a+c) (b+d)} (9.31)$$

जब कि (a+b) (c+d) (a+c) (b+d) उपीत योगी वा गुमनकन है । परिकृतित x^2 की a सा० स्त० व 1 स्व० को० के लिए चारणीहद x^2 -मान से तुतना करके परिकृत्यना H_0 के विषय में नियमानुसार निर्मय कर लिया बाता है !

ভবাছেকে 9.12: सीनीन (Ceylon) के एक गाँव में फुन्युन कात (Palmonary lesion) सन्वत्वी सर्वेशन के धनवर्गेत रिवर्सों व पुर्णों ने निम्न सारणी के प्रमुत्तार घटनाएँ किसी। सर्वेशन में 344 श्रीनकों का घट्यपन विचा गया।

फुम्फुस सत की घटनाएँ

समिक	स्त्री	पु रप	योग
झत सहित	9	69	78
द्यत रहित	27	239	_266
योग	36	308	n=344

परिकल्पना H_0 (वि थानियों में क्षत की घटना निग (sex) से स्वतन्त्र हैं) की परीक्षा इस प्रकार कर सबते हैं --

उपर्यंस मारणी $\{2 \times 2\}$ तम की है अन χ^2 का मान मूत्र $\{9.26\}$ से परिकतित कर सकते हैं ℓ

िवास का स्रोत British journal of industrial medicine

$$\chi^2 = \frac{344 (239 \times 9 - 69 \times 27)^2}{78 \times 266 \times 36 \times 308}$$

$$= \frac{344 \times 288 \times 288}{78 \times 266 \times 36 \times 308}$$

≈ 124

सारणी (परि॰ ५-4) इसा α = 05 धौर 1 स्व॰ वो॰ के लिए χ_1^2 = 3:841 है। χ^2 वा सारणीबढ मान परिकलित χ^2 वे मान में साधिक है सन वरिकल्पना H_0 स्वीकृत है।

लघ प्रतिदर्श की स्थिति में स्वतन्त्रता-परीक्षा

हिसी परिवरणना नी X²-परीशा वा प्रयुक्त वरने में यह धनुभव किया नवा है कि प्रावत के सवाये भान वा बृहन् प्रनिवर्श यहन की स्थित में प्रतिदर्शय पर कोई प्रभाव नहीं प्रशाह है। परानु तथु वित्रमें की न्यिति सं X²-वटन की करणना समापत हो वाती है। ऐसी यक्षा में सायेवता-गरीशा वा स्थायं होना सम्भव नहीं है वाति प्राविकता वरन में पूछ प्रशास प्रावत विद्यान रहने है जिनको परनुत्त्व (ausance) प्रावत कहते हैं।

यदि (2×2) धानन सारणी में वंधितना वारण्यारना सनु हो सर्धांद्र दांच से बम हो तो x^2 -वंदन वक न समन्य मही रहना है। अन मून (9.31) हारा परिश्तित x^2 पा मान पास्तिन मान के प्रधिक होना है और असामान्य निकर Z जिनका पान्य Ω प्रीर असरण हो χ के बचा हो जाना है। यम तमु अनिदर्श होने पर χ^2 -पिसा में प्रधानि (discrepency) उत्पन्न हो जाती है। यह समगिन निम्न विधियो हारा दूर की जा सकते हैं।

वेट्स-गुढि

क्त तृदि को बस बरने के हेतु बेट्स ने सुमान दिया वि (2×2) बाहर सारमें को सचु बारम्बारता में 0.5 जोड़ दें घीर बृहत् बारम्बारना में 0.5 इन प्रकार घटा दें कि उपात मोन कही रहे सर्पात् इन पर नोई प्रमाद न पटे तो सूत्र (9.31) द्वारा ×2 बा परिवानन करने पर स्वार्थ प्राधिकता मान प्राप्त हा जाना है।

सदत गुडि का बबोग माताय के तुनु तिका कात्रा है। बेटम मुखि के लिए D.S तिता जोडे व पदार्थ हुए जिल्ल शुन द्वारा, 2° का मान सीधे मात कर बकते हैं घोर इस पूत्र हारा प्रकार की मान साथ होता है को D.S जोड़ कर व घटाकर साथ होता है। इसका कारण यह है कि मुद्धि के पश्चात् जो मान झाते हैं उनको विचारधीन रख कर ही सूत्रीकरण कर दियागया है।

$$x_1^2 = \frac{n \left(| ad - bc | - n/2 \right)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(c+d)}(9.32)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\left(| O_{ij} - E_{ij} | - \frac{n}{2} \right)^2}{E_{ij}}(9.32.1)$$

यह ध्यान प्रवरय रखना चाहिये कि उपर्युक्त गुद्धि देवल (2×2) भ्रासन सारणी के लिए ही की जाती है। सूत्र (9.32) में भी सकेतन सूत्र (9.31) के धनुरूप है।

उदाहरण 9.13: हैवे द्वारा महामारी के समय लिये गये एक गांव के भांकड़ा की निम्म सारणी में प्रदक्षित विया गया है।

	हैने से पीड़िय	हैने से पीड़िय नहीं	बोग
टीका लगा या	3	47	50
टोका नहीं लगा था	18	132	150
योग	21	179	200

यदि परिजल्पना H_0 (कि हैजे के रोग को रोजने से टीना प्रभावी नहीं है) नी परीक्षा करनी है तो X^2 -परीक्षा का प्रयोग करना उचित है, दिन्तु यहाँ एन कोटिका की बारस्वारता केवल 3 है सत. बेट्स मुद्ध का प्रयोग नरना या वैन स्पिन सुत्र (9 32) का प्रयोग करना प्रायासकर है। यहाँ दोनो का प्रयोग नरके परीक्षा करने नी विधि दिलापी गयी है। इसके द्वारा पाठकों को यह त्री झात ही जायेगा कि ये दोनो विधियाँ एक ही सूत्र के दो रूप हैं।

येद्स मुद्धि द्वारा, सारणी मे 0.5 को 3 मे जोडकर व 18 से पटाकर फौर 47 में 0.5 जोड़कर व 132 में से 0.5 घटाने पर सारणी ना रूप निम्नाक्ति होता जाता है।

	हैवे से पीवृत	हैने से पीडित नही	योग
टीका लगा या	3-5	46-5	50
टीका नहीं लगा यह	17.5	132-5	150
योग	21	179	200

सत्र (9 26) द्वारा,

$$x^{2} = \frac{200(1325 \times 3.5 - 465 \times 175)^{2}}{50 \times 130 \times 21 \times 179}$$

$$= \frac{200 \times 350 \times 350}{28192500}$$

$$= 869$$

वैवस्पिन सूत्र (9 32) इत्सः,

$$\frac{200 \left(| 13 \times 132 - 18 \times 47| - \frac{200}{2} \right)^2}{50 \times 150 \times 21 \times 179}$$

$$= \frac{200 \left(| -450| - 100 \right)^2}{50 \times 150 \times 21 \times 179}$$

$$= \frac{200 \times 350 \times 350}{50 \times 150 \times 21 \times 179}$$

$$= \frac{24500000}{28192500}$$

= 869 उपर्युक्त परिचलना में स्पष्ट है कि दोना विविवों द्वारा प्राप्त 🗴 दे मान ममान हैं। सारणी (परि० प-4) हारा a=5 बीर । स्व० को० के निए $x_1^2=3$ 84 है क्योरि $\chi^2 \! < \! \chi_1^2$ है, H_0 को स्वीकार कर तिया जाता है। इसम यह तिस्वर्ष निक्सता है कि हैने मे पीडित होने वाटीवालगने से वोई सम्बन्ध नहीं है।

इडिकर-शुद्धि इम गुद्धि नो बी • एम • डाडेबर (V M Dandekar) वे मुभावा। इसवे धानार्थव तीन विभिन्न X^2 ने मान X_0^2 , X_{\pm}^2 , और X_3^2 श्री हुई $\{2 \times 2\}$ आगग मारणी द्वारा कात वरने होते हैं। χ_0^2 वा मान दी हुई सारणी से, χ_{-1}^2 वा मान आरमग सारणी वी न्यूनतम बारम्बारना में एक जोट कर सीर X1 वा मान न्यूननम बारम्बारना में ने एक परावर मूत्र (926) द्वारा परिकतिन वर त्रिया जाना है। स्मृतनम बारम्बाता मे परिवर्तन मोर मन्य कोष्टिशा बारम्बारतामा म समायोजन (adjustment) इम प्रकार वरते हैं कि उपांत सोगों से वोर्ड सन्तर न पड़े। इन ${\cal L}_{9}^{\,2},\,\chi_{1}^{\,2},\,\chi_{2}^{\,2}$ के मान निम्न गूव में रगकर, काई-वर्ग के मुद्ध मान Xo[‡] को ज्ञान कर निया जाता है।

$$\chi_{c}^{2} = \chi_{0}^{2} - \frac{\chi_{0}^{2} - \chi_{-1}^{2}}{\chi_{1}^{2} - \chi_{-1}^{2}} \left(\chi_{1}^{2} - \chi_{0}^{2}\right) \qquad (9.33)$$

साधारणतया डाडेकर मुद्धि, येटम मुद्धि की धपेक्षा अच्छी है। किन्तु, इसकी परिकलित करना विटन है क्योंकि इसमे तीन विभिन्न ४३-सानी को परिकलित करना होता है। यही कारण है कि यह अधिक चलन से नहीं है।

उदाहरण 9.14: उदाहरण (9.12) के निए ही डाउेकर मृद्धि द्वारा ४ र ना मृद्ध मान ४.º ज्ञात नरके परिकल्पना की परीक्षा की गयी है।

$$x_0^2 = \frac{200 (132 \times 3 - 18 \times 47)^2}{50 \times 150 \times 21 \times 179}$$

$$= \frac{200 \times (396 - 846)^2}{50 \times 150 \times 21 \times 179}$$

$$= \frac{200 \times 450 \times 450}{50 \times 150 \times 21 \times 179}$$

$$= 1.4366$$

 χ_{-1}^2 तात करने के लिए बाग्म्बारना 3 में 1 जोड़ वर तथा मारणी में समायोजन करके निम्न रूप में जिलता होता है —

	गीहित	योडित नही	योग
टीका लगा	4	46	50
दीका नहीं लगा	17	133	150
पोग	21	179	200

$$x_{-1}^{2} = \frac{200 (133 \times 4 - 17 \times 46)^{2}}{50 \times 150 \times 21 \times 179}$$
$$= \frac{12500000}{28192500}$$

- ·4434

इसी प्रकार $\mathbf{X_1}^2$ के लिए बार॰ 3 मे से 1 घटावर तथा सारणी में समायोजन करके निम्न रूप में लिखना होता है -

	वीहित	पीडित नहीं	योग
टीका लगा	2	48	50
टीका नहीं लगा	19	131	150
योग	21	179	200

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{200 \left(131 \times 2 - 19 \times 48 \right)^2}{50 \times 150 \times 21 \times 179} \\ &= \frac{200 \times 650 \times 650}{50 \times 150 \times 21 \times 179} \\ &= \frac{84500000}{28192500} \end{aligned}$$

मूत्र (9.33) द्वारा,

2 9973

→ *8296

$$\chi_1^2 = 1.4366 - \frac{1.4366 - 4434}{2.9973 - 4434} (2.9973 - 1.4366)$$

$$= 1.4366 - \frac{.9932}{2.5539} \times 1.5607$$

$$= 1.4366 - .6070$$

महीं भी नहीं निष्मर्थ निष्मता है जो उदाहरण (9.12) में दिया गया है। K-सर्गों की स्थिति में x2-यंगीका

यह पावरवर नही है कि बारम्वारना मदैव एक प्रास्त्य कारणी में दी बाव। विद किमी प्रभित्तराज मा कारक के 12 वर्ष है और उनमें किसी प्रयोग या परीसण द्वारा प्राप्त बारम्बारताएँ तमन 0, 02, 03,, 0, है, एवस्

यदि सरम परिकरणना H_0 , (कि किसी पूर्व जानकारी वा मिदान के मनुमार ये साराकारमाएँ k करों के r_1 , r_2 , r_3 ,..., r_k अनुभात में चिटत होती हैं,) की χ^2 —परीक्षा करती होती है चीर मानमें कि प्रैक्षित काराकारमां कर योग, n है,

नी प्रतिदर्भ परिष्ठाम n को दिने हुए धनुषान भे प्रिमाणित कर निवा आता है। इस प्रकार प्राप्त शत्रुमार कारस्वारनाएँ हो सेद्धान्तिक बारस्वारनाएँ होती है जो कि जनम E1, E4, E4, ..., E4 हैं।

$$\begin{aligned} & \underset{\text{res}}{\text{res}} = r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_k &= r \\ & \text{where } r_1 = \frac{1}{r} \times r_1 & \dots + r_k \\ & \text{self: } i = 1, 2, 3, \dots, k \end{aligned}$$

हमें जानने है कि प्रत्येक (O, ∼ E,) कि हुने प्रहुक बासन प्राप्त होना है जिसकी स्व∗

मो । 1 है। इस प्रकार k बगों नो स्थित में हम 🕫 ना परिकलन कर लेते हैं जबकि

$$y^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 + ... + \chi_k^2$$

यहाँ X² मे नेवल (k − 1) स्वतन्त्र प्रावन हैं धत /ें वी स्व∘वो० (k − 1) है। इ.स. स्थिति में X² ने निए मूत्र (9 2 3) दियाजा चुना है। धत

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

परिस्तित χ² की पूर्व निर्धारित α मा० म्न० व (1 – 1) स्व० कोटि के निए सारणी-बढ χ² से तुलना करके नियमानुसार H₀ के विषय म निर्णय कर नियम जाता है।

चहारूएण 9.15 कोमेटिड से डिघानवरण (double cross) वे घन्तर्गत दो वसपर (strand), तीन वनवर व बार वसपर स अनुपात 1 2 1 होने का अनुपात किया जाता है। एक नये सकरण प्रयोग द्वारा डिघा-बिन्मियी सुरुपा (number of double exchanges) दो, तीन व चार वसवर के सिए जनम 25, 32 और 14 पायो गयी।

परिकरणना H_0 (वि ये सस्याएँ सनुमानित धनुपात का सनुमोदन करती हैं.) की परीक्षा प्रतिदर्भन χ^2 द्वारा इस प्रकार कर सकते हैं —

यहाँ n=25+32+14=71 सीर r=

प्रेक्षित मस्या 25, 32, 14 सैंडान्तिक सरया 1775, 3550, 1775

 \cdot E₁ = $\frac{1}{4}$ × 71 = 17 75, E₂ = $\frac{2}{4}$ × 71 = 35 5, E₃ = $\frac{4}{4}$ × 71 = 17 75 ਸੂਬ (9 23) ਬੀ ਸਰਸਥਜ਼ ਲੋ.

$$\chi^{2} = \frac{(25 - 1775)^{2}}{1775} + \frac{(32 - 355)^{2}}{355} + \frac{(14 - 1775)^{2}}{1775}$$

$$= \frac{5256}{1775} + \frac{1225}{355} + \frac{1406}{1775}$$

$$= 2961 + 345 + 792$$

$$= 4098$$

सारणी (परि० प=4) द्वारा α = 05 और स्व० को σ 2 के लिए χ_2^{ϕ} = 5 991 जो कि 4 098 से प्रधित है। धन H_0 स्वीहत है। इनका प्रतिप्राय यह है कि प्रेसित मध्याएँ प्रतुमानित प्रतुपात का प्रतुपादित करती हैं।

दो वर्गों की स्थिति मे x²-परीक्षा

उपर्युक्त विधि का प्रयोग इस स्थिति में भी किया जा सकता है। किन्तु इस किश्य स्थिति में प्रै का परिकत्तन किता सैद्धान्तिक कारम्बारता ज्ञात किये निम्न मूत्र द्वारा मृगमता से किया जा सकता है। इस स्थिति में प्रै को स्थ० को॰ 1 होती है। यदि दो वर्गों के प्रेक्षित बारम्बारनाएँ व धौर b हैं धौर उनमे बरिश्लानास्वर धनुपान द: 1 हो तो,

$$\chi^2 = \frac{(a - zb)^2}{r(a + b)} \qquad(9 35)$$

यहाँ 🗴 की स्वर्ध को र 1 है।

यह ब्रावरयक नहीं है नि सदेव के पनात्मर बनुपान र । के रूप से ही दिया जाय, बहु रा. रा. वे रूप में भी बहुया दिया जाना है। इन स्थिति संग्रुचे साग करने बनुपान

मो $\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$: 1 के रूप में मदा परिवर्तित दिया जा सकता है । यहाँ $z=\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$ के है ।

परिवासित χ^2 थी, 1 स्व० को० व छ सा० स्व० पर सारणीकद्व χ^2 से सुपता करहे H_0 के विषय में निवसानुसार निर्णय कर निया जाता है।

उसहरण 9 16: भूंग्यनी (Peanut) शोधों हारा नियोजन ने प्रान्तमंत सामान्य वृद्धि प्रष्टुर्गि (normal growth habits) और नम्य लघु प्रष्टुर्ति (sterile brachytic habits) में मनुदारा 15: 1 होने ना सनुमा लगाया जाना है। अयोग बरने पर मामान्य प्रीर सुप्रपृति ने निग्नम्य सहयाएँ 5,388 और 295 आप्त हुई हो परिकलना H_0 (नि मेहिस सरवाएँ 15: 1 सनुपात ना समर्थन बप्ती हैं) वी वरीसा ४३ द्वारा इम मनार पर सबने हैं।

गुत्र (9 35) हारा.

$$x^{2} = \frac{(5388 - 15 \times 295)^{2}}{15(3388 + 295)}$$
$$= \frac{(963)^{2}}{15 \times 5683}$$

= 10 87

सारणी (परि० प-4) हारा a=01 और 1 स्व० को० के लिए $\chi_1^2=663$ $\chi^2>\chi^2_{01.1}$ प्रत नर्प थीकहै 15.1 धनुगत का समर्थन नहीं करते हैं।

मारांग-गणांक

यदि निर्मी ($p \times q$) धानम सारणी में नारहों नी स्वतन्त्रना की वरीक्षा करने पर, स्वतन्त्रना के प्रति परिकरणना H_0 को प्रस्तीकार कर दिया जाना है तो इससे यह निर्ध्य मितामा जाना है कि कारक या प्रशिनक्षण एक दूसरे पर धान्त्रित हैं। किस्तु इससे उनकी पराध्यक्ता की सात्रा का पना नहीं चनता। इस पराध्यक्ता की सात्रा का प्रशास करने के निर्मा प्रमाण कुणाक C का परिकत्तन करना होता है जबकि

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}} \qquad \qquad \dots \langle 9 \ 36 \rangle$$

यहाँ ½ किसी भी म्रासण सारणी के लिए परिकलित मान है और n प्रेक्षित बार-म्यारताओं का योग मर्याल प्रतिदर्श परिमाण है।

C या न्यूनतम मान भून्य होना है जबिक $y^2 = 0$ हो भीर अधिकतम मान 1 के सिन्निकट हो सकता है जो कि 1 से सदैव नम है यदि C का मान 5 से भ्रधिक हो तो कारको या प्रमिलक्षणा में पराध्यता अधिक समभी जाती है और C या मान 0 5 से कम हो तो पराध्यता अस्य समभी जाती है।

इस पराश्रयता माप का लाभ यह है कि उसम घर वे बटन के प्रति कल्पना नहीं करनी पड़ती। चाहे बटन सतत हो या असतत, आसग-भुषाक स्वीकार करने योग है।

सूत्र (9 36) से स्पष्ट है कि C ना मान n पर निर्मर है। ब्रत दो भ्रासग गुणाको की तुनना नरने के लिए यह भ्रावश्यन है कि प्रतिदर्भ परिमाण समान हो ।

भ्रासग गुपान C ना परिकलन तभी नरना चाहिये जबकि ४१ – परीक्षा द्वारा नप्रको वीपराश्रयता के प्रति परिकल्पना नो स्वीवार नियागयाहो मन्यया C का मान ज्ञात फरने नी नोई भ्रावश्यनमानही है।

उवाहरण 9.17 उवाहरण (9 10) मे H₀ को ग्रस्वीकार किया गया है। मही x²=8 855. n=300 है।

मत पराश्रमता वा परिमाण जानने के निए भासग-गुणाक ज्ञात करना भावश्यक है। गुत्र (9 36) द्वारा,

$$C = \sqrt{\frac{8855}{300 + 855}}$$

$$= \sqrt{\frac{8855}{30855}}$$

$$= \sqrt{0287}$$

$$= 017$$

C का मान ग्रस्प है। इससे यह निष्टपं निजनता है कि रहने के स्थान व पेस्टीमाइड उद्योग के प्रति श्रमिनृत्ति में ग्रन्थ सम्बन्ध है।

समंजन-सुब्द्ता की परीक्षा

एक विचाराधीन चर का कोई विशेष बटन होने की कस्पना बहुया की जाती है। जैसे प्राय यह मान लिया जाता है कि प्रनिदर्श का चयन प्रसामान्य समग्र से किया गया है। किन्तु इस प्रभिधारणा की वैधता सदेहपूर्ण है। ग्रत इसकी पुष्टि X²-परीक्षा द्वारा की जाती है जिसकी विधि निस्त प्रकार है —

परीक्षा में हेतु प्रेक्षित मानो O ग्रीर उनमें तदनुसार प्रत्याधित सानो E मो जात नरता होता है। प्रत्याधित मान किस्पत बटन में प्रयोग मन्से जात किये जाते हैं। इन मानो O व E को सूत्र (9 23) में रक्षर χ^2 में मान का परिकान कर निया जाता है। यहाँ X^2 की स्व॰ को॰ (k-m-1) होतो है, जहाँ k धर्मों की सन्त्या है प्रीर m उन प्राचलों की सक्या है जिनका प्रतिदर्भ द्वारा धायकन किया गया है। जैसे प्रशासान्य बटन की प्रतिधारका की धेपना की रिशा करने से यदि $= a \circ a$ बा धायकन X धीर $\le a$ होगा और इस स्थित से X^2 की स्व॰ को॰ (k-3) होगी। यदि ध्वामो बटन की बंधता की परिशा करनी है तो X^2 ती स्व॰ को॰ (k-2) हामा बचार्क इस बटन स एक ही प्राचल का प्राचल करना होता है। इसी प्रकार किसी सी अन्य करियत बटन के लिए X^2 की स्व॰ को जात कर अवते हैं।

परिकृतित $X^2 क - a$ सार्यकता स्वर व (k-m-1) स्व० को० के लिए सारणीवद X^2 से तुलना करने निर्णय कर लिया जाता है कि प्रेक्षण कृत्यित बटन बाले समय से है या नहीं। इस विधि ने प्रयोग को निम्मानित उदाहरण द्वारा दिलाया गया है —

उदाहरण 9.18 एक 200 पृष्ठा की पुस्तक म मजुद्धियों की सम्या मीर तत्रनुमार पृष्ठों की सक्या इस प्रकार थीं —

चतुन्दियी (x)	दुष्यों को बच्या (f)	(fx)
0	65	00
1	45	45
2	47	94
3	28	84
4	10	40
5	5	25
थोग	200	288

यह देशने ने लिए नियह बटन प्यासी-बटन का पालन करना है, समजन-मुख्यां भी परीला करनी है जी इस प्रकार है —

हम जानते हैं कि प्लामी बटन ने लिए ह सक्ततायों की प्राधिकता,

$$P(r) = \frac{e^{-m} m^{f}}{r!}$$

भौर (ा 🕂 1) सक्तताची की प्राधिकता,

$$P(r+1) = \frac{e^{-m} m^{r+1}}{(r+1)!}$$

$$\therefore \frac{P(r+1)}{P(r)} = \frac{m^{r+1}}{(r+1)!} \times \frac{r!}{m^r}$$

या
$$P(r+1) = \frac{m}{r+1} P(r)$$

सफलताम्नों की प्राधिकता की प्रनिदर्श परिमाण a से गुणा करने पर प्रत्याधित बार-म्बारता ज्ञात हो जाती है।

यहाँ
$$P(0) = e^{-m}$$

$$P(1) = m \times P(0)$$

$$P(2) = \frac{m}{2} \times P(1)$$

$$P(3) = \frac{m}{3} \times P(2)$$

उपर्युक्त सूत्रो एवं सम्बन्धो की सहायता से प्रत्याधित बारम्बारता ज्ञात की गयी है :-

$$P(0) = e^{-m} = e^{-1\cdot44}$$
माना कि $y = e^{-1\cdot44}$
 $\log_{10} y = -1\cdot44$
 $\log_{10} y = \frac{-1\cdot44}{2\cdot3026}$ (*.* $\log_{10} 10 = 2\cdot3026$)
 $\therefore \log_{10} y = -0\cdot62538$

$$E_1 = P(0).n = 0.237 \times 200 = 47.4$$

$$E_2 = P(1)$$
. $n = m.n P(0) = m E_1 = 683$

$$E_3 = P(2)$$
. $n = \frac{m}{2}$. $P(1)$. $n = \frac{m}{2}$. $E_2 = 492$

$$E_4 = P(3)$$
. $n - \frac{m}{3}$. $P(2)$. $n = \frac{m}{3}$. $E_3 = 23.6$

$$E_8 = P(4)$$
, $n = \frac{m}{4}$ $P(3)$ $n = \frac{m}{4}$ $E_4 = 85$

$$E_6 = P(5)$$
 $n = \frac{m}{5}$ $P(4)$ $n = \frac{m}{5}$ $E_6 = 2.4$

प्रेशित तथा प्रत्याणित बारम्बारताएँ जात होने के प्रश्नात् प्तासी बटन के समजन की प्रश्नात् प्तासी कर सकते हैं।

О,	E,	$\{O_i - E_i\}$		(O E \1)
		(0/-1/		$(O_i - E_i)^2/E_i$
6\$	474	176		6 53
45	683	23 3		7 94
47	49 2	22		0 09
28	23 6	4 4		0 82
10 }=15	8 5	=109		
5)	24	41		1 56
			यश	1624

उपमुक्त सारणी में ब्रातिम पक्ति की बारम्बारताओं की पौजवी पक्ति से इस कारण जोड दिया गया है कि ब्रातिम प्रत्यालित वारम्बारता 5 से क्स है। इस प्रकार यहाँ

K = 5 है भीर X² की स्व∘ को० 3 है।

5 प्रतिगत सार्यवता स्तर्व 3 स्व॰ वो॰ वे तिए χ^2 वा सारणी (गरि॰ प-4) इत्तरा प्राप्त मान 7 815 है जो कि χ^2 के परिवत्तित नान 16 94 से वस है। धत परिकल्पना, कि दिया हुमा बटा प्लासो-बटन है धस्तीकृत है।

हिल्लमी (1) कार सारणी में प्रशासित बारम्बारतामा का योग 200 से पुप कम है। यह प्रभार प्रशासित बारम्बारतामी के निकटन के कारण है। विन्तु यह परीक्षा की इस्टिस से उपेसानीय है।

(2) यदि निसी वर्ग की प्रत्याचित बारम्बारता 5 से कम हो थी प्र²-बटन के सालत्य को बनांदे रखते के लिए इस कम की निर्मा सम्बन्ध प निसा देते हैं जिनम कि ऐसा करना उचित हो और साथ ही प्रत्यासित बारम्बारता 5 था 5 से व्यक्ति हो।

प्रसामान्य समग्र के लिए $\mathbf{H}_0 = \sigma^2 = \sigma_0^2$ की परीक्षा

माना कि एक श्रतायान्य समग्र से n परिमाण के प्रतिमाण के प्रतिसंग ना चवन निया तथा है और इन चवनपुत एक्की पर प्रतिदश प्रेक्षण X_1 X_2 $\lambda_{2^{n-1}}$, X_n है। इन प्रेतायों

के साधार पर परिवल्नना H_0 . $\sigma^2 = \sigma_0^2$ की H_1 : $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ के विरद्ध परीक्षा मित-दर्शन χ^2 द्वारा को जानी है. जहां σ_0^2 एक जान संबर मान होता है !

ш पार्थनता स्तर पर परिवत्सका Ho को स्वीकार कर लिया जाता है यदि असमिका

$$\chi^{2}(\alpha/2) (n-1) < \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \overline{X})^{2}}{\sigma_{0}^{2}} > \chi^{2}(1 - \alpha/2)(n-1) \dots (9.37)$$

सत्य हो सौर जहाँ X² ना व्य० नो० (n - 1) हो।

बन्यया Ho को बस्वीकार कर दिया जाना है।

प्रसामान्य समग्र के लिए H_0 $\sigma^2 < \sigma_0^2$ को H_1 $\sigma^2 > \sigma_0^2$ के दिरद परोसा के लिए भिन्ना निक्या निम्नाबिन होगा है — यहाँ मभी सकेतन क्रमर दिये वर्णन के प्रमुक्त हैं।

Ho को ग्रस्वीकार कर ि जाता है यदि धसमिका

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2} > \chi^2(1-\alpha) (n-1) \qquad \dots (9.38)$$

सत्य हो । ग्रन्थया Hp नो स्वीनार रूर लिया जाता है ।

इसी प्रवार H_0 $\sigma^2 > \sigma_0^2$ की H_1 $\sigma^2 < \sigma_0^2$ के विरद्ध परीक्षा के लिए निक्य निम्न प्रकार है —

Ho को प्रस्वीकार कर दिया जाना है कि यदि ध्रमसिका

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 / \sigma_0^2 \le X^2 (\alpha) (n-1) \dots (9.39)$$

सत्य हो ।

भन्यया Ho को स्वीकार कर तिया जाता है।

िक्षणी : यह प्रध्याय 7 में दिया जा चुका है कि $\frac{(n-1)}{\sigma_0^2}$ का χ^2 —बटन होता

है। इसी तच्य का क्यर परिकल्पना परीक्षा मे उपयोग किया गया है।

एक प्रसामान्य बंटन के प्रसरण 🕫 का विश्वास्यता अन्तरास

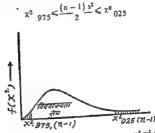
प्राय. समय मे परिवर्तिता जानने के लिए प्रनिदशें हारा 🕫 के भागणर 5° का परि-कलन करना होता है। समय माध्य की नांति, समय-प्रवरण '02' के विश्वास्थता सन्तराल को भी जात करने की भावस्थकता होनी है। प्रसामान्य समय की स्थिति में प्रतिदर्शन X² को सहायदा से इनका परिकलन किया जाता है।

माना कि प्रतिदर्श में n प्रेसक $X_1, X_2, X_3 ... X_n$ हैं बौर इनके द्वारा परिकल्पित प्रसरण s^2 है जहाँ,

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \underset{i}{x} (X_i - \overrightarrow{X})$$

यदि 95 प्रतिशत विश्वास्थता प्रन्तराज ज्ञात करना है तो सबयी काई-वर्ग बटन सारणी से राशि χ^2 .975 भीर χ^2 .025 ज्ञात कर सेते हैं वयीकि χ^2 के कोई मान भी, जिसका याईच्छिक प्रतिदर्श से परिकलन किया गया हो, इन दो सीमाओं के प्रन्यर होने की प्रायिक्ता = 975 - 025 = 95 है।

भतः 🕫 का 95 प्रतिशत विश्वास्थता घन्तराल निम्न सूत्र द्वारा झात कर सकते हैं 🗕



विष 9 4 ·95 विश्वास्थता क्षेत्र को प्रदक्षित करता हुआ काई-वर्ग बटन कर । $\frac{1}{4} \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \frac{1}{4} \times \frac{1}$

$$\sum X_i^2 \times X_$$

मा
$$\frac{\Sigma X_1^2}{1}$$
 $\frac{\Sigma X_1^2}{2}$ (9.40) $\frac{1}{\chi^2}$ $\frac{1}{$

मदि क्ति प्रत्य प्रविधत के लिए विक्यास्थवा प्रत्नरात आत करता हो तो ४² के मान उसी के भनुसार सारभी द्वारा जात करके (9 40) के समस्य मूत्र निसकर कान कर सफते हैं।

उदाहरण 9.20 . बारह वर्ष की मामु के बच्चो की ऊँचाई में समग्र प्रसरण का 95 प्रतिशत विश्वास्यता अन्तराल जात गरना है।

भीर n=53 ज्ञात हैं। (यहाँ चर X ऊँचाई को निरुपित करता है प्रार अतिदर्श परिमाण त है)

$$X_1^2 - \frac{(X_1)^2}{n} = 89414850 - \frac{(72110)^2}{53}$$

विश्वास्यता ग्रन्तराल ने लिए.

$$\frac{3044\ 3302}{73\ 8} < \sigma^2 < \frac{3044\ 3302}{34\ 0}$$

सारणी (परि॰ घ-4) द्वारा,

णा (पार॰ घ-4) डारा,

$$x^{2}(025)(52) = 73.8$$
 और $x^{2}(975)(52) = 34.0$

क्रपर दी हुई ग्रसमिना से स्पष्ट है कि 💅 की 95 प्रतिशत सा॰ स्त॰ ५、 उपरि सीमा 89 54 भीर निम्न सीमा 41 15 है।

बो प्रसामान्य समग्रो के प्रसरणों की समानता की परीक्षा

माना कि दोनो प्रसामान्य समग्रो मे से स्वतंत्र एवं याहिन्छक प्रतिदश्ती का चयन किया जाता है जिनके परिमाण कमश n, और n, है। इन प्रतिदशों के प्रेक्षण निम्नाकित है -

प्रतिदर्श 1	प्रतिश्रमें 2
X ₁₁ X ₁₂ X ₁₃	X ₂₁ X ₂₂ X ₂₃
X ₁₂	X ₂₂
X ₁₃	X ₂₃
	.
X _{ln}	X ₂₀

यहाँ प्रेक्षणो Xij मे अनुलग्न 1 प्रतिदर्श सख्या और j प्रेक्षण सख्या को निरूपित करता है।

इन प्रतिदशों का अलग-अलग प्रसरण निम्न सूत्रो द्वारा परिकलित कर लिया जाता है । माना कि पहले प्रनिदर्श का प्रसरण s,2 और दूसरे का s,2, है, जबकि

$$\begin{split} & s_1{}^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \left\{ \begin{array}{l} n_1 \\ \sum \\ x \\ 1 = 1 \end{array} X_{11}^2 - \frac{(xX_1)^2}{n_1} \right\} \\ & s_2{}^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \left\{ \begin{array}{l} n_2 \\ \sum \\ 1 = 1 \end{array} X_2{}^2 - \frac{(xX_1^2)}{n_2} \right\} \end{split}$$

यह मध्याय 6 में बताया जा चुका है कि दो प्रसरणा के मनुपान का बटन Fहोता है

 $H_0 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ की $H_1 = \sigma_1 \neq \sigma_2^2$ के विरद परीक्षा, F-परीक्षा द्वारा करते है। जबकि

$$F_{(\nu_1 \ \nu_2)} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \tag{9.41}$$

प्रतिदर्शन (9 41) में बड़े प्रतिदर्श प्रसरण को s₁2 निया जाता है।

यदि परिकलित F-मान ■ सा० स्त० व (🛂 🛂 स्व को {जबकि 🛂 == (n₁ - 1) मीर $y_2=n_2-1)\}$ के लिए $F_{\left(\alpha/2\right)}\left(y_1\ y_3\right)$ से बढ़ा हो, तो H_0 की महदीशार

कर दिया जाता है और यदि वम हो तो स्वीकार कर लिया जाता है। इसी प्रकार सदि परिस्तित-F का मान सारणीव $\mathbb{Z}^F(1-\alpha/2)$ (\mathbb{F}_1 \mathbb{F}_2) से क्य हो तो H_0 को

प्रस्वीकार कर दिया जाता है।

यदि H_0 $\sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2$ की H_1 $\sigma_1{}^2>\sigma_2{}^2$ के विरद्ध करनी हो सो प्रसिदशय Fका ही प्रयोग करना होता है कि तु इस स्थिति से परीक्षा एवं पुक्छ परीक्षा है। यदि परिकलित $F < F_{\left(1-\alpha\right)}\left(\nu_1 \ \nu_2\right)$ हो तो H_0 प्रस्वीहत है।

इसी प्रकार ${
m H_0}$ ${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2$ की ${
m H_1}$ ${\sigma_1}^2 < {\sigma_2}^2$ के दिरद्व परीक्षा ने लिए एक पुन्छ F-परीक्षा करनी होती है।

यदि परिकत्तित $F{>}F_{\left(a\right)}\left(v_1\;v_2
ight)$ हो तो H_{0} को ग्रस्वीकार कर दिया जाता है।

जद हरण 9 20 सात वर्षको झायुके 67 बच्चो के सौर घाठ वर्षकी धायुके 100 कण्या के सिरो की परिधि सेंटीमीटर में नापी गयी सौर परिकलन गरने पर हुने प्रतिदर्शी के प्रसरण कमझ 3 12 कौर 3 02 प्राप्त हुए।

परिकल्पना कि साठ वर्ष व घाठ वर्ष की घायु वे बच्चों के शिर की परिधि के प्रसरण

महा H_0 ${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2$ की H_1 ${\sigma_2}^2
eq {\sigma_3}^2$ के विरुख परीसा निम्न प्रवार कर समान है। सकते हैं --मूत्र (9 40) वे धनुमार,

$$F = \frac{312}{102} = 1033$$

यहां H_0 नो दो-युच्छ परोक्षा करनी होगी । माना कि 10 प्रतिशत सार्यकता स्तर पर परोक्षा करनी है यहाँ ν_1 =66 और ν_2 =99 है ।

सारणी (परि॰ घ-5·2) द्वारा F(05) (66, 99) = 1 47 है। यह मान परि-

क्तित F ने मान से घषिन है घत. H_0 स्वीकृत है । यदि H_0 . $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ की H_1 $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ के विरद्ध परीक्षा करनी हो तो एक पुक्स F—परीक्षा करनी होगी । इसके विए F(90) (66.99) =0 733 है । यह मान

परिकतित F के मान से दम है। बत Ha स्वीकृत है।

धनेको प्रसामान्य समग्रों के प्रसरणो की सजातीयता की परीक्षा

माना कि १ समग्र है भीर इनके प्रसरफों की समानता के हेनू परिकल्यना,

$$H_0 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \dots = \sigma_k^2$$

की, H_1 : (कि कम से कम कोई दो प्रसरण यसमान है) के विरुद्ध परीक्षा करनी है जबकि

न्मस्रो के कमया प्रसरण हैं। यहाँ 1 > 2 होना धावश्यक हैक्योंकि यदि 1 = 2 हैतो H_0 की F-परीक्षा करना उचित है। H_0 की परीक्षा विभिन्न रोतियो द्वारा की जा मकती है किन्तु यहाँ केवल बार्टनेट (Battlett) की विधि का हो वर्षन जिया गया है।

बार्टलेट-परीक्षा

माना कि k नमधो में से λ स्वतन्त्र प्रतिहर्कों का वयन किया गया हु। जनके परिमाण कमसः $n_1, n_2, n_3,, n_k$ हैं भौर इन प्रतिदर्कों द्वारा परिकतित कि सी पर X के प्रसरण कमसः $s_1^2, s_2^2, s_3^2,, s_k^2$ हैं।

Ho की परीक्षा के हेत् प्रतिदर्शंज X2 निम्नाकित होता है .--

$$\chi^{2}_{k-1} = \sum_{i=-1}^{k} (n_{i}-1) \cdot \log_{\theta} \bar{s}^{2} - \sum_{i=-1}^{k} (n_{i}-1) \log s_{i}^{2} (9.42)$$

অৰ্থি

$$\overline{s}^{2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} (n_{i} - 1)} \left\{ \sum_{i=1}^{k} (n_{i} - 1) s_{i}^{2} \right\} \qquad(943)$$

सूत्र (9.42) द्वारा प्राप्त ४² के परिकतन को सुगम बनाने के लिए सपुनगक (log) को प्राप्तार 10 के प्रति सेना चाहिये धौर इस प्रकार को मान प्राप्त हो उसको log, 10 सर्पाद् 2·3026 से गुमा कर देना चाहिये जिससे ४² का मान खाछार ८ के प्रति प्राप्त हो जाता है। (प्राप्तार परिवर्तन के सिए परिकास्ट (ख-6) को पढ़िए)। मून (9 42) द्वारा मान्त x^2 ना माने बुख प्रमिनत होता है और कुछ ऊर्ध-मुसी होता है। यह x^2 ना बुद्ध मान आत नरने के लिए x^2 से सबोधन करना होता है। x^2 नो एक गांधन कोरक (concetion factor) C से एन्न दे दिया जाता है। जबकि

$$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{x_i(n_i - 1)} \right\} \quad (9.44)$$

यदि $\frac{\chi^2}{C}$ का मान सारणीवढ $\chi^2_{\alpha,\,k\,\sim\,l}$ से बंदा हा तो H_0 को प्रस्तीकार करना

होता है। इसका घर्ष है कि k प्रसरणों से क्या से क्या कोई दो प्रसरण एक दूसरे से सार्थक रूप में भिन्न है। यदि $\chi_c^2 < \chi_{-\alpha, \ k-1}^2$ हो तो H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है। इसका क्रमिश्राय है कि k प्रसरण सजाबीय है।

जबाहरण 9.21 एक लाक्षणिक सर्वेक्षण के घन्तर्गत विभिन्न प्राप्तु के बच्चो के भारों में प्रसरण मोर प्रतिवर्ध परिमाण निम्नाकित थे —

1	बरमु	प्रतिपत्तं भरिनाण	व्यतिहरं प्रमुख	प्रसाय के सञ्चनक
	5 वर्ष	54	4 72	674
(6 "	102	4 27	630
	7 ,,	77	7 23	-859
	8 ,,	100	7 67	-885
9	9 ,,	75	7 23	859
16	٥.,	81	11 68	1.067

परिकरपना H_0 कि S से 10 वर्ष तक की भागु के बक्कों के भारों में समान विजनत होता है सर्पात्

$$H_0 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \sigma_5^2 = \sigma_6^2$$

की, H₁ (कम ने कम कोई दो प्रसरण ग्रसमान है) के विवद परीता, बार्टनेट-परीसा द्वारा कर सकते हैं।

सूत्र (9 43) द्वारा,

$$\overline{s}^2 = \frac{1}{483} (53 \times 472 + 101 \times 427 + ... + 86 \times 1168)$$

$$s^2 = \frac{1}{483} (3459 66)$$

= 7:162

सत्र (9 42) द्वारा.

 $x^2 = \{483 \log_{10} 7.162 - (53 \times .674 + 101 \times .630 + 80 \times 1.067) \times 2.3026$

 $=(483 \times 0.855 - 401.177) \times 2.3026 = 11.788$

सूत्र (9 44) द्वारा,

$$C = 1 + \frac{1}{3 \times 5} (0.780 - .00207) = 1 + \frac{.07593}{15}$$
$$= 1.00506$$

संशोधित
$$x^2 = \frac{11.788}{1.00506} = 11.728$$

सारणी (परि० प-4) द्वारा α =-05 ता० स्त० तथा 5 स्त० को० पर χ^2 का मान 11 7 है। परिकत्तित χ^2 , सारणीवढ χ^2 के मान से सिधक है। यद परिकल्पना H_0 को मस्वीवार कर दिया जात. है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि कम से कम कोई दी प्रसरण एक दूसरे के समान नहीं हैं सर्वांत्र H_1 स्वीकृत है।

प्रस्नावसी

 रेनाड-फिनामना (Raynaud's Phenomenon: RP) को व्यापनता घूल्रपान करने वालो और नही करने वालों में निम्न सारणों ने दो गयी है:—

RP की व्यापकता

শনিক	धूम्रपान करने वाले	घूजपान न करने वाले
मशीन पर काम करने वाले	49	42
जंगलो मे मशीन पर काम करने वाले	19	5
घरेलू	9	9

हो इस परिकल्पना नी परीक्षा नीजिये कि श्रमिनों के प्रनार और घूमपान नरने बातों में (RP) नी व्यापकता नी दृष्टि से नोई सम्बन्ध नहीं है ? एक प्रस्पताल मे वर्ष के विभिन्न महीनों मे बच्चो के जन्मने की सहया इस प्रकार है:---

महीना: जनवरी, फरवरी, मार्च, अप्रेस, मई पून जन्मने की संस्था 132 119 123 101 107 90 जुनाई, जगस्त, सिनम्बर, प्रकटूबर, नवम्बर, दिसम्बर, 115 113 139 136 137 146

परीक्षा कीजिये कि वर्ष के विभिन्न महोनी में जन्मने की संस्था समान रूप से बंदित हैं?

 दो सोधनो का सलूचे पर प्रभाव देखने के लिए अयोग क्या गया । इस प्रकार प्रति पेड द्वारा प्राप्त धलूचो को सुखाने पर निम्न मात्राएँ प्राप्त हुयी ।

अव पर द्वारा प्राप्त धसूषा का सु	वान पर । वस्त मात्राए प्राप्त हुया १	
घोषन A (भार किमोडाम में)	घोषन B (चार किलोबाम वै)	
31 3	25 4	
32 1	141	
42 0	40 0	
48 D	34 3	
68 8	37 3	
48 G	40 6	
458	28 6	
32 1	11-1	

परीक्षा नीजिये वि दोनो बोधनो ने माध्य प्रभाव में सार्थन घन्तर है या नहीं,

4. सिद्ध कीजिये कि एक (2×n) जम की बागग गारणी के निए

$$\chi^{2} = \underset{f}{\mathbb{I}} N_{1} N_{2} \frac{\left(\frac{B_{1}r}{N_{3}} - \frac{A_{2}r}{N_{3}}\right)^{2}}{a_{2}r + a_{2}r}$$

जब वि s_{2r} भीर s_{2r} ह वें स्तम्भ से बारम्बास्ताएँ हैं और N_{2} व N_{3} रोजों पत्तियों की बारम्बास्तामी का योग हैं. (स्तपरा, 1953)

 बाबई की 98 क्युड़ा मित्रों के प्रतिमेग द्वारा प्राप्त एक वर्ष थे दुर्यटनाओं की सत्या निम्न प्रकार थी .---

सारियकी के सिद्धान्त ग्रीर अनुप्रयोग

वर्षं मे दुर्घटनामो की सस्या	0	1	2	3	4
मितो की सस्या	24	38	22	11	3
4.1					

(1) इस न्यास मे प्वामा वटन का समान नीजिये।

(बम्बई, 1966)

6 एक ममूह के निम्नाकित चायु बटन की प्रमायान्य बटन मे, ममजन मुस्टुता की परीक्षा की जिदे —

सायु (बची में)	≖श्तिकों की सरया
10 20	3
20 30	8
30 — 40	14
40 — 50	21
50 — 60	7
60 — 70	6
70 — 80	2
80 90	1

- 7. एक महाविद्यालय के जलपान-गृष्ट से प्रति दिन जाने वालो को सस्या 500 में से 350 थी। किन्तु कुछ समय पश्चात् दरों में लयसप दूनी वृद्धि कर दी गयी। मब प्रति दिन जाने वालो की सस्या 250 रह गयी। परीक्षा कीजिये कि जल पान करने वालो के अनुपान में सार्थक कमी है या नहीं-1
- 8 एक विशेष प्रकार के घाये के 50 टुकडो के प्रतिदर्श की परीक्षा की गयी। इन घागों की माध्य टूटने की सामध्य 14 5 पीड थी। परीक्षा के तिये कि यह घायों का प्रतिदर्श उस समग्र से है जिसकी भाष्य टूटने की शक्ति 15 में पीड भीर मानक विचलन 22 पीड है।

(बलकत्ता, 1963)

पुरु हिसान एक सहय को दो खेतो A व B मे उगाता है। खेर A में दम रुपये प्रति एकड भीर खेत II में बीस रुपये प्रति एकड खाद डालता है। दोनों खेतो का पिछले पाँच वर्षों का गृद्ध प्रतिफल इस प्रकार था —

वर्षं		1	2	3	4	5
सेत A (रपये प्रति एकड)	-	34	28	42	37	38
स्रेत B (रपये प्रति एनड)		36	33	48	38	50

यदिग्रन्य वार्ते समान हो, तो बताइये वि विमान को बाद पर प्रधिव स्वय करना सामग्रद है या नहीं।

(पजाब 1966)

- (उत्तर t=3814, है।)
- ख्र चयनकृत मल्लाहो की ऊँचाई 66", 67", 68", 69", 71", 72" है। 10. दस चयनकृत सिपाहियो नी ऊँचाई 61", 62", 65", 66", 69", 70", 71", 72", 69" मौर 73" है। बवाइन ऊँपाइयो से निय्कर्ष निक्सता है वि सिपाहियो की माध्य ऊँवाई, मल्लाहो की माध्य ऊँवाई, से कम है ?
- घोटी सामान्य दुकानो ने प्रतिदर्श से यह मूचना प्राप्त हुई ---11.

	3	
तहरों में	यौंकों में	হাদ
17	18	35
3	12	15
20	30	50
	महर्से वें 17 3	17 18 3 12

च्या यह वहाजासवताहै कि कहरी की अपेक्षा गाँवों से न्त्रियों द्वारा छोटी सामान्य दुरानें मधिक वालित हैं ?

(मेरठ, 1969)

[3तर x2=3 57; हो]

एक पदार्थ ने फुटकर भावों नी चार शहरों Λ, Β,C, D ये तुलना करते के लिए चयनहरु दुहानी से एवं पदायें की दरें पैसी से एक दिन की गयीं जो कि 12. इस प्रवार वीं —

A · 82, 79, 73, 69, 69, 63, 61

84, 82, 80, 79, 76, 68, 62

68, 68, 66. 88, 84, 80,

D · 79, 77, 76, 74, 72, 68, 64

क्याइस स्थास से यह पता थलता है कि इन चार ग्रहरों के प्रावी से सन्तर (बाद= सी= ए= बार=, 1957) सार्पंत है ?

- एक उद्दीपन (stimulus) को 12 मरीजो को देने पर उनके रक्त दाद में निम्न खुदियाँ हुई:—
 - 5, 2, 8, -1, 3, 0, 6, -2, 1, 5, 0, 4 क्या यह निष्कर्षे निकासा जा सकता है कि इस उद्दीपन में सामान्यता मार्यक वृद्धि होती है ?

(उदयपुर, 1968)

- 14 पहले दिये गये प्रश्न मुक 12 के न्याम को प्रयाग करके परीक्षा की निये कि निवयों द्वारा चालिन दुवानों वा शहरों में व गाँवों में धनुपात वहीं हैं।
- क्षय रोग मे पशुर्भों के प्रति रक्षण हेनु एक प्रयोग किया गया और इसमे निम्नानित परिणाम प्राप्त हुए

	शय-	-रोग से
	प्रमारित	बन्नमारिक
टीना लगा	12	26
टीका नहीं लगा	16	6

बनाइये कि टीका क्षय रोग की रोक शाम मे प्रभावी है या नहीं।

(बाई॰ ए॰ एम॰, 1942)

माठ विभिन्न शोधनो ने लिए चार समयो पर उपलब्ध नाइट्रोजन की माजा इस प्रकार पी:---

			समय	
যীঘন	30 হিন	50 হিন	70 स्ति	100 হিন
1.	32 0	20 0	18 0	160
2.	45 0	110	42 0	120
3.	23 0	23 0	23 0	70
4.	24 0	38 0	53 0	55 0
5	64 0	53 0	54 0	48 0
6	41.0	91 0	99 0	43 🛭
7.	60 0	350	51 0	55 0
8.	81-0	42 0	43 0	36 0

परीक्षा कीजिये कि उपलब्ध नाइट्रोजन में विभिन्न समयो पर विवतन समान है। किसी सकरण (cross) के बन्तर्गत F₂ वियोवन (segregation) में गहरे भूरे

 किसी सकरण (cross) के अन्तर्गत F₂ विजीवन (segregation) में गहर भूरे श्रीर पीले भूरे, पीपो की सस्या त्रमच 193 और 63 थी। इन दो प्रकार के थोद्यो की सक्या में सैद्धान्तिक भनुपात 3 1 समस्त्र जाता या । तो परीक्षा की जिये कि प्रेशित बारम्बारतामो की प्रत्याचित भनुपात से सहमति है।

विसी सवरण के बातर्गत Fे₂ वियोजन मे पौप विधिन्न रनो वे पेड़ो की सस्या 18 मे प्रत्यानिल धापुपाल 27 9 9 3 16 वा।सनरण करने पर इन रगो ने पौछो नी सस्यात्रमस इस प्रनार यी ---

रंग	वीर्घों की संस्था	
गहरा भूरा	110	
गहरा अरुः काला	40	
	38	
पीला भूरा	17	
साल भूरा हत्ना पीला	18	

नया प्रेक्षित योधो को सस्या प्रत्याशित अनुपात का समर्थन करती है ?

एन तिनते को 150 बार उछामने पर क्तिनी बार ऊपर की बोर शीर्य माथे कि 19 सिवरे की अनभिनता के प्रति परिकल्पना अस्वीकार हो जाय ?

250 पाशव-शेप मे, निमानित विन्दु ऊपर की भीर घाये --20

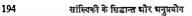
,	PTT	2	बिग्दु	75
•	41		विन्द	40
	_		•	80
4	या		बिन्दु	55
		6	बिन्दु	

परीशा कीजिये कि पाशक बाधिनत है या नहीं।

सामान्य समय, जिसने प्राचल थ=60 थीर € = 324 है, से एक 100 मूर्तिटो के प्रतिदर्भ का चमन किया गया तो कताहरे कि कितने प्रतिका पूनिट ऐसे हैं 21 जिल्ला समग्र माध्य से विचलन 4 या इससे बांधिन है ?

एक सौदागर ने दो जिल छापो बाले बत्बों में शैं प्रायेक के 50 बल्ब सरीदे। द्वा सस्यो की परीक्षा करने पर पता चला कि साप A के बस्बो का माध्य जीवन-22 नास 1282 चटे मीर मानन विचलन 80 चटे है। सदिसाप B ने बस्बी डा माध्य जीवन काल 1208 घटे और मानक विवसन 94 घटे है तो क्या इन दो प्रकार ने बस्थों में भिन्नता है ? (पजाब, 1968)

उत्तर हो।



- 23. एक बढे शहर से 600 व्यक्तिंगों के प्रतिदर्श का संसम्माविक रोति द्वारा चयन विचा गया। इस प्रतिदर्श में 53 प्रतिवात पुरुष थे। क्या यह सदेह करना उचित
 - है नि इस सहर में स्त्रियों व पुरषों की सख्या बराबर है ? (बम्बई, 1969) (जत्तर : सख्या समान है ।
- तिद्व कीजिये कि एक (p x q) कम नी भावन भारती द्वारा परिवित्तत x² ना मान नमी भी n (p − 1) था n (q − 1) से भ्रधिक नहीं हो सन्ता; भर्षात् x² < n (p − 1) था x² < n (q − 1).

स्थात् रूप्ताः (p-r) या रूप्ताः (q-r). दिष्यणी: प्रमानतो में दिश्वविधानतो से तिए गये प्रश्न मून रूप में सदेशी माषा में ये जिनका यही हिन्दी प्रनुवाद दिया यथा है।



घाष्ट्रिक बाल में सांस्थिती की अनेको जियाओं में से साब्धितीय अनुमान उपयोग की हिष्ट से प्राप्ययन का मुस्य विषय है। इसके धन्तर्गत हमे दो प्रकार की समस्याधों से सम्बन्ध रतना होता है। एक तो नमग्र प्राचलो का भागभन ग्रौर दूसरे समग्र प्राचल या प्राचलों के प्रति परिकल्पना की परीक्षा करनी होतो है। अध्याय नी में परिकल्पना परीक्षा के विषय में पर्याप्त विवरण दिया चुना है। इन विधियों को तब ही परिकल्पना परीक्षा के सिए प्रयोग में लाया जा सकता है जब कि चर का बटन जात हो । अधिकतर या तो इन सदना उपयोग इस नत्यना पर माधारित है कि प्रतिदर्भ का श्वन प्रसामान्य समग्र से निया गया है या समग्र का.बटन जात है । किन्तु, जाय चर का बटन जात नहीं होता है । ऐसी स्थिति में एवं विधि तो यह है कि बर वा ऐमा रूपान्तरण वर दिया जाये कि रूपान्तरित पर वा बटन गात हो । दिन्त प्राय उचित रपान्तरण करना कठिन है या कभी-कभी रपान्तरण वरना असम्भव हो जाता है। अत अज्ञान बटन बाते चर पर लिये गये प्रशानों हारा प्राचनों के मागणन एवं परिकल्पना-परीक्षा के हेन् प्रप्राचल प्रविधियाँ मायन्त राहायक हैं। मनाचल विधियों को बटन मुल विधियाँ (Distribution free methods) भी गहते हैं । प्रापल विद्यां का प्रयोग तभी सम्भव है जब वि प्रेक्षण सस्वास्मन हो और इनका बटन जात हो । इसके कियरीत अभाजन दिश्यमें का प्रयोग उन प्रेशकों के लिए न रते हैं जो सस्यारमंत्र न होनार नोटि (ranks) या तम (Order) पर आधारित हो।

यरिगराना, स्वतन्त्रता कोटि, सार्यग्ता स्वर, तो प्रवार की मुटि एक एक पुक्क व दो पुष्छ परीक्षा ने विषय में विवरण प्रत्याव नी में दिया जा पुरु है। परीक्षा विश्वी किसी भी प्रनार नो हो पर इन सबना प्रयं व प्रयोग वही रहता है। बटन मुक्त विधियाँ क्रियत प्रेशाचों या निमन सोरियनी पर प्राधारित हैं। निमन प्रेमाचों का धीमप्राय इस प्रकार

समभा जा सवता है।

 $Y_1 < Y_2 < Y_3 < \dots < Y_n$

पतान पनान में निन्हीं हो चित्रत प्रेयणों ने बीच ने धेन का बटन धनान पनान के प्रकार ने मुक्त होता है। यह प्रयागित किया जा सकता है कि घीनना ॥ चित्र प्रेराण किमी-भी पनान पनान [(x) ने नीचे के धेन को (u +1) समान आपों से विमानित कर देते हैं जिनमें से प्रत्येत भाग का क्षेत्रफल $\frac{1}{n+1}$ होता है। यही तस्य इस कमन का प्राघार हैं। पिछले प्रध्यायों में जिन धप्राचल विधियों ना वर्णन निया गया है वे हैं नाई वर्ग परीक्षा, नतुर्यन, दशमक, सततमत एव कोटि सहसवद धादि। धव इस घष्ट्याय में फ्रन्य कुछ मुस्य धप्राचल विधियों को दिया गया है। इन विधियों का प्रयोग करने से पूर्व यह जानना धावश्यक हैं कि पर सतत हैं या धसतत हैं।

एक प्रतिदर्श के लिए ग्रप्राचल परीक्षाएँ

यहां उन झप्राचल विधियों का वर्णन निया यया है जो कि वेवल एक प्रतिदर्श की दिस्पति से साथू होती है इन विधियों हारा परिजल्पना की परीक्षा करने यह निर्णय करते हैं नि प्रतिदर्श का चयन किसी विद्यागया से विद्या गया है या नहीं। सन्य शब्दों से यह सहें कि प्रतिदर्श और समग्र के केन्द्रीय नाप समान हैं या नहीं। इस प्रवार की परीक्षाएँ आय प्रास्तुन-सीच्य सन्यन्थों होती हैं।

कोलमोगोरोय-हिमरनोव परीक्षा

यदि H_o पूरे बटन को निर्दिष्ट करता है तो प्रतिदर्ध प्रेक्षणों के धाधार पर बटन प्रतन की इस परिवृद्धित बटन फलन से सुनना की जा सकती है। यदि इन दोनों से बहुत धन्तर हो तो परिक्त्पना को अस्पीकार किया जा सकता है। इस पिद्धान्त पर धाधारित परीक्षा को कोतमोगोरोद-स्मिरनोप परीक्षा कहते हैं। ये सह क समजन सुष्टुत परीक्षा है। इस परीक्षा के तिए निम्न कल्पनाएँ सच्छ होनी चाहिये —

- (1) प्रतिदर्श का ज्वन याद्द ज्यन रीति द्वारा किया गया है।
- (2) परिकल्पित बटन फलन F(y) सतत है।
- (3) प्रेक्षण कम से कम कमसूचक मापनी पर लिए गये होना चाहिये।

(obsevaation measured on at least ordinal scale)

इस परीक्षा ने अन्तर्गत परिनल्पत एव प्रेक्षित बारम्बारतामा ना पूपक 2 सचयी बारम्बारता बटन ज्ञात कर लिया जाता है और उस मान की भ्रोर ध्यान दिया जाता है कि जिस पर विचलन अधिनतम हो । माना कि H_{ϕ} के अन्तर्गत परिकल्पित सचयी बटन $F_{\phi}(Y)$ है और प्रेक्षित सचयी बटन $F_{\phi}(Y)$ है और प्रेक्षित सचयी बटन $F_{\phi}(Y)$ है जी अधिनतम विचलन,

 $D = \pi \operatorname{घकतम} | F_0(Y) - F_0(Y) |$ (101)

मूत्र (101) से स्पष्ट है कि अन्तर निर्मेश मान को ही लिया जाता है, इस D के मान भीर प्रतिदर्भ परिमाण म के लिए प्राप्तिकता सारणी (परि प-6) द्वारा ज्ञात कर ली जाती है। यद यह सम्मानिता पूर्व निर्मादित सार्थनता स्तर के समान या ॥ से कम हो तो मि, को स्वीकार कर दिया जाता है और अधिक हो तो मि, को स्वीकार कर लिया जाता है। इस परीक्षा के समय भी एक पुच्छ व दो पुच्छ परीक्षा का प्र्यान रखना चाहिए।

उदाहरण 101: एन मॉडल की चार नारो (Cars) नो एन ही रम की चार गहराइयों या क्षेत्रा (shades) [गहरा, उससे कम गहरा, सामान्य, हल्ला] मे रमा गया। माना हि रग के इन शेडो की प्रधारों क, या, ग, ध द्वारा सूचित विद्या गया है। 12 सरीददारों से कार में रग के विशेष केड की पसन्द पूछी गयी। सो उत्पादक यह जानना पाहता है कि सरीददारों की प्रभिक्ष कि निसी विशेष शेड में है या नही। प्राप्त प्रेप्तण निम्न सारणी में दिये थये हैं —

	कार का शेह				
	•	ব	*	<u>च</u>	
खरीददारों की सल्या जिनकी एक विशेष ग्रेड में अभिकृषि है	0	ı	9	2	

- Ho सरीददारों की रंग के शेडों के अनुसार अभिविचि में कोई अन्तर नहीं है अर्थोव् प्रत्येक शेड के लिए सरीददारों को सक्या समान है।
- H₁ जरीदवारो र्गारण के शेडो में एक क्षी समिक्षित नहीं है। यहाँ H₀ की परीक्षा के लिए क्षीतमोगोरोब-स्मिरनोव परीक्षा का प्रयोग क्षारता उपयुक्त है क्यों कि प्रकार कममूचित मावनी पर लिये गये हैं।

परीक्षा के लिये निम्न सारणी के बनुसार सचयी बटन शात रिये -

	कार में सेंड			
	e.	₹	4	*
सरीददारों की सस्या जिनकी एक विशेष शेड में मंभिक्षित है।	0	1	9	2
H. के प्रन्तर्गत सन्त्री बटन, F.(Y)	3 12	6 12	9 12	1
भ्रेशित समयी बटन, Fa(Y)	0 12	1 12	10	12 12
F _e (Y)-F _n (Y)	3 12	5 12	1/2	0

$$agt D = \frac{5}{12} = 0.417$$

माना कि पूर्व निर्मारित वार्थकता स्वर a= 05 है। H₆ के धन्तर्गत a=10 व * D के परिकासत मान 0 417 के सनुवार सारवी (परि च-6) डाय प्राप्त प्रापिकता सार्यकतास्तर 05 से क्म है। अत परिकल्पना H_o को अस्वीकार कर दिया जाता है जिसका अभिप्राय है कि स्तरीददारों की रग ने केडों में एक सी अभिरुचि नहीं है।

परम्परा परीक्षा

स्राधकाश साहित्यकीय विधियों के प्रयोग वस्ते से पूर्व यह करपना की जाती है कि प्रेक्षण एक यादिन्द्रहर प्रतिदर्श ना गठन वस्ते हैं। विन्तु यदि प्रेक्षण समय वे अनुमार जैसे प्रात स्रोर सायकाल या एव-एव धन्टे पक्ष्वात् या एक के बाद एक, प्रमुक्तम में लिये जांग तो यह करपना करना कठिन हो जाता है वि ये यादिन्द्रक है या नही। प्रत यादिन्यकात (randomness) के प्रति परीक्षा करना प्रत्यन्त सावश्यक हो जाता है। इस परीक्षा की विधि इस प्रकार है —पहले प्रतिदर्श प्रेक्षणों वे अनुष्ठम को विसी निश्चित निकय (criterion) के अनुसार दो वर्गों में विभाजित कर लिया जाता है जैसे यदि एक प्रेक्षण एक निक्चत मान से रूप हो या साम हो तो है वे से ब्रीट प्रविव्यक्त हो तो कि निर्वाचत कर वे तो इस प्रकार सक्षरों व स्वीर के में एक अनुक्षम प्राप्त हो जाता है। जैसे एक सिकक को अनेको बार लगातार उद्याल हो स्वीर प्रेक्षण पित्र स्वत्व में प्रकार का स्वाच हो जाता है। उस एक सिकक को अनेको बार लगातार उद्यालने पर प्रेक्षण निस्त क्षम में मान हुए —

H | TT | HHH | T | HH | T | H | T

उपर्युक्त अनुक्रम में वे उप-अनुक्रम जिनमें एक ही प्रकार के प्रेक्षण, (सक्षर) हो भीर जिनसे पूर्व भीर जिनके परचात् या तो दूसरे प्रकार का यक्षर हो या कोई प्रसार न हो तो यह एक परम्परा कहलाता है। यदि चाहे तो इन्हें ऊर्वाधा रेखाओं द्वारा प्रयक्ष कर सकते हैं जैसा कि उत्तर दिलाया गया है। उपर्युक्त अनुक्षम से चाठ परम्पराएँ हैं। कभी-कभी ऐसा भी देखा गया है कि अनुक्तम में परम्पराधी की सक्ष्या बहुत कम या बहुत प्रधिक होती है। यह स्थित काल के अनुसार चक्रीय प्रविद्यंती या उपर्युक्त उदाहरण में सिनके के अभिनत होने के कारण उत्तरम हो सकती है।

जैसे Ha T का धनुकम निम्न प्रकार है —

HHHHHH | TITTIT of H | T | H | T | H | T | H | T | H | T | H | T | H | T | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H | H

पहली स्थिति में केवल 2 परम्पराएँ है और दूसरी स्थिति में 12 परम्पराएँ हैं। इन दोनों ही स्थितियों में सिक्के की अनुभिनतता पर शका होती हैं। अत परम्परा परीक्षा द्वारा प्रतिदर्श की यादिष्यकता की परीक्षा करते हैं।

मदि प्रेक्षण सक्यात्मक हो तो धनुष्ठम निम्न रूप में प्राप्त कर सकते हैं। माना कि प्रेक्षण एक निष्कृत सक्या (माध्यका या धन्य कोई सख्या) से कम या समान है तो इसे 2 से मीर प्राधिक होने पर 18 से निरूपित क्या गया है तो जिस कम में प्रेक्षण लिए गये हों उसी कम में उनको 2 या b से नियमानुसार प्रतिस्थापित करने पर प्रनुक्रम प्राप्त हो जाता है। इस प्रनुक्रम प्राप्त हो जाता है। इस प्रनुक्रम प्राप्त सो स्था स्पष्ट होती है। इस प्रनुक्रम प्राप्त सो स्था स्पष्ट होती है। इस प्रनुक्रम से परस्पराओं नी सख्या स्पष्ट होती है। इस

2 व के के स्पान पर चिह्नों ्रंन व — का भी प्रयोग किया जाता है। किन्ही भी सकेतनों का प्रयोग करें अनुका ने परस्पराक्षों को छश्या बही रहती है। उदाहरणायें किसी कारलाने ढारा उत्पादित बस्तु के विशेष सदाण ने हेतु प्रात घोर सामनान लिए गये प्रेशन निम्न थे —

432, 418, 433, 444, 434, 421, 422, 424

436, 423, 422, 421, 437, 438, 410

इस प्रतिदर्श की माध्यका 4 24 है। घत 4 24 को निश्वित मान मानने ५६ निध्न सनुक्रम प्राप्त होता है —

a | b | aaa | bb | aa | bbb | sa- | b

इस धनुक्तम में बाठ परम्पराएँ हैं।

परिकल्पना H_0 व और b बाहण्डिक त्रम में हैं शी, परिकल्पना H_1 : u और b बाहण्डिक त्रम में परित पही होते हैं के विरुद्ध एक वर्ष में ने लेला (a) शी सरका n_a है और हमसे एक वर्ष में ने लेला (a) शी सरका n_a है और एक त्रम के ने लेला (a) शी सरका n_a है और एक त्रम को ने ने लेला (b) शी सरका n_a है वही $n_1 + n_2 = n_a$ । यदि a लपु है और एक परप्ताभी भी सरवा n_a है तो a सार्ववत स्तर पर परीक्षा सारणी भी सहाता है और n_a है n_a n_a

चबाहरण 10 2 : यदि जिवरण मे दिये हुए प्रेशणों की याहण्डिकता की परीक्षा करनी हो तो निम्न प्रकार कर सकते हैं →

प्रेक्षणो की गस्या n=15

शत Ha को स्वीकार कर लिया जाता है।

हिप्पणी : यदि H_i पर धार्धारित प्रत्याधित परमपूरा सस्या बहुत कम (या बहुत प्रधिक) हो हो एक पुक्त परीका की आदी है। ऐसी स्थित में तुलना के हेतु आवस्यक्तानुनार सारणी का एक ही मान देवना पर्याप्त होता है और सार्धकना स्वर $\alpha = 05$ के स्थान पर $\alpha = 025$ रह जाता है।

बृहत् प्रतिवर्गं के लिए परम्परा परीक्षा

यदि प्रतिरमें परिवास कृत्व हो बर्बाद तु या तु स से बाई एक या दोनों 20 से बड़े हों हो ऐसी स्थित में र के कांतिक यान सारणी डारा नहीं प्रान्ध दिवें का सरत है। दिन्तु इस स्थिति में र का बटन सन्निकट प्रसामान्य हो जाता है जिसका माध्य व प्रसरण क्रमश म, व ज,² होता है। जबकि

$$\mu_{r} = \frac{2n_{1}n_{2}}{n_{1} + n_{2}} + 1 \tag{10.2}$$

$$\overline{\text{vir}} \sigma_r^2 = \frac{2n_1 n_3 (2n_1 n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2 (n_1 + n_2 - 1)}$$
(10 3)

घतः मानक प्रसामान्य विचर.

$$Z = \frac{I - \mu_f}{\sigma} \tag{10.4}$$

प्रतिदर्शन (104) से म, व ज, के मानो का प्रतिस्थापन (102) व (103) के प्रनुसार कर दिया जाता है।

यदि परिकालित Z के लिए सारणी (परि. u-2) इस्स प्राप्त 0 से Z तक का से तफल $\frac{1}{2}$ (1-a) से प्रायक हो तो H_0 को स्वीकार कर दिया जाता है प्रयोद् प्रेक्षणों में परम्पराएं यादिष्णक कम में नहीं पटित होती हैं। इससे विपरोत स्थिति में H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है पदि एक पुष्ट परीक्षा की स्थिति से O से Z तक के क्षेत्रफल की तुलना ($\frac{1}{2}-a$) से करते हैं।

उदाहरण 10.3: दिस्ती के एक बस स्टाप (bus stop) पर पक्ति में सब्दे स्त्री ब पुरुष निम्न प्रकार थे, यहाँ एक स्त्री को F से बौर पुरुष को M से निरूपित किया गया है \cdot

FF |MMMM| F |MMM| FF |MMM| F |M| FFF |MM] F |MMMM | F |M| FF | MMM

परिकल्पना H_0 , कि स्त्री च पुष्प यादृष्टिक कम से खेड़े हैं, की परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं:

जपर्यक्त उदाहरण मे n=34, n1=13, n2=21, r=16

 $n_{\rm p}$, 20 से स्रविक है भत यहाँ सूत्र (19.4) का प्रयोग करके Z परीक्षा करना उचित है।

पहले है, व है, का परिकलन करेंगे।

$$\mu_r = \frac{2 \times 13 \times 21}{13 + 21} + 1$$

$$= \frac{546}{34} + 1$$

==17.058

$$e_r^2 = \frac{2 \times 13 \times 21 (2 \times 13 \times 21 - 13 - 21)}{(13 + 21)^3 (13 + 21 - 1)}$$

$$\frac{546 (546 - 34)}{1156 \times 33}$$

$$= \frac{279552}{38148}$$

$$= 73281$$

$$e_r = 2707$$

$$0.4) \Rightarrow \text{wights}$$

$$Z = \frac{16 - 17058}{2707}$$

सूत्र (104) वे अनुसार

$$Z = \frac{16 - 17058}{2707}$$
$$= -\frac{1058}{2707}$$

सारणी द्वारा 0 से 391 तक का क्षेत्रफल 0 1517 है यह बीत्र 0 475 से क्स है ग्रत Ho को स्वीकार कर लिया जाता है। इससे निष्कर्य निकलता है कि क्त्री ग्रीर पुरुष इस के लिये पक्ति म विसी नियम धनुसार न हो कर बाहच्छित दय से आरहे थे।

बो प्रतिवर्शी के लिये सप्राचल परीक्षाएँ

इस प्रकार की परीक्षाचा की आवश्यकता यह जानने हेतु उत्सन्न होती है कि दो बारम्यारता कलन समर र है या नहीं । यहाँ परिकल्पना, कि दो शिक्ष समया पर निये गये प्रतिदर्ग एक ही बा एक से समय में से हैं या नहीं, की परीक्षा करनी होती है।

कोलमोगोरोव स्मरनोव परीक्षा

यह परीसा एक प्रतिदर्भ के हेतु दो गयी परीसा दे वंसी हो है । यदि दो प्रतिदर्भ एक से समग्री में से चयन किये गये हैं तो इनके सबवी बारम्बारना बटन भी एक से ही होते हैं। यदि इन प्रतिदर्शों के सचयी बारम्बारता बटन में किसी विन्दु मान के लिए बन्तर प्रयिक हो तो समानता के प्रति किसी निराकरणीय परिकल्पना Ho को बहबीरार कर दिया जाता है।

इस परीक्षा के लिये निम्न कस्पनाएँ सत्य होनी चाहिये :

दोनों प्रतिदशों का याहच्छिक शैति हारा चयन किया गया है?

- (2) दोनो प्रतिदर्श परस्पर स्वतन्त्र हैं ?
- (3) प्रेक्षण रम से कम कमसूचक मापनी पर लिये गये है ?

किसी समस्या के लिये यदि उपर्युक्त कल्पनाएँ सत्य हो तो परीक्षा को निम्न प्रकार कर सकते हैं:

माना कि समान परिमाण 'n' के दो स्वतन्त्र प्रतिदश्तों का दो समग्रो से चयन किया गया है भौर इनके सुदयी बटनो में प्रधिकतम धन्तर D है जबकि

$$D = मधिकतम | F_1(y) - F_2(y) |(10.5)$$

जहाँ $F_1(y)$ एक प्रतिदर्श का प्रेक्षित सचयो पग-फलन है। माना कि D ना प्रगाराका) है और $F_2(y)$ दूसरे प्रतिदर्श ना सचयो पग-फलन है। माना कि D ना प्रगा M_D है। कोलमोगोरोज-स्मिरनोव परीक्षा के सिये दी गयी सारणी (परि॰ प-7) (जब $n \le 40$) द्वारा α सार्थकता स्वर व प्रतिदर्श परिणाम n के तब्दुसार M_D का कारिक मान सत कर मिया जाता है। क्षातिक मान सेवते समय एक पुण्ड व दो पुण्ड परीक्षा का भी प्यान रखा जाता है। एक पुण्ड परीक्षा का प्रयोग उस स्थित मे करते है जब महुवधानकर्ता को मधिकतम सन्तर की दिवा प्रयोग करने से पहले ही पता हो मन्यमा दो पुण्ड परीक्षा का ही प्रयोग करने से पहले ही पता हो मन्यमा दो पुण्ड परीक्षा का ही प्रयोग करने से पहले ही एता हो मन्यमा सो पुण्ड परीक्षा का ही प्रयोग करना होता है। यदि परिक्षित M_D को मान कारिक मान से प्रधिक या समान हो तो H_D को अस्वीकार कर दिया जाता है घन्यमा स्वीकार कर लिया जाता है।

यदि n>40 हो तो सारणी (परि॰ य-8) का प्रयोग करना होता है। यहाँ α सार्यकता स्तर पर D के ऋतिक मान प्राप्त होते हैं। यदि परिकलित D का मान α सा॰ स्त॰ व $n_1=n_2=n$ के लिये सारणीय α D के मान से प्रधिक या समान हों तो B_0 को प्रस्वीकार कर दिया जाता है मन्यया B_0 को प्रस्वीकार कर लिया जाता है।

दिप्पणी: यहाँ दोनो प्रतिदशों के परिमाण भिन्न होने की स्थिति की उपेक्षा कर दी गरी है।

ज्वसहरम् 19.4: 15 प्रक्रितित धोर 15 प्रप्रक्रितित निस्तानों के स्वतन्त्र प्रतिवर्तों में कुछ प्राष्ट्रितक कृषि प्राचलन पदितियों के प्रतिवत धपनाने के धनुसार किसानों की सब्या निम्न सारणी में दो गयी है। यहाँ यह जानना है कि प्रविधित व धप्रशिक्तित किसानों में प्राधनिक कृषि प्राचलन पद्धतियों को धपनाने का धनुपात समान है या नहीं ?

Ho: प्रशिक्षित भीर भत्रशिक्षित किसानों के भपनाने सम्बन्धी भनुपात में कोई प्रन्तर

मही है। $H_1: x$ शिक्षत और भ्रष्रशिक्षित किसानों के भ्रपनाने सम्बन्धी भ्रपुपत में भन्तर है। यहाँ प्रेक्षत संवयी पग-बटनों को न्यास के साथ ही निम्न सारणी में दे दिया गया है:

	प्रतिकत व्यवनाने हें वर्ष					
	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
प्रशिक्षित निसान (प्र०४०)	0	1	3	3	7	1
मप्रशिक्षित निसान (धप्र०नि०)	3	8	2	1	ł	0
प्र॰ नि॰ ने लिये प्रक्षित समयो बटन $F_1(y)$	0 15	1 15	4 15	$\frac{7}{15}$	$\frac{14}{15}$	15 15
ग्रप्र• कि के लिये प्रेशित समयी बटन $F_2(y)$	3 <u>1</u> 5	$\frac{11}{15}$	13 15	14 15	15 15	15 15
[F ₁ (y)-F ₂ (y)	3 15	$\frac{10}{15}$	9	7 15	1 15	0

सही $D=\frac{3}{3}$ $M_D=10$ और n<40 ते। साना कि पूत्र निर्धारित सापनता स्तर $\alpha=05$ है। $\alpha=05$ द n=15 ने निर्दे रो पुन्छ परेखा की स्थित से सारणी (परि० प−7) द्वारा प्राप्त M_D का काविक सात 8 है जोकि M_D के परिकलित मान 10 से पन्न है। सद H_0 सस्योद्धन है जिसका समित्राय है कि प्रतिक्षित और स्परियक्तित किसानो स साधुनिक कृषि प्राचलन पदिवस की सप्ताने सम्बन्धी सनुवात समान नहीं है।

चिह्न परीक्षा

माना कि एक द्विचर समग्र विकाराधीन है और इन दो चरो के बटन प्रक्तात है तो सतत बटन कसनो को समानता के प्रति निराकरणीय चरिकस्पना Ho नी चिह्न-परीना कर सनते हैं मर्यात् इस विधि द्वारा

युगल प्रेक्षणों के बाधार पर Ho को निम्न प्रकार थी मिल सकते हैं

$$H_0 = P(X_i > X_i') \Rightarrow P(X_i < X_i') \Rightarrow \frac{1}{2}$$

$$qq(f_{i} = 1, 2, 3, n)$$

या H₀ को इस प्रकार भी वह सकते हैं। H₀ घन्तरो की माध्यका खुय है। इसका प्रतिप्राय यह है कि H_0 के प्रन्तागंत यह भाशा नी जाती है कि इन युगत प्रेक्षणों भी सहया जिनमें X_i , X_i' से श्रिष्ठिक है, उन युगत प्रेक्षणों की सहया के समान होती है जिनमें X_i , X_i' से नम है। यदि युगत प्रेक्षणों में प्रन्तर के चिह्न का केवल विचार करें तो प्रन्तरों को निम्न प्रकार निरूपित कर सकते हैं.—

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{iff } X_i - X_i' > 0 \\ 0 & \text{iff } X_i - X_i' < 0 \end{cases}$$

यदि $X_1 - X_1' = 0$ हो तो d_1 का कोई चिह्न नहीं माना जाता है भौर इन पुगल प्रेक्षणों को विश्लेषण के समय छोड दिया जाता है। यत जितने युगल प्रेक्षणों से प्रन्तर सून्य होता है उतना ही प्रतिदर्श परिमाण कम हो जाता है।

यहाँ सद d, स्वतन्त्र हैं और इनका योग ा⇔ 2d, है जोकि इस परीक्षा के लिए उन्

यदि \mathbf{n} बृह्त् हो अर्थात् $\mathbf{n} > 25$ हो तो प्रसामान्य दिचर \mathbf{Z} का प्रयोग करके प्रसामान्य परीक्षा करते हैं। इसके लिए सूत्र (9 21) का प्रयोग करता होता है और वही दिये गये नियम के अनुसार \mathbf{H}_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है।

इसके विपरीत स्थिति में Ha स्वीकृत है।

पिर यह पहले से विदित हो कि किस प्रकार के बिह्नों की सक्या कम होगी तो एक पुच्छ परीक्षा का प्रयोग करना होता है अस्पया वो पुच्छ परीक्षा करनी होती है। लघु प्रति-दर्ग की विदित्त में दो पुच्छ परीक्षा के लिए प्रायिकता $P(\mathbf{x} \leqslant \mathbf{r})$ को दो से गुणा कर दिया जाता है भीर इस प्रायिकता का प्रयोग करके H_0 के विषय में नियमानुसार निर्णय के लिया जाता है। शुरुत् प्रतिदर्श की स्थिति से एक पुच्छ व दो सुच्छ परीक्षा को प्रध्याप 9 में दिया जा पूजा है।

खबाहरण 10.5 : कल पुर्जे बनाने की भशीन पर काम करने वाले 16 व्यक्तियों का छुट्टियों से पूर्व के सप्ताह व खुट्टियों के बाद के सप्ताह में उत्पादित पुर्जों की सक्या निम्न प्रकार पी:---

म्पति र्समा	ला छुट्टियों से पूर्व के छुट्टियों के बाद के		XA	- X _B
THE CONT	पुरुष प्रम् स्थ्ताह् का द्रायादन (दुवी की संख्या) ХА	सप्ताह वा उत्पादन (वृत्रों की क्या) Хв	विह्	# तर
1	99	107		8
2	104	108	_	4
3	102	94	+	8
4	90	RN	+	2
5 1	109	103	+	6
6	106	98	+	В
7	105	100	+	5
8	104	92	+	12
9	94	86	+	8
10	82	78	+	4
11	95	88	+	7
12	103	93	+	10
13	89	80	+	9
14	85	80	+	5
15	91	94	_	3
16	97	96	+	1

परीक्षा करनी है कि सुट्टियो का उत्पादन पर अनुकूल प्रभाव पड़ना है या नहीं ?

 H_0 : युट्टियाँ देने का शाम करने वालो की उत्पादन क्षमना पर कोई प्रभाव नहीं

 $m H_1$. चुट्टियाँ देने का काम करने वासो की उत्पादन शमना पर प्रभाव पहना है । पडता है।

यहाँ युगल प्रेसण दिवे गये हैं तथा XA व XB के बटन हो मनत माना गया है। पत H_0 की H_1 के विरुद्ध परीक्षा विह्न परीक्षा द्वारा कर मकत है।

उपर्युक्त न्यास के बनुसाद,

n=16 और x=3 (-विह्नों की सक्या जोकि कम है)

यहाँ दम चिह्नों की सस्या के विषय में पहने से कुछ नहीं दिया गया है बन दो पुण्छ परीक्षा करनी होगी। माना कि पूर्व निर्धारित सार्ववना स्तर α == 01 है।

n=16 द x=3 के लिए सारणी (परि॰ घ-10) द्वारा प्राप्त प्रापिकता $P(x<3)=\cdot011$ है। दो पुच्छ परीक्षा नी स्थिति में यह प्रापिकता, $2\times\cdot011=\cdot022$ है जोकि $\cdot01$ से प्रधिक है। प्रत. H_0 स्वीकृत है जिसका प्रमित्राय है कि छुट्टी देने का काम करने वालो नी उत्पादन क्षमता पर कोई प्रभाव नहीं पडता है।

विल्कावसन की चिह्नित-कोटि परीक्षा

पिछले लग्ड में दी गयी चिल्ल-गरीता में केवल युगल प्रेवणों में अन्तर वी दिशा का ही प्रयोग किया गया है। विल्ल-गरीता में अन्तर के परिमाण की उरोक्षा वर दी गयी है किन्तु विल्कावना ने अन्तर के चिल्ल एव परिमाण दोनों को ही महत्त्व दिया। विल्कावसन-परीला, चिल्ल-गरीता की अपेला अधिक अन्तरम है। इस परीक्षा को कार्यान्वित करने की विधि निम्न प्रवार है:—

माना कि किन्हीं दो शोधनों या कारकों के आधार पर प्रतिदर्श मे $\mathbf{1}$ गुगल प्रेक्षण $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), \dots, (X_n, Y_n)$ हैं भौर $\mathbf{1}$ युगन प्रेक्षण में धन्तर $X_1 - Y_1 = d_1$ है $\mathbf{1}$

इन मत्तरों को d, के निर्पक्ष मान के मनुवार धारोही या भवरोही कम मे रख दिया जाता है भीर कमित अन्तरों को वोटिकृत कर दिया जाता है। इन कोटियों को यही जिल्ल प्रदान कर देते हैं जोकि किसी कोटि के तदनुसार अन्तर का था। जैसे माना कि अन्तर 2, 4, -3, 5 व 7 हैं। तो कमित अन्तर 2, 3, 4, 5, 7 हुए और इनकी कोटिय 1, 2, 3, 4, 5 होगी। जिल्ल प्रदान करने पर कोटियाँ 1,-2, 3, 4 व 5 होगी। इस प्रकार यह जात हो जाता है कि कीनसी कोटियाँ धनारमक अन्तरों द्वारा और कोनसी कोटियाँ धनारमक अन्तरों द्वारा और कोनसी हो इस प्रचान अन्तरों कोटियाँ क्यानसी हो सम्बन्ध के अन्तरों होता स्वार के स्वर्ण हो हो से इस गुगल प्रेक्षण को जिल्लेयण से सम्मितित नहीं किया जाता है और युगलों की मंख्या चतनी ही कम मान की जाती है जितने कि अन्तर खून्य हो।

इसके प्रतिरिक्त यदि दो या दो से प्रधिक अन्तरों का परिषाण समान हो तो इन ग्रन्तरों को समान कोटि प्रदान कर दी जाती है और यह दोटि उन सब कोटियों के माध्य के समान होती है जो इन अन्तरों को कम में मानकर प्रदान करनी थी। जैसे यदि अन्तर 4, 5, 6, 6, 8, 9 हो तो इनकी कोटियाँ 1, 2, 3.5, 3.5, 5, 6 होगी।

प्रन्तरा को कोटिकृत करके चिह्न प्रदान करने के पश्चात, एक प्रश्नर के चिह्नों वाली कोटियों का योग प्रतन् प्रतन प्रतन क्षेत्र को योग प्रतन प्रतन क्षेत्र का योग प्रतन प्रतन क्षेत्र का योग प्रतन प्रतन क्षात कर लिया जाता है। माना कि इनमें से जो योग कम है उसे T द्वारा सूचित किया गया है। प्रत H_0 की H_1 के विस्द परीक्षा निम्न प्रकार करते हैं। H_0 व H_1 को चिह्न परीक्षा के साथ दिया जा चुका है।

स्थिति 1: सिंद प्रतिदर्श लघु हो सर्यात् $n \leqslant 25$ हो तो परिकलित T की, n व सार्यकता स्तर α के सनुसार, सारणी (परि॰ प-11) में दिये T के त्रातिक मान से सुलना करके H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है। यदि परिकलित T का मान

सारणीयद्व ${f T}$ के मान से कम या समान हो तो ${f H}_0$ को ग्रस्वीकार कर दिया जाता है द्यपति H1 स्वीवृत है। इसके विपरीत स्थिति में H0 स्वीवृत है।

यदि अनुसन्धानवत्तां को यह पहले से ज्ञात हो कि 🕂 चिह्न वासी या - विह्न वासी कोटियों का योग 'T' कम होगा सो इस स्थिति मे एवं पुच्छ परीक्षा करनी होती है भौर एक पुरुख परीक्षा के सिए दी गयी सारणी (परि० प-11) देखनी होती है।

स्थिति 2 · बंदि प्रतिदर्श परिमाण 'n' बृह्त हो धर्षात् n>25 हो तो T ना बटन सम्निक्ट प्रसामान्य होता है। सतः H_o की Z-परीलाकी जाती है। इस स्थिति ने T का साध्य.

$$\mu_{\tau} = \frac{n(n+1)}{4}$$
(106)

धीर प्रसरण.

$$\sigma_1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$$
(107)

होता है।

प्रसामान्य विचर.

$$Z = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T}$$
(10 8)

N (0, 1) होता है।

परिवत्तित ८ वी ≡ सा० स्त० वे सिए प्रसामान्य बटन वासी सारणी (परि० प−2) द्वारा प्राप्त Z से नुसना करके H_{ϕ} के विषय में नियमानुसार निर्मय कर तिया जाता है।

यहाँ भी एक पुरुष्ठ व दो पुरुष्ठ परीक्षा का ध्यान रखना होना है। उदाहरण 10 6 • बिह्न परीक्षा के लिए दिये गये उदाहरण (10 5) को ही दिल्ला-क्सन विह्नित कोटि परीक्षा के हेत् प्रयोग किया गया है।

वहाँ दी गयी सारणी के अन्तिम स्तम्म में दिये जिल्ल सहित

सन्तरो ना वहाँ सीधे उपयोग नर लिया गया है।

त्रमित सन्तर: 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 10, 12 चिन्नों सहित नोटि. 1, 2, -3, -4 5, 4 5, 6 5, 6 5, 8, 9, 11 5, 11 5, 11 5,

-11 5, 14,.15, 18

– विह्नों वासी कोटियो का योग≕19 -∱चिह्नो वासी कोटियो का बीग==117

भत यहाँ T=19.

माना वि पूर्व निर्घारित सार्यवता स्तर व = 01 है। यहां सह विदित नहीं या कि किस प्रकार के किहाँ वाली कोटियों का योग कम होगा ग्रत. दो पुरुख परीक्षा करना उचित है। साथ ही बहाँ ≡ सपु है।

α = 01 व n = 16 के लिए सारणी (परि॰ प-11) द्वारा प्राप्त T का जातिक मान 20 है जो कि T के परिकलित मान 19 से प्रधिक है। प्रत H₀ प्रस्वोहत है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि छुट्टी देने का उत्सादन समता पर प्रवक्त प्रभाव पटना है।

टिप्पणी:—यविष चिह्न परीक्षा द्वारा H_0 को स्वीकार िया गया है किन्तु विस्वाक्सन चिह्नित कोटि परोक्षा द्वारा H_0 , उसी न्यास के लिए, को अस्वीकृत है। इससे विदित होता है कि जिन सुक्ष्म अन्तरों का चिह्न परीक्षा द्वारा अभिज्ञान (detection) नहीं हो सका उनका विस्वाक्षम परीक्षा से अभिज्ञान हो जाता है। यही कारण है कि विस्वाक्षम परीक्षा, के अभिज्ञान हो जाता है। यही कारण है कि विस्वाक्षम परीक्षा, चिह्न परीक्षा से अधिक क्षाक्तम मानी जाती है।

माध्यिका परीक्षा

चिह्न परीक्षा में भाकरयक है कि प्रेक्षण युगत होने चाहिये। किन्तु बहुधा इस प्रतिवध का पालन करना कठिन हो जाता है। धन प्रेक्षण युगत न होने तथा प्रतिदर्श परिमाणा के बमान न होने की स्थिति में परिकर्यना

$$H_0$$
 $f_1(X) = f_2(Y)$ $\hat{\eta} H_1$ $f_1(X) = f_2(Y-C)$

के विरुद्ध परीक्षा करने नी प्रावस्थनता होती है। प्रयांत परीक्षा नरनी है कि दो स्वतन्त्र समूहों के केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप (माध्यिका) एक दूसरे से भिन्न नहीं हैं। यह भी नह सकते हैं कि दो समूहों नी माध्यिका समान होने की परीक्षा करनी है। इस स्थिति में H_0 भी परीक्षा के लिए माध्यिका परीक्षा उपयुक्त है। यहाँ यह कल्पना घवष्य की गयी है कि I_1 (X) और I_2 (X) के बारम्बारना सनन सत्त हैं। स्थ्यिका परीक्षा नी विधि इस प्रकार है –

माना कि पहले प्रतिदर्भ में प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{n_1}$ हैं और दूसरे प्रतिदर्भ में प्रेक्षण Y_1, Y_2, Y_3, \dots Y_{n_2} हैं। इन दो प्रतिदर्भ प्रेक्षणों को सम्मिनित करने प्रारोही मा प्रवरोही कम में रख दिया जाता है। माना कि इस प्रकार निम्न प्रनुक्रम प्राप्त होता है —

इस भनुत्रम की माध्यिका ज्ञात नरती जाती है। इसके पश्चात् माध्यिका के दायों भ्रोर X प्राप्ताको की सत्या ज्ञात कर लेते हैं। माना कि ये सत्यात्रात कर तेते हैं। माना कि ये सत्यात्र कमा r_1 व r_2 है। श्रत माध्यिका के बायो और X प्राप्ताको की सत्या (n_2-r_1) भ्रोर Y प्राप्ताको की सत्या (n_2-r_2) होगी। यदि H_0 सत्य है तो माध्यिका के दायों भ्रोर व वागी भीर पटित X व Y प्राप्ताकों की सत्या वा अनुपात लगमप समान होना चाहिये।

माध्यिका के दायी और X व Y प्राप्ताक

$$\binom{n}{r_1}\binom{n}{r_2}$$

प्रशार से पटित हो सकते हैं। (n1+n2) अको में से (12+12) सकी के

$$\begin{pmatrix} n_1+n_2 \\ r_1+r_2 \end{pmatrix}$$

सवय (combinations) सन्भव हैं। धन वाक्ष्यिक्त के दायी धोर रा, X घा सीर रु, Y ग्रन होने नी प्रायिनता,

$$P (r_1, r_2) = \frac{\binom{n}{r_1} \binom{n}{r_2}}{\binom{n_1 + n_2}{r_1 + r_2}}$$

है। H_0 ने सम्तर्गत $s_1 = \frac{n_1}{2}$, $r_2 = \frac{n_2}{2}$ तथा s_1 और r_2 वा प्रतिदर्शी बटन, प्रतिगुणोत्तर स्टन होता है। उपर्युक्त स्रवो वो गणनायो वो निस्न सारणी द्वारा प्रदक्तित वर सरते हैं -

, , ,	सारणी (1		
	ন্নদংগ 1 (X-মনস)	प्रवित्तर्ग 2 (Y-प्रेसम्)	শীশ
माध्यिका के दायी भीद सको की सख्या	r ₁	r ₂	(r_1+r_3)
माध्यिका के बायी भीर भाको की सख्या	$(n_1 - r_1)$	$\{n_2 - r_2\}$	$(n_1 + n_2 - r_1 - r_2)$
योग	n	n _g	$n_1 + n_2$
414			

परिकल्पना H_0 की परीक्षा α सार्थनमा स्तर पर फितर-नरीका आरा या काई कर्ग परीक्षा द्वारा कर सकते हैं। यदि (n_1+n_2) का आन त्यपु हो व्ययंत् 20 में कम हो तो परिकाद हम प्रयोग परना चाहिये। एर पुच्छ परीक्षा हो तो $P\left(r_1, r_2\right)$ का मिन α में समान या कम होने की स्थित में H_0 को व्यवेशकार कर तिया जाता है परंपया H_0 को स्थीकार कर तिया जाता है परंपया H_0 को स्थीकार कर तिया जाता है। दो पुच्छ परीक्षा की न्यिन में $\alpha/2$ से तुनना करने नियमानुगार H_0 के विवय में तिर्थन कर निया जाता है।

यदि (n_1+n_2) वा सान 20 से 40 तक हो धोर सारणी से किणी भी कोटिया (cell) की सरफ्झारता 5 से कम न हो तो (2×2) धानन सारणी के निल् χ^2 -परीला का प्रयोग करते हैं। किसी भी कोटिया की सरफ्झारता 5 से कम हो दो सानत्य के निल्
गुद्धि का प्रयोग करने हैं।

यदि $(n_1 + n_2)$ का मान बृह्त हो खर्याद् 40 से खरिव हो तो प्रशासान्य परीक्षा का प्रयोग क्रिया जाता है दस स्थिति में $\frac{y_1}{n_2}$ और $\frac{y_2}{n_2}$ को दो प्रतिदर्भ खतुरायों के रूप में $\frac{y_1}{n_2}$ माना जाता है जो नि डिपर समयों में से हैं। $r_1 = r_2$ में से जो हम हो उत्तमें 0.5 जोड देने मौर जो मधिन हो उत्तमें से 0.5 घटा देने पर इस परीक्षा द्वारा मधिन मुद्ध परिष्मान प्राप्त होते हैं। इस परीक्षा के लिए प्रतिदर्शन है —

$$Z = \frac{\frac{r_1}{n_1} - \frac{r_2}{n_2}}{\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \quad(10.10)$$

$$q = \frac{r_1 + r_2}{n_1 + n_0} \text{ wit } q = 1 - p$$

 \mathbb{Z} का परिकलन करने सारणें (परि० प-2) डारा O से Z तक का लेजरूल कात कर लिया जाता है और क्षेत्र को पूर्व निर्धारित α नार्यक्ता करने पर, सस्या $\frac{1}{2}$ (1- α) से तुलना करने H_0 के विषय में नियमानुसार निर्धय कर लिया जाता है। एक पुरुष्ठ परीक्षा की स्थिति से O से Z तक के लेज को सुनना, सस्या ($\frac{1}{3}$ - α) से करने H_0 के विषय में निर्धय कर निया जाता है।

उदाहरण 10.7 दी विभिन्न प्रवसरी पर समान बायु वाले मेंड के बच्चों के प्रति-देशों का चयन त्रिया गया और एक निर्मयक हारा 15 मे ले निस्न क्षक दिये गये :---

मेंड के बण्डों की श्रृंक्या	হৰম্বর 1 মাতাক (X)	ধংস্তং 2 মালাৰ (Y)
1	12	12
2	9	14
3	12	14
4	13	15
5	7	14
6	13	12
7	. 13	14
8	14	15
9	15	7
- 10	15	

परिकल्पना H_0 कि दोनो सबनरों पर समूहो ने बेन्द्रीय प्रशृत्ति के माप समान हैं प्रयांत् f(X) = f(Y) नी परीक्षा, माध्यका परीक्षा हारा निम्न प्रकार मनते हैं।

दिये हुए धर्मों को मीम्मिनित करके जम से निय दिया और महचान के निए घदमर 2 के महाँ वे नीचे रेवा मीच दी गयी है।

15 15 15 15

इम भनुक्रम में 19 धर हैं धनु. दशवा धर, 13 माध्यिका है।

a = 95 भा• स्त• ने प्राधिकता № (г., г.) प्राधित है पत Ha को मस्तीतार राप्ते रा भौक्तिय नहीं है। इसका धनित्राय है कि दोनों धक्तरों पर समुहों ने केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप ममान नहीं है।

मान-फिटनी 🖰 परोक्षा

मान-फ्रिटनी परीक्षा द्वारा परिकल्पना Ho, कि दो प्रतिदर्ग एक ही नमप्र ने प्रवन बिये गये हैं, की वरीक्षा बन्ती होती है। विश्विय मात्रा में,

H₀ f(X)=f(Y) +fH₁ f(X)=f(Y-C) ≥ leta परीसा मान-ब्रिटनी U परीका द्वारा कर मकते हैं।

भाष्टियका परीक्षा की मांति माना कि दो प्रतिदर्शों के परिमाल क्रमतः 📭 व 📭 हैं भौर प्रतिदर्श प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, ...X_{n_1}$ व $Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_{n_2}$ है। दोनों प्रतिदर्शों वे ग्रेशणों को गरिमानित करने कीटि के अनुमार अनुष्य में रख दिया जाता है।

माना कि मनुक्त,

है। इस बत्त्रम से X बा Y में ने किसी एक की कोटि शात कर तेते हैं। माना कि Y की कोटियाँ जान की है। धौर दनका योग S. है ती

$$U = n_3 n_2 + \frac{n_2 (n_1 + 1)}{2} - S_3 \qquad(10.11)$$

X की कोटियाँ ज्ञात करने की स्थिति मे,

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1 (n_1 + 1)}{2} - S_1$$
 (10 12)

जबिक X की कोटियो का योग S1 है।

यदि प्रतिदर्श परिचाण प्रति लघु हो अपित् n_1 भीर n_2 के मान 8 या 8 से नम हों तो परिस्तित U के मानों के लिए दी वधी सारणी (परि० ध-12) हारा प्राध्वितता मात करके H_0 ने स्थोइति या सन्त्रीकृति ने विषय में निर्णय कर लिया जाना है। n_2 के विभिन्न मानों के लिए, n_1 भीर U के मानों से सम्बद्ध नायकना प्रस्तर प्रव्यक्त प्रार्थियों में दी गयी ξ । यदि यह प्राधिकता, पूर्व निर्धारित सार्थकता स्तर α ने ममान या इससे मधिन हो तो H_0 को सस्वीकार कर दिया जाता है है।

यदि U ने इस मान ने लिए सारणी म प्राधिकतान दी गयी हो तो धन्य वर्गके लिए U'का परिकलन कर लेना चाहिये। U और U' से निम्न सम्बन्य होता है

$$U' \Longrightarrow n_1 n_2 \sim U$$

बीर
$$P(U'>U)=P(U< n_1 n_2 - U)$$

म्रव \mathbf{U}' ने मान के लिए सारणी द्वारा प्राविकता काल करके \mathbf{H}_0 ये विषय में पूर्व की मौति निर्णय कर लिया जाता है।

जब n_2 का मान 9 से 20 नव हो और $n_1 \le 20$ हो तो सारणी (परि० प-12 1) हारा n_1 व n_2 के निध्यत मान के जिए U के कातिव मान जात वर निये जाते हैं। ये सारणियों प्रत्येक सार्यकता स्तर m के लिए प्रक्षम प्रत्यत से एव पुष्क परीक्षा की स्थित में दी गयी है। यदि यो पुष्क परीक्षा कर ति हो हो तो देवी सारणियों का a के हपान पर 2a सा० स्त० के कर प्रयोग कर सकते हैं धर्यात् 2a सा० स्त० पर U के कातिक मान जात हो जाते हैं। यदि परिकति U का मान सारणीबढ़ M के मान के समान हो या कम हो तो a सा० स्त० पर H_0 को यस्वीकार कर विया जाता है अन्यया M_0 को स्वीकार कर निया जाता है।

यदि n_1 व n_2 के मान बृहत् हो अर्थात् ऊपर दिये हुए मानों से ध्रधिक हों तो प्रसा-मान्य परीक्षा का प्रयोग करके H_0 की H_1 वे विरुद्ध परीक्षा करते हैं। यदि n_1 व n_2 दोनों के मान 8 से अधिक हो तो उस स्थिति में भी अकामान्य परीक्षा का प्रयोग कर सकते हैं जब निराकरणीय परिवल्पना सत्य हो तो U का बटन अवामान्य होता है। जिसका माध्य व प्रसारण निम्न प्रकार हैं—

$$E(U) = \frac{n_1 n_2}{2}$$
(10 13)

$$\sigma_{\rm u}^2 = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}$$
 (10 14)

प्रतिदर्शेज.

$$Z = \frac{U - E(U)}{\sigma_{m}}$$
(10 15)

 $Z = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)/12}} \dots (10.15.1)$

Z के इस मान के निष् मारणी (परि० थ-2) द्वारा O से Z नह ना होत नार नियम जाता है भीर माध्यिन परीक्षा ने मीति दिये हुए नियमानुसार H_0 के नियम में निर्णय कर नियम जाता है। इस परीक्षा में भी एक पुष्ण्य को पुष्ण परीक्षा ना स्थान रक्षाना भावस्थक है।

उबाहरण 10.8: माध्यान परीक्षा ने निए दिये गये उदाहरण (10.7) ने स्थान ने लिए परिनल्पना H_0 कि दोना सबसरी पर भेड़ों ने बच्चों का पथन एक ही समझ से किया गया है, की परीक्षा मानक्षिद्रनी परीक्षा द्वारा निम्न प्रसाद कर सकते हैं

कमित पनो भीर उन्हीं नोटियाँ निम्न प्रहार होयी --

उपर्युक्त मनुक्रम में समान मान वाने यक थो भवनर 1 में है पहले लिखे गये हैं भीर भवनर 2 के भक्त बाद में दिये गय हैं। इस अनुक्रम में Y भक्तो की कोटियाँ इतने नीचे कोटिकों में दी गयी हैं। इन कोटियां को झात करन में समान बाले प्रेशमां की कोटियों के मुख्य की उन भक्तो की कार्ट के का में एकमा जाता है।

Y की कोटियों का योग== 106

सूत्र (10 11) वे धनुसार

$$U=10\times9+\frac{9(9+1)}{2}-106$$

=29

यहाँ $n_0 = 9$ घरि $n_1 = 10$ है, मान-विहटनी वरीया के निण् दी बयी सारणी हारा $\alpha = 05$ साथे रता स्वर वर U ना नाजिन मान 24 है। यह एक वो पुष्प परीता है मत $\alpha = 10$ साथेनना स्नर ने निष् U ना नाजि मान देया यस है है

परिशानित U ना मान गारगीयद U के मान ने महिर है मन शि स्वीहन है।

प्रश्नावली

भ्रतापन विधियों ने महत्त्व एवं साम बतादय ।

- "काई वर्ग परीक्षा मंत्राचल विधियों में से एक है" इस क्यन की पुष्टि कीजिये।
- 3. युवक बलब के सदस्यों में से 170 सदस्यों के एक प्रतिदर्श का चयन किया गया। इन चयनकृत सदस्यों में पणुंची की उप्रति के हेतु दीका क्यांगि में प्रमिश्चि के विषय में पूछताछ की मो। इन सदस्यों में से कैवत 136 ने मित्रहाँच दिखायों। सामान्यतवा ऐसा सममा जाता है कि मांगे सदस्यों की पणुंची के टीका कगाने में मिन्नश्चि है। परीक्षा कीजिये कि यह प्रतिवर्ष कहे हुए समय से सिखा गया है?
- एक नाइजीरियन (Nigerian) स्कूल ने 100 विद्यायियों की शिक्षा स्तर के मनुसार नियोजन स्थिति सम्बन्धी भीचडे निम्न सारणी ये दिये गये हैं .—

नियोजन स्थिति	
র শ্বনিধীশিব	
14	_
26	
	14

परीक्षा कीतिये कि माध्यमिक स्तर के विद्यार्थियों से नियोजित व मनियोजित विद्यार्थियों की सस्या समान है ?

- 5 एक ध्यवसायी यह जानना चाहता है कि बेतन वृद्धि करने से कमैचारियों की उत्पवान अमता पर क्या प्रमास पढता है ? इस हेतु एक फैनड़ी के कमैचारियों के बेतनों में समान वृद्धि से गयी। यदि बेतन वृद्धि से पूर्व एक कमैचारी का प्रतिदिन उत्पादन X (किन्ही इकास्पों मे) हैं भीर बेतन वृद्धि के बाद प्रतिदिन उत्पादन Y हैं हो 18 कमैचारियों के एक प्रतिदर्ध डाए निम्म न्यात प्राप्त हमा .—
 - X · 91, 75, 70, 64, 63, 86, 66, 72, 84, 92, 85, 88, 79, 68, 80, 84. 68, 73.
 - Y: 88, 77, 67, 69, 66, 81, 67, 74, 85, 94, 83, 90, 84, 72, 77, 86, 70, 78.

इस ग्यास के ब्राधार पर परिकल्पनाः

- H_o : वेतन वृद्धि से कर्मचारियों के प्रतिदिन उत्पादन पर कोई प्रभाव नहीं पहता है, की H_1 के विरूद्ध $\alpha=0.5$ सा. स्त. पर (i) चिह्न परीक्षा
 - (ii) दिस्काक्सन चिह्नित कोटि परीक्षा कीजिये। व्यविक,
 - (क) H₁: कर्मवारियो का वेतन वृद्धि के बाद का प्रतिदिन उत्पादन, वेतन वृद्धि से पूर्व के प्रतिदिन उत्पादन से घष्टिक है।
 - (स) ${
 m H_2}$: कर्मचारियों की बेतन कृद्धि से पूर्व एवं पश्चात् की उत्पादन दरें मिक्र हैं ।

6 एक सिवने को 15 बार उछानने पर शीर्ष 'मि' व सन् 'मे' की मोर सिक्सा गिरने का अनुत्रम निम्न प्रकार पा —

HHTTHHTTTTHTHHT

उपर्युक्त प्रमुत्रम के द्वारा शिक्के के धनमिनत होने की परम्परा परीक्षा कीतिये 1

रो सनुसधान वर्तायो न यन्ने के दो खेतो स यौथो का सत्तम प्रतम प्रतिदर्श लेकर प्रति पौधा वीटा की सच्या ज्ञात की जो निम्न प्रकार थी —

प्रति पौधे पर बीटो की सस्या

मनुसद्यानक्ता । 12, 5, 0, 7, 11, 9, 3, 4, 2, 8

मनुस्थानकर्ता 2 9, 1, 6, 4, 5, 7, 3, 2

परिएक्पना H_o कि दोनों अनुस्थानवर्तायों ने एवं से समग्री से प्रतिदश्रों का श्वयन किया है, की परीक्षा

(1) माध्यिका परीक्षा द्वारा (11) मान ह्विटनी U परीक्षा द्वारा की निये ।

1		
4.1	1.3	ш

स्रिधिनाग परीक्षणों म प्राचलों ना प्राकलन करने नी स्रावस्थकता होती है जैसे यह झात करना कि प्रति व्यक्ति वितने जाच पदार्थ की सावस्थकता होती है। प्रति व्यक्ति स्राय का पता समाना हो या वित्ती साद का उपज पर प्रमाव सादि जानने के निए प्राचलों का सावलन करना होता है। इन सभी स्राय्यकों से कुछ व्यक्तियों सा प्रयोगगत एक डांग्य प्राप्त प्रचना के साधार पर परिणाय निकास जाते हैं। सावलन प्राय. किसी बिन्दु मा सम्तराल का किया जाता है, बिन्दु सावलन को निम्न क्य से समक्त सकते हैं।

माना कि $f(X, \theta_3, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_m)$ एक समय का धनस्व कतन है जिसमे X एक चर है मीर $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_m$, m प्राचन हैं। इस समय मे से एक m परिमाण के प्रतिदर्श का चयन किया गया है भीर प्रतिदर्श प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ है। माना कि इन प्रेक्षणो द्वारा प्राप्त $\theta_3, \theta_2, \dots, \theta_m$ के घाकसन (estimates) कमस. $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ कात करने हैं जो कि प्रतिदर्श प्रेक्षणो के एकन हैं। इन एकनो को आक्तक कहते हैं।

पत. इन्हें $\theta_1(X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$, $\theta_2(X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$, $\theta_n(X_1, X_2, X_3, ..., ..., X_n)$ हारा निरूपित कर सकते हैं। जैसे समान्तर माध्य μ का प्राकृतित मान,

$$\overline{X} = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$
 (111)

मत. बिन्दु मानतन में कुछ निर्धारित विधियो द्वारा एक सस्या के बाुत करनी है जो कि प्राचल 8 के माकलिक मान के रूप में स्वीकृत की जा सकती है।

हिसी बटन के प्रत्येक मापूर्ण को प्राचत ही मानते हैं तथापि यह सब भ्रापूर्ण कटन प्रतन में नहीं लिखे बाते हैं। प्राय बटन फनन से केवल पहला व दूसरा मापूर्ण, इस बटन के माध्य व प्रत्याल के ए से या कोई मन्य प्राचत ही विद्यमान होता है। माध्य के परित दूसरे मापूर्ण (प्रसरण σ^2) वे मास्यन s^2 ने तिए सुन (σ^2) वे मास्यन s^2 ने तिए सुन (σ^2) वे मास्यन σ^2 ने प्राचन s^2 ने तिए सुन (σ^2) के परित σ^2 वा प्रतिवर्श प्रेक्षणों σ^2 , σ^2 परित σ^2 वा प्रतिवर्श प्रेक्षणों σ^2 , ते परित σ^2 वा प्रतिवर्श मापूर्ण σ^2 निन्न मूत्र द्वारा जात वर सनते हैं:—

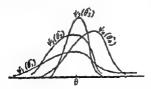
$$m_{k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \overline{X})^{k}$$
(112)

सयत $f(x, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_m)$ ने समान परिमाण के सनेवो सुरपट (distinct) यादिक्त प्रतिदासों का स्वया करें तो प्रस्वक प्रनिदर्श द्वारा एक शिक्ष प्राक्तत प्रास्त होता है। याविकता करता $f(x, \theta)$ म θ , मा प्राचमा के एक सदिस (vector), $(\theta_1, \theta_3, \theta_3, ..., \theta_m)$ को निम्नित करता है। यह मान तिवा प्रया है कि सदिस θ के एक प्रव प्रति (जहाँ $i=1,2,3,\dots$) के लिए एक प्रच्छा ध्यानका वह है जिससे कि सीवा स्वार्ध है।

उत्तम भाकलकों के गण

साना कि समय शिर्म हो से ता परिमाण के एक वाहण्डिक प्रतिदर्भ का श्वान किया गया है प्रीर इस प्रतिदर्भ के प्रेक्षणों का प्रयाण करके किसी प्राथन है का प्राक्तक विभिन्न विश्वियों हारा किया गया है ग्रीर माना कि कियती चार विश्वियों हारा प्राप्त प्राप्तक के ते ते ते ते ते हैं तो इनम से बही प्राप्त माना आयेगा निस्तान कि इटन प्राप्त के हैं हो इनम से बही प्राप्त प्रप्ता माना आयेगा निस्तान कि इटन प्राप्त के पर प्राप्तिक सर्वे निर्द्ध (concentrated) हो। यहाँ करन के कि पर प्राप्तिक सर्वे निर्द्ध होने से प्राप्तिक सर्वे निर्द्ध के कि प्राप्तिक सर्वे निर्द्ध होने से प्राप्तिक हो कि प्राप्तिक स्वाप्त कर का कि से श्रुटि वर्ष माध्य (स्वस्त्र square error) प्रमुत्तम हो। —

माना कि धारुक्क $\hat{\Phi}_1$, $\hat{\Phi}_2$, $\hat{\Phi}_3$, $\hat{\sigma}_4$ के घतरव फनन चमस $\psi_1(\hat{\Phi}_1)$, $\psi_2(\hat{\Phi}_2)$, $\psi_3(\hat{\Phi}_3)$, भीर $\psi_4(\hat{\Phi}_4)$ हैं जिनका ज्यामितीय रूप चित्र (11.1) के धनुसार है।



चित्र (111) धारसरो ने बटन वर्शों की सहायता से मुख्यक्तक का दर्शन ।

उपर्युक्त बिन से स्पष्ट कि θ_3 , मारुवारों θ_1 , θ_2 म θ_4 की मोता मुमस्मार है स्वीकि उसरे बटन का θ पर संबंधिक सरेन्द्रीकरण है। स्वाप्ति

यदि त प्रेदाणो यर बार्यास्य कानसक को $\hat{\theta}_n$ से जूबित करें और $\hat{\theta}_n$ प्राथिका की भावना में प्राथत θ को धोर धीर्यपृत्र हो तो $\hat{\theta}_n$ का θ का सबन धावनक (Consistent estimator) कहते है सर्वात्

यदि < > ० कोई सख्या हो तो,

$$\lim_{n\to\infty} P \left\{ \left| \stackrel{\circ}{\theta_n} - \theta \right| < \epsilon \right\} = 1 \tag{11.3}$$

सम्बन्ध (11-3) से स्पष्ट है कि जैसे-जैमे प्रतिदर्श परिमाण n प्रतन्त की धोर प्रवृत्त होता जाता है, θ_n धोर θ में धन्तर सूरमतम होता जाता है। इससे निष्कर्प निकलता है कि जैसे-जैसे प्रतिदर्श परिमाण बृह्द होता जाता है, उतना ही ग्राकलक प्रधिक यथार्थ होता जाता है।

ग्रनभिनतता

एक माकलक $^{0}_{n}$, θ का मनिभनत मानलक है यदि $E(^{0}_{n})$ $\Longrightarrow \theta$ हो जबकि मक्षर E गणितीय प्रत्याशा को निरूपित करता है। यदि θ के यक्षा सम्भव माकलक झात कर लिये जायें तो उनना माध्य प्राचल B के समान होता है।

उदाहरणतमा माना कि एक प्रसामान्य समग्र $N(\mu, e^2)$ से n परिमाण के प्रतिदर्श का श्रवन किया गया है। तो हम जानते हैं कि e^2 का प्रश्चिकतम समाविदा भाकतक (भ्रागामी लण्ड में दिया गया है) Σ ($X_1 - \overline{X}$) $^2/n$ होता है जिसका कि प्रत्याचित मान

$$\frac{(n-1) \ \sigma^2}{n}$$
 है। किन्तु झाकसक को $\sum_i (X_i - \overline{X}^i)^2 /_{n-1}$ सेने पर यह प्रभिनिति समाप्त हो जाती है प्रपांत् $\sum_i (X_i - \overline{X}^i)^2 /_{n-1}$ का प्रस्याधित मान σ^2 होता है।

n बृहत् होने की स्थिति में इस प्रकार की शुद्धि श्रावश्यक नहीं है।

टिप्पपो : एक संगत आकलक (सीमा मे) अनिमनत होता है किन्तु, एक अनिमनत खाकलक का सगत होना खावस्पक नहीं है।

उदाहरन 11·1: एक 5 एकको वाले समग्र से 3 एकको का बिना प्रतिस्थापन के सरल यादिकछ रीति द्वारा प्रतिक्था किया गया है। बदि इन 5 एककों पर मान, 1250, 1500, 1650, 2000, 2050 रुपये, कम्पनियों के लाओं को निक्सित करते हैं तो समस्त सम्भव प्रतिदर्शों की परिणणना करके निम्न प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि प्रतिदर्श माध्य, समग्र साध्य का प्रतिमित्त साकत के निम्न

समग्र माध्य

= 1730

$$= \frac{1}{5} (1250 + 1500 + 1650 + 2200 + 2050)$$
$$= \frac{1}{5} (8660)$$

एककी के समस्त सम्भव प्रतिदर्श, तथा उनके साध्य निम्न प्रकार होगे ।

	सन्भव प्रतिश	ग	प्रतिवर्श माध्य
1250	1500	1650	4400/3
1250	1500	2200	1650
1250	1500	2050	1600
1500	1650	2200	5350/3
1500	1650	2050	5200/3
1650	2200	2050	5900/3
1250	1650	2200	1700
1250	1650	2050	1650
1250	2200	2050	5500/3
1500	2200	2050	5750/3

इन प्रतिदर्श वाध्यो का बाध्य = 17300

= 1730 **₹**0

स्पन्द है कि समस्त सम्भव प्रतिदशों के माध्यो ना माध्य समग्र साम्य के समान है। पर्यापन धाकलक

एक आवंत्रक पर्याच्य कहताता है यदि बाक्सक प्रतिदर्श में विद्यमान प्राचन सान्त्रधी पूर्ण सूचना राजता हो। पर्याच्य धाकसन को धाधक स्पष्ट रूप में इस प्रकार समक्र सकते हैं। माना कि एक प्रतिदर्श में २ प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ है जिनका चयन समक्र $\{x, \theta\}$ से किया गया है। $\hat{\theta}$, प्राचस θ का धावसन है जो कि प्रेसणों $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ पर धाधारित है। यदि $\hat{\theta}$ के दिये होने पर $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ का प्रतिवधी बटन θ पर निर्मेद हो तो $\hat{\theta}$ एक प्रयोद्ध धावसक कहताता है।

गणितीय भाषा मे,

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}} f(X_{i}, \theta) \Longrightarrow \phi(X_{i}, X_{i}, X_{i}, \dots, X_{n} \mid \theta) \ \psi(\theta, \theta) \qquad (11.4)$$

सहा सह बात स्थान देने थोग्य है कि फ्लन के प्राथम # से मुक्त है धर्यात् यह केवन ^ A. काही ध्रमन है। बाता 0. # का पर्याप्य बाक्सक है। पर्याप्य बाक्सक का प्राप्त न रता सदैव रुचिनर है नयोंनि इस धाकलन में, प्राचल ध ने नियम में प्रतिदर्श में निवसान सम्पूर्ण सूचना ना उपयोग हो जाता है। निन्तु एन प्रतिदर्शन नो नेवल पर्याप्तता (sufficiency) हो पूर्ण परिमुद्धि से परिभाषित नहीं नरती, प्रषितु बुछ प्रम्य गुण भी आवस्यन हैं। साथ ही यह भी निद्ति है नि पर्याप्त आवसन ना बहुत नम स्थितियों में प्रस्तित्व होता है।

दो ग्राकलकों की श्रापेक्षिण दक्षता

माना कि θ_1 और θ_2 दो धानसक हैं जो कि समग्र $f(x,\theta)$ मे से दो समान परिमाण n के ज्यनकृत प्रतिदर्जों डारा प्राप्त होते हैं तो $E(\theta_1^{\Lambda}-\theta)^2$ और $E(\theta_2^{\Lambda}-\theta)^2$

के मनुपात $\frac{E(heta_1- heta)^2}{E(heta_2- heta)^2}$ को $\overset{\wedge}{ heta}_1$ की ब्रपेसा $\overset{\wedge}{ heta}_2$ की दसता नहते हैं । यहाँ E, प्रत्याधित

मान को निरूपित करता है। प्राय यह दक्षता प्रतिशत मंदी आती है। यदि यह प्रतिशत $\stackrel{\Lambda}{100}$ प्रतिशत के अधिक हो तो $\stackrel{\Lambda}{\theta_2}$ की $\stackrel{\Lambda}{\theta_1}$ से उत्तय आक्तक कहते हैं।

मिर E $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = \theta$ और E $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = \theta$ हा तो E $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} - \theta \end{pmatrix}^2$ और E $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} - \theta \end{pmatrix}^2$ कमस $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$ और $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$ के प्रसरण निरूपित करते हैं। किसी धारूलक $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$ की दक्षता $1/V\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$ के समान होती है।

भाकलक θ दक्ष वहलाता है यदि इसके लिए निम्न दो प्रतिबन्ध सत्य हो।

- (1) यदि $\hat{\theta}$, n प्रतिदर्श प्रेक्षणो पर माधारित है तो \sqrt{n} $(\hat{\theta} \theta)$ का घटन मनन्तरफाँत प्रसामान्य है जिसका माध्य 0 और प्रसरण σ^2 के समान है ।
- (2) $\hat{\theta}$ का प्रसरण किसी भी ग्रन्य श्वास्तक $\hat{\theta}^{A}$ के प्रसरण से कम हो जबकि $\hat{\theta}^{A}$ भी प्रतिबन्ध (1) को सन्तुष्ट करता है। गणितीय रूप में,

$$V(\hat{\theta}) \leq V(\hat{\theta}')$$
(115)

$$\pi = E\{\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\}^2 < E\{\hat{\theta}' - E(\hat{\theta}')\}^2 \quad(1151)$$

बिन्द् प्राकलन की प्रधिकतम सम्भाविता विधि

पिछले खाड मे दिये हुए गुण जिस धानकन मे निवमान हो उसे पतुन्ततम या धर्यातम प्राप्तक न रहते हैं। यह प्राफ्तक घनेक निविधों द्वारा जात किया जा सनता है पर इनम से मुख्य विधि प्रधिनतम सम्मानिता निविधे है जिसका कि वर्णन यहाँ निया जात है। प्रधिनतम सम्मानिता प्रतिदर्शन सर्वोत्तम अनन्तस्पर्यंत, प्रसामान्य वर्ग का एक उपवर्ग है। इस विधि को सबे प्रथम प्रारं ए॰ फिशार ने सन् 1912 में सक्षिन्त रूप मे दिया जिसको शुरू समय प्रश्नाद स्वय उन्होंने श्री उम्रत रूप मे प्रसाद है।—

माना कि एक सतत बटन वाले समग्र से चयन किये गये 🗷 परिमाण के प्रतिदर्श के सम्भाविता फलन, L, को निम्न रूप में निरुपित किया गया है --

L
$$(X_1, X_2, X_3, ..., X_n, \theta) = f(X_1, \theta) f(X_2, \theta) f(X_3, \theta) ..., f(X_n, \theta)$$
....(11.6)

भौर यदि समय का बटन असतत हो, तो

 $L(X_1, X_2, X_3, ..., X_n, \theta) = p_q(\theta) p_q(\theta) ...p_n(\theta) ...(117)$ इन प्रापिकताफलनो मे केवल एक ही प्राचल 🛭 है। बात घधिकतम सन्भाविता विधि द्वारा प्राचन 8 के एक ऐसे माकलक वा परिकलन करना है जो फलन L को प्रधिकतम कर देना है। यह विदित है कि यदि L, 8 के किसी मान के लिए बृहद् हो तो log L भी जतना ही बडा होता है। ब्रत सन्भाविता क्लन के सधुनवरू, log L का 8 के सम्बन्ध में (with respect to) आंशिक अवकलन करके शुरुष के समान रख देते हैं भीर इस समीरुए की हुद करके 🌢 का सर्रोतम माकलक जात हो जाता है। गणिरीय कर मे,

$$\frac{\partial (\log L)}{\partial \theta} = 0 \qquad \dots (11.8)$$

, इस समीकरण का कोई भी मूल, Ø का प्रधिकतम सम्भाविता प्राकतक होता है, इस विद्यि की विशेषता निम्न दो साध्यो (propositions) से स्पष्ट हो बायेगी ।

साध्य 1: यदि heta के एक दश झाकलक heta का चरितरव है तो सम्भागिता समीकरण

(118) का कोई भी हल केवल है का फलन होगा।

साम्य 2 यदि है के एक पर्याप्त झारुतक है दा झस्नित्व है तो सम्प्रादिना

समीकरण (118) वाकोई भी हत देवत ∦ काफलन होगा।

मत. कलन (11.6) के लिए,

प्रत. क्लान (11.6) के लिए.

$$\frac{3\left(\log L\right)}{3\theta} = \frac{3}{3\theta} \left\{ \begin{array}{c} n \\ \leq \log f\left(X, \theta\right) \end{array} \right\} = K(\theta) + \left(\theta - \theta\right) = 0$$
....(11.81)

जबकि K एक सस्या है जो कि प्रतिदर्श प्रेक्षमी वे मुक्त है किन्तु यह 🛭 वर निर्भर

हो सदती है। समीदरण (!1.8.1) ना घटिनोय हल *वे≕∳* (s) है। उपमृक्त परिभाषामी एवं साध्यों को एक से ग्रायिक प्रायकों के लिए स्थापक बनाया या सनता है। माना कि एक सतत बटन, जिमने दो प्राचन 🐉 व 👂 है, के निए

सम्माजिता पत्तन, L. तिमा है —

L
$$\{X_1, X_2, X_3, ..., X_n, \theta_1, \theta_2\} \Rightarrow f\{X_1, \theta_1, \theta_2\} f\{X_2, \theta_1, \theta_2\}$$
.... $\{11.9\}$
...., $f\{X_n, \theta_1, \theta_2\}$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta_1, \theta_2)$$

पहले की मीति θ_1 व θ_2 के स्राधिकतम प्राधिकता पत्तन L का θ_1 व θ_2 के सम्बन्ध में प्राधिक सबकतन करने घृत्य ने ममान रख देने पर प्राप्त युगपत समीकरणों को हल करके, θ_1 , θ_2 के सावलन प्राप्त हो जाने हैं। इस प्रकार दो समीकरण हैं '—

$$\frac{\partial \left(\log L\right)}{\partial \theta_1} = 0 \qquad \dots (11.10)$$

धीर

$$\frac{\partial (\log L)}{\partial \theta_0} = 0 \qquad \dots (1111)$$

इसी प्रकार m प्राचनों ने अधिकतम प्राधिकता परन L का विनिन्न प्राचनों के सम्बन्ध में प्राधिक प्रवचनन करके शून्य के समान रखने पर प्राप्त m युगपत समीकरणों को हत करके, प्राचनों के आवनक जात किये जा सकते हैं।

उदाहरण 112: एक प्रसामान्य बटन, जिसके मजाद प्राचन मधीर σ^2 हैं, में से एक n परिमाण के यादिन्छक प्रतिदर्भ को चयन किया गया है तो इन प्रतिदर्भ प्रेक्षणों हारा प्राचनों मधीर σ^2 के अधिकतम समाविता माकतक निम्न प्रकार क्षांत कर सकते हैं। फलन,

$$\begin{split} L\left(X_{1} \ X_{2}, ..., X_{n}, \, \sigma^{2}\right) &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{n} \frac{1}{|1|} \, e^{-\frac{1}{2\sigma^{2}} \left(X_{1} - \mu\right)^{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \left(\frac{1}{\sigma^{2}}\right)^{n/2} \, e^{-\frac{1}{2\sigma^{2}} \sum_{i}^{\infty} \left(X_{i} - \mu\right)^{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \left(\frac{1}{\sigma^{2}}\right)^{n/2} \, e^{-\frac{1}{2\sigma^{2}} \cdot \sum_{i}^{\infty} \left\{\left(X_{i} - \overline{X}\right) + \left(\overline{X} - \mu\right)\right\}^{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \left(\frac{1}{\sigma^{2}}\right)^{n/2} \, e^{-\frac{n}{2\sigma^{2}} \cdot \left\{s^{2} + \left(\overline{X} - \mu\right)^{2}\right\}} \\ &= \sqrt{4\pi} \left(\frac{1}{\sigma^{2}}\right)^{n/2} \, e^{-\frac{n}{2\sigma^{2}} \cdot \left\{s^{2} + \left(\overline{X} - \mu\right)^{2}\right\}} \end{split}$$

एनन log L नाण व ठ⁸ ने मम्बन्ध में धाशित धवक्तन वरके झून्य ने समान रख दिया, इस प्रवार प्राप्त समीवरणो को हल, वरने धावलक ज्ञात वर निमे जो वि इस प्रवार हैं —

(क) म का ग्राक्लन, जबकि ज² जात है,

$$\log L = -\frac{n}{2} \, \log \, \{2\pi\} - \frac{n}{2} \, \log \, \sigma^2 - \frac{n}{2 \, \sigma^2} \, \left\{ (\, \overline{X} \, - \mu \,)^2 + s^2 \, \right\}$$

$$\frac{2(\log L)}{3\mu} = \frac{n}{2\sigma^2} \cdot 2(\overline{X} - \mu) = 0$$

$$= \pi (\overline{X} - \mu) = 0 \qquad ...(1)$$

इसी प्रकार o2 के आकलन के लिए, जबरि व जात है,

$$\begin{split} \frac{\partial \left(\log L\right)}{\partial \sigma^2} &= \frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{n}{2\sigma^4} \left\{ s^2 + (\overline{X} - \mu)^2 \right\} = 0 & \dots (11) \\ &= \prod_{i=1}^n \sigma^2 = \left\{ s^2 + (\overline{X} - \mu)^2 \right\} \\ &= \prod_{i=1}^n \left\{ (X_i - \mu)^2 \right\} & \dots (17) \end{split}$$

ाद σ² क्षा एक साथ आकलन करने ने लिए (₂) और (ιν) की सहायता से,

$$\sigma^{\lambda} = \frac{1}{n} \Sigma (X_1 - \overline{X})^2 \quad (: \quad \stackrel{\Lambda}{\mu} = \overline{X})$$

प्रतः ⊬ भौर ४² के प्रधिकतम सम्भाविता बाक्सक जनस 💢 घोर ४² हूँ १ यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि यह माक्तक अनतत्त्वार्यत प्रमासान्य खोर दस है।

उदाहरण 11:3 माना नि n परिमाण ने प्रनिदर्भ ना द्विपद बटन माने समग्र से चयन क्या गया है जिसना प्रायिकता पत्रन

$$f(X, p) = p^X q^{(1-X)}$$

$$(\exists \xi^{\dagger} \quad X=0, 1)$$

है। द्विपद बटन के लिए पलन,

L
$$(X_1, X_2, ..., X_n, p) = \frac{n}{i-1} p^{X_1} (1-p)^{1-X_1}$$

 $(\because q=1-p)$

$$= p^{\frac{x}{i}} (1-p)^{n-\frac{x}{i}} X_1$$

$$\therefore \log L \to x X_i \log p + \{n-x, X_i\} \log \{1-p\}$$

फलन log L का p के सम्बन्ध में प्राधिक धवक्सन करके धून्य के समान रख दिया। इसको हल करके p का बाकलन ज्ञात कर लिया।

$$\frac{\partial (\log L)}{\partial p} = \frac{1}{p} \sum X_i - \frac{(n - \sum X_i)}{1 - p} = 0$$

$$\frac{(1 - p) \sum X_i - p (n - \sum X_i)}{p (1 - p)} = 0$$

$$\therefore (1 - p) \sum X_i - p (n - \sum X_i) = 0$$

$$\sum X_i - p n = 0$$

$$\text{at } p = \frac{1}{n} \sum X_i$$

$$= \overline{X}$$

धत p का अधिवतम सम्माविता धावलक रिहै। ऊपर दिये गये उदाहरणों की भौति हम धन्य विश्वी भी बटने के प्रावकों के धाकलक, ध्रिष्टक्तम सम्भाविता विशि द्वारा कात कर सकते हैं। इस विशि के अतिरिक्त प्राप्तों के धक्ये धावलक शात करने की अस्य विश्वि में स्थावित के प्रको धावलक शात करने की अस्य विश्वि है −(1) धापूणों के द्वारा (method of moments), (2) न्यूनतम वर्ग विश्वि (Method of Least squares), (3) न्यूनतम प्रसरण-विश्वि (Method of minimum Variance), (4) न्यूनतम दाई दर्ग विश्वि (Method of minimum Variance), (4) न्यूनतम दाई दर्ग विश्वि (Method of minimum Variance), विश्व न्यूनतम विश्वि को दिया प्राप्त है। अस्य विश्वियों प्रवलन में कम हैं धन इन विश्वियों का विवरण नहीं दिया गया है। अस्य विश्वियों प्रवलन में कम हैं धन इन विश्वियों का विवरण नहीं दिया गया है।

चन्तराल बाकलन

बिन्दु प्राप्तलन के द्वारा प्रलिदमें प्रेक्षणों ना एक वह फलन आत करते हैं जो प्राप्तल का एक निश्चित मान जानना भावस्थक न होन्द, वे सीमाएँ जानना ही पर्याप्त होता है जिनमें कि प्राप्तल का यह मान स्वीकृत होने की एक निश्चत प्रार्थितना है। जैसे एक प्रकार के तार की तार्थित समता (tensile strength) या प्रत्यास्था-सीमाएँ (clastic limits) भादि तात करते हो तो प्रम्तराल मानकन प्रियमाननीय है। यनतराल सानकन ये जन दो बिन्दुसी l_1 पौर l_2 ($l_1< l_2$), जो कि प्रतिवद्ध प्रस्तान के उन दो बिन्दुसी l_1 पौर l_2 ($l_1< l_2$), जो कि प्रतिवद्ध प्रस्तान के उन हैं। हम प्रत्याद आव करते होते हैं कि प्राप्तल के l_1 प l_2 वे भीच में होन की प्राप्तिवता ($l-\sigma$) है।

$$p(l_1 < \theta < l_2) = 1 - \alpha$$
 ...(11 12)

जहाँ व इन्छित सार्येवता स्तर है, (1 - a) को विश्वास्थता कुणांद कहते हैं सुपा र्मि भौर / वे प्रन्तर को विश्वास्पता अन्तराल कहते हैं। जिनना सार्थकता स्तर α कम होता है उतना ही विश्वास्थता धन्तराल प्रधित होता है। प्रत इसने इन प्राथय पर पहुँचते हैं नि छोटे से छोटा बन्तरास, जिसनी प्राधिनता (1 - a) हो, सर्बोच्च होता है। विस्तु व्यवहार में एक ऐसे सर्वोच्च बन्तराम का, धन्नात प्राचस θ के लिए धस्तित्व नहीं है ।

मत सीमाओं के मन्तर d, (l₂ ← l₁=d) को स्पूनतम करना उचित है। भाना कि विश्वास्यता घन्तराथ कपन E (d) है जो वि श्रीसत अन्तराप की प्रर्शित करता है मीर ह ने किसी भी मान ने लिए न्यनतम है। यदि म परिमाण ने प्रतिरंगे

हारा समग्र माध्य ह ना 95 प्रतिशत विश्वास्थना धन्तराल जात रूपना है जर्री प्रतिदर्श ना चयत प्रसामान्य समग्र से निया गया है जिनने प्राचल (+, e2) है तो दी सस्याएँ a भौर b (a < b) जात करनी होनी हैं जो कि निम्न शमाक्स की सनुष्ट करती है।

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{b} e^{-\frac{3}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^{2}} dx = 95 \qquad(11.13)$$

निम्न प्रतिस्थापन गरने पर.

$$(X-\mu)/\theta = Y$$
 of $dX = edY$
of $X = a$ $Y = (a - \mu)/\theta$
whe $X = b$, $Y = (b - \mu)/\theta$

(11-13) में प्रतिस्थापन बारने पर समावस निम्न हो जाता है ---

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-\mu}{e}}^{\frac{b-\mu}{e}} e^{-\frac{Y^2}{2}} dY = 95 \qquad(11131)$$

इसी सिद्धान्त के आधार पर विश्वसम्पता सीमाएँ आत कर सकते हैं। स्थवहार मे मीपनतर शक्तात नहीं होता है बत इसने स्थान पर इसने आवस्तित मान ३ ना प्रयोग रिया जाता है, यदि

$$Y \simeq \frac{X-s}{s/\sqrt{n}}$$

 $Y\simeq \frac{\overline{X}-s}{s/\sqrt{n}}$ है, तो s को 95 प्रतिशत विश्वस्थित सीमार्थों के निए,

$$\int_{0.5}^{0.5} f(Y) dY = 95$$

$$p \left(-t_{05} < Y < t_{05} \right) = 95$$

$$p \left(-t_{05} < \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} < t_{05} \right) = 95$$

भत ॥ की विश्वास्यता सीमाएँ हैं .

$$\overline{X} \pm t_{05} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

भाध्य व प्रसरण के लिए विश्वास्यको बन्तराल बन्याय 9 में दिये जा कुके हैं। यहाँ केवल बन्तराल बाकलन के सिद्धान्त को संसिष्ट में दिया मया है।

एकसमान शक्ततम परीक्षा

परिण्हपना \mathbf{H}_0 $\theta = \theta_0$ भी \mathbf{H}_1 $\theta = \theta_1$ के विश्वद परीक्षा से परीक्षा की सामध्यें संकृष्टिक परिल्हपना \mathbf{H}_1 पर निर्भर करती है । गणितीय रूप में इते $\{1-\beta(\theta_1)\}=P(\theta_1)$ द्वारा सृष्टित करते हैं। प्राथल θ में कलन $P\left(\theta\right)$ भो समता फलन (Power function) कहते हैं। σ नज $P\left(\theta\right)$ ना $\theta = \theta_0$ पर मान $P\left(\theta_0\right) = \alpha$ होता है भीर $\theta = \theta_1$ पर मान $P\left(\theta_1\right) = \{1-\beta\left(\theta_1\right)\}$ होता है।

विन्दु θ = θ₁ पर वह परीक्षा जो जन्य परीक्षाओं की अपेक्षा अधिक गत्तिगाली हो अपीत् निविन्द ■ {प्रथम प्रवार की नृटि की प्रायिकता} के लिए जिसमें डितीय प्रकार की मृटि की प्रायिकता} के लिए जिसमें डितीय प्रकार की मृटि की प्रायिकता 'β' न्यूनतम हो, वह परीक्षा शक्ततम होगी।

यदि कोई शक्तनम परीक्षा θ_1 के समस्त सम्भव मानो के लिए शक्ततम रहती है, तो हुँ एक्समान शक्तनम परीक्षा कहते हैं। यणितीय रूप ये एक्समान शक्ततम परीक्षा को तिम्न रूप में दिया जा सबता है —

माना कि R एक त्रातिक क्षेत्र को निरूपित करता है और R' कोई सग्य त्रातिक क्षेत्र है और X प्रतिदर्श समस्टि में कोई एक बिन्दु है तो R के एक्समान शक्ततम परीक्षा होते के लिए निम्न प्रतिकाय सत्य होने चाहिये —

(i)
$$P\{x \in R \mid \theta_0\} = P\{x \in R' \mid \theta_0\} = \alpha$$
(11.14)

(ii)
$$P\{x \in R \mid \theta_1\} > P\{x \in R' \mid \theta_1\}$$
 ...(11141)
 $\widehat{RR} = \theta_1 \in \Omega - \theta_0$

जहां ∂ ने समस्त सम्भव मानो की समप्टि Ω है। इस Ω को प्राचल समप्टि कहते हैं।

यदि \mathbf{H}_0 इस प्रकार हो कि θ ϵ ω , जहाँ = प्राचल समस्टि Ω , वी उप-समस्टि है, तो प्रतिबन्ध (॥) मे θ ϵ Ω - = सत्य होना चाहिये।

यह बात प्यान देने योग्य है कि इस प्रकार की शरीक्षा का कम ही दियतियों भे भरितत्व है।

सम्भाविता धनुपात परीक्षा

माना कि समय, $[x_i (x | \theta_1, \theta_2)]$, में से त परिमाण के एक बाइन्छिक प्रतिदर्भ का चयन किया गया है और प्रतिदर्भ प्रशास $X_1, X_2, X_3,, X_n$ हैं। यहाँ प्राचानों θ_1, θ_2 के दिविसितीय (two dimensional) प्राचम ममस्टि को दिवार करना होता है। इस समस्टि में θ_2 के θ_3 के यथा सम्भव मानों का समावेश हैं।

साना कि प्रेसको के एक प्यान L $(X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$ को परीक्षा पलन के रूप में निया गया है। तो सब यह देखना है कि प्राचल मान, समस्टि अ में है या $(\Omega - \omega)$ में है। यास्तव में एत्मबान गणतम परीक्षा प्यान क्षान करना चाहेंगे हिन्तु स्वयन्द्रार में देशे प्राप्त करना करिन है। धन यहीं एक ऐसी परीक्षा का यठन किया गया है थो हुए प्रमुक्तनम मुख सम्प्र है। यह परीक्षा विधा सम्मादिना धनुपात के मिद्धान्त पर निर्मेश है। साना कि प्रतिदर्श प्रोधा विधा सम्मादिना धनुपात के मिद्धान्त पर निर्मेश है। साना कि प्रतिदर्श प्रोधान का प्राप्ति वा एक्तन

$$f(X_1, X_2, X_3, ..., X_n/e_1, e_2), f(x/e)$$

द्वारा निरूपित है जहाँ $x = \{X_1, X_2,, X_n\}$ मोर $\theta = \{\theta_1, \theta_2\}$

 $H_0:\theta,=$ मे है, की $H_1:\theta,$ $(\Omega,-=)$ मे है, के विरुद्ध परीक्षा करती है ! परीक्षा के लिए सनुपान L (x) आत करते हैं, जबकि

$$L(x) = \frac{\max_{\theta \in \omega} f(x \mid \theta)}{\max_{\theta \in (\Omega - \omega)} f(x \mid \theta)} = \frac{\psi(\frac{\alpha}{\omega})}{\psi(\hat{\Omega})} \qquad \dots (11.15)$$

उपर्युक्त सूत्र में ψ $(\hat{\Omega})$ प्रायन सम्बद्धि θ ने स्थितनम सम्मानिता सारमार्गे हैं निए प्रायितना फनन को मान है भीर θ के भी भी मान प्रायितना फनन को मधिकतम

करते हैं, उन मानों के लिए शासिकना फनन का श्रीशक्तम मान $\psi\left(\hat{R}\right)$ हारा निक्षित है।

(11.15) द्वारा परिस्तित L(x) का मान क्यारि क्ष्मात्मक तथा एक से मिक्क नहीं हो सकता है। क्योंकि L(x) दो आदिकता पत्तनों का सनुसाव है। माप ही ψ (\hat{x}) ये कम या समाद हो सकता है। इसका कारण यह है कि $I(x/\theta)$ को \hat{x} से पिक्तम करने की $I(x/\theta)$ के Ω में मिक्तम करने की मोता कम स्वस्तात है। इस $I(x/\theta)$ के $I(x/\theta)$

uqfq 0<L(x)<1

मंद L (द) का परिकतित मान 1 के समान या एक से कुछ कम हो हो इसना

भामप्राय है कि ψ ($\overset{\circ}{\omega}$) शीर ψ ($\overset{\circ}{\Omega}$) समान या एक दूसरे के स्वमम समान है। इस स्थिति मे H_0 को भ्रस्वीनार करने का भौजित्य नहीं है भर्यात् H_0 स्वीकार्य है। इसके विभर्तत यदि ψ ($\overset{\circ}{\omega}$) भीर ψ ($\overset{\circ}{\Omega}$) निकट न हो भर्यात् यदि L (x) का मान शून्य के निकट हो तो H_0 को मिष्या समभ्य जाता है भर्यात् H_1 स्वीकार्य है। भ्रतः हमे एक सस्या 'K' ज्ञात करनी है जो कि 1 से कम हो भीर जो इन्छित प्रथम प्रकार की नृष्टि (α) को नियमित्रत कर सके।

यदि L(x) < K हो तो H_0 को शस्त्रीकार कर लिया जाता है धन्यया H_0 को स्वीकार कर निया जाता है। इस प्रकार L(x) के निए सगय धन्तरात सर्वक 0 < L < K की भीति होता है। परीक्षा के हेतु K का मान, L(x) के बटन और प्रथम प्रकार की तृष्टि (a) की सहायता से निम्न सम्बन्ध हारा जात कर लिया जाता है। माना कि L(x) का सत्त वारम्बारता बटन $g(L,H_0)$ है जबकि H_0 सर्य है।

$$\int_{a}^{\kappa} g \left(L, H_{0}\right) dL = \alpha \qquad(11.16)$$

 $L\left(x\right)$ का समय अन्तराल मात करने के लिए यह श्वावस्थक है कि H_{0} के सस्य होने की स्थिति में $L\left(x\right)$ का बारम्बारता बटन मात हो ।

यदि Ho सरल परिकल्पना हो ठो L (x) का ब्राइतीय बटन होता है। ब्रत K का

महितीय मान ज्ञात हो जाता है।

िक नु यदि H_0 संयुक्त परिवरणना हो तो L(x) का प्रदितीय बटन का होना प्रावरण नहीं है। इस स्थिति में K ना एक मान शात होना प्रावश्यक नहीं है। प्रतः ऐसी दसा में समस्या भीर अंटिन हो जाती है और समके निवारण के लिए परीसा में कुछ अग्य बातों को जोडना होता है किन्तु दनना वर्णन यहाँ नहीं दिया गया है। इस समस्या को इस प्रस्तक के बीज के बाहर ही रक्षा गया है।

भनेकों स्थितियों में सम्माविता अनुपात परीक्षा के निम्न गुण पाये जाते हैं :--

(1) मदि एकसमान शक्ततम परीक्षा का अस्तित्व है तो अधिनंतम अनुपात परीक्षा द्वारा यह प्रान्त हो जाती है।

(2) बदि प्रतिदर्श परिमाण बृहत् हो तो - 2 log L (x), लयभग काई-वर्ग (X²) बदित होता है जिसकी स्वतन्त्रता-कोटि, प्राचलो की सस्या के समान है।

उदाहरण 11.4 एक प्रसामान्य समय, जिसके माध्य च प्रसरण त्रमश ॥ व ज² है, से एक n परिमाण के प्रतिदर्श का चयन विधा गया है । माना कि प्रतिदर्श प्रेक्षण

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_i \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}} \qquad \dots (1)$$

उदाहरण (112) में यह शात किया जा चुना है कि स्व s² के प्रियिक्तभ सम्भाविता भावलक तमस निम्न हैं —

$$_{\mu}^{A} = X$$
(2)

ग्रीर

$$\sigma^{A} = \frac{1}{n} \operatorname{I}_{1} (X_{i} - \overline{X})^{2} \qquad \dots (3)$$

इन भागतरों के मान (1) में प्रतिस्वापित करने पर, ♥ (n) निम्त है :--

$$\begin{split} \psi(\hat{\chi}) &= \left(\frac{1}{\frac{1}{\sigma^2} (2\pi)}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{8} \frac{X}{\alpha} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\frac{\Lambda}{\sigma^2}}} \\ &= \frac{e^{-n/2}}{(2\pi \sigma^2)^{n/2}} \\ &= \left\{\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{1}{8}} (X_i - \overline{X})^2}\right\}^{n/2} \cdot e^{-n/2} \qquad(4) \end{split}$$

f(x) को ω ने स्राधिततम करते हेतु, $\rho = C$ रण दिवा । समस्य σ^2 , H_0 के भारतमंत्र निम्न स्राधिततम स्राष्ट्रस्य कात दिया वा सरता है।

$$\hat{A}_{2} = \frac{1}{n} \underbrace{x}_{i} (X_{i} - C)^{2}$$

$$\psi(A) = \left\{ \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)_{i}^{n} (X_{i} - C)^{2}} \right\}^{n/2} e^{-\frac{1}{n} x(X_{i} - C)^{2} / \frac{1}{n}} \underbrace{x}_{i} (X_{i} - C)^{2}$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)_{i}^{n} (X_{i} - C)^{2}} \right\}^{n/2} e^{-n/2} \qquad(5)$$

यत (5) और (4) द्वारा यधिकतम सभाविता यनुतान,

$$L = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)_{i}^{2}} \left(X_{i} - C\right)^{2} \end{array} \right\}^{n/2} e^{-n/2} \\ = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi} \sum_{i} \left(X_{i} - \overline{X}\right)^{2} \end{array} \right\}^{n/2} e^{-n/2} \end{array}$$

चतः $L = \left[\frac{\sum_{i} (X_i - \overline{X})^2}{\sum_{i} (X_i - C)^2}\right]^{n/2}$ (6)

मब हमे Hn के मन्तर्गत, L का धनत्व फलन ज्ञात करना है।

$$\sum_{i} (X_{i} - C)^{2} - \sum_{i} (X_{i} - \overline{X})^{2} + n (\overline{X} - C)^{2}$$

(6) के द्वारा,

$$L = \left\{ \frac{1}{1 + \frac{n(X - C)^2}{\frac{n}{2}(X_1 - X)^2}} \right\} \dots (7)$$

सूत्र (9.1) की सहायता से,

$$t^2 = \frac{n (n-1) (\overline{X} - C)^2}{\Sigma (X_1 - \overline{X})^2}$$

या

$$\frac{n(\overline{X}-C)^2}{\sum_{i}(X_i-\overline{X})^2} = \frac{t^2}{(n-1)}$$

मत: समीकरण (7) निध्न हो जाता है:-

$$L = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -\frac{1}{1+t^2/(n-1)} \end{array} \right\}^{n/2} \qquad(8)$$

जबकि t की स्व० को० (n-1) है। t के घनरव फलन में, $\{8\}$ हारा प्रतिस्थापन करने पर, L का घनरव फलन झात हो जाता है जो कि निम्न प्रकार है :—

हम जानते है कि । का धनत्व फलन निम्न है .-

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)^{\frac{1}{2}}\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\therefore g(L, H_0) = \frac{1}{(n-1)^{\frac{1}{2}} \beta(\frac{1}{4}, \frac{n-1}{2})} \dots (9)$$

(1) ना प्रयोग रस्त (11 16) द्वारा K ना मान जान नर सनते हैं। बास्तव में यही L ना बटन ज्ञान नरन नी प्रावश्यनमा नहीं है नवानि L, १९ ना एक एन स्टिट स्थान-मान पत्रन (monotonic decreasing function) है। बन हम १९ से बही परीज्ञा नर सनते हैं जो नि L में नी जा मनती है।

सम्बन्ध (8) में स्पष्ट है ति

यदि 12=0 हा ना L=1 है भीर 12=∞, हो तो L→0

इत प्रकार समय प्रान्तरात 0 < L < K, अन्तरात १९ > A ने तुन्य है जबकि A का मान, सम्बन्ध (8) में K व द्वारों कार किया जा सन्ता है।

माता कि यहाँ दो पुण्छ परीक्षा हैं। धेके निए कालिक क्षेत्र α के समस्त सिया आने की स्थिति में, Ηα के विषय में निर्णय निम्न नियमानुमार कर मकते हैं।

मिंद $t > t_{0,1/2}$, $\{n-1\}$ हा तो H_0 को सम्बोकार कर दिया जाता है स्रोर इसके विषयीत दियति से H_0 को स्त्रीकार कर दिया जाता है स्वर्षक,

$$1 = \frac{\sqrt{n(n-1)|\overline{X} - C|}}{\sqrt{x(X_1 - \overline{X})^2}}$$

टिप्पणी: इसी प्रवार ने उद्यक्ति अन्य परिनाणकाय की वर्षाता के हेतु भी दिये जा गनने हैं जैसे n बरदूनी गरीनका के निक् जंबति संवतना की शायिकता है है। Ho: P ∞ है नी H₁: P ≠ है के बिक्ट प्रधिननम समास्ति। प्रमुखन परीक्षा करती हो हो ही हुई विधि का प्रयोग कर सबने हैं। काटर इस परीक्षा को क्यू करने देखें।

प्रश्नायसी

- । एक प्रमामान्य समय से चयनहुन ॥ त्रिनदने प्रेथमा के घाधार पर परिकलना H_n , $\sigma^2 = \sigma_n^2$ की प्रशिक्तम मनाविना प्रमुखन परीक्षा की निषे ।
- पृत्त सक्षय का सभीविता धनाव भारत, (४) = 1/2 है जबकि 0 < x < 8 इस समझ से एक छ परिवाण के प्रतिदर्भ का चयन दिया स्था है तो प्राचन के का प्रविक्तम समाविता ब्राटनक शास की विसे ।
- 3 दिपद बटन पपन,

$$f(r) = {n \choose r} \frac{p^r q^{n-r}}{1-q^n} \qquad \forall \xi^{\dagger} \quad r=1, 2, 3,..., n$$

म p का समितनम मभाविता भारतक जात की विये जबित

4 क्या प्रतिदर्भ मध्य मदेव एत समय मध्य का दश धारणक है ? प्रति उत्तर की स्था के आधार कर पुष्टि की निय ।

- 5. प्यासो बटन $\frac{e^{-m}}{r^{+}}$ के लिए m का मधिकतम समाविता माकलक शात नीजिये ।
- 6. एक भायतीय समग्र (rectangular population)

$$f(x, \beta) = \frac{1}{\beta}, 0 < x < \beta, 0 < \beta < \infty$$

=0. चन्त्रया

से चयनकृत n प्रतिदर्श प्रेक्षणों के साधार पर ह का सधिकतम सम्भाविता सम्भ-लकतात कीजिये।

7. एक चरपाताकी समय (exponential population)

$$I(x; \alpha, \beta) = y_0 e^{-\beta (x-\alpha)}, \alpha < x < \infty$$

=0

(जहाँ y_o एक स्थिराक है) से चयनकृत n प्रतिदर्भ प्रेक्षणो के साम्रार पर α सौर β के मधिकतम सन्प्राविता प्राकतन कात वीजिये। (दिस्ती, 1959)



प्रतिचयन से प्रभिप्राय किसी समय में से नियमानुसार कुछ, एकको वा चयन करना है। अन एक्का के चयन करने के लिए नियमों ने निघारण को प्रतिचयन विधियों कहते हैं।

प्रतिषयन गान्यिकी विज्ञान का एव मुख्य सग है क्यांकि समिनौंश प्रध्यपन प्रतिदेश पर ही साधारित होते हैं। प्रतिदश सध्ययन दे स्रविरिक्त हुछ सध्ययन पूण परिगणन (Complete enumeration) पर भी भाषारित होने है । इन ब्रध्ययना में प्रत्येत एक्क पर प्रेक्षण लिये जाते हैं जैसे क्लिया शहर म कर (Tax) देन बागो की सक्याया किसी बस्तु का फीक्ट्रया द्वारा कुल उत्पादन चादि वे विषय म जानवा है। परान्तु माय कुछ हियतिथी में समग्र ना निमी लक्षण के प्रतिपूज परिगणन बरना एक कठिन समस्या है। जैत दिल्नी में परिवारा की भौतत थाय तथा व्यय का पढ़ा खयाना यह दिल्ली की जनता के रक्त वर्ग ने बटन ना पना समाना मादि जाननारी ने लिए पूण परिमणन एक कटिन समस्या है क्योंकि इसके लिए ग्राधिन समय धन एक प्रशिद्धिन व्यक्तिया की ग्रावस्थवता होती है जिनका कि भविकतर उपलब्ध हानी कठिन है।

ग्राजरल देश या विदेश संचत रही विभिन्न योजनामी का ज्नता पर प्रभाव भीर भ्रापे दनायी जाने दाली योजनामी क लिए जानकारी या नवे नियमो ने कारण जनना पर सामाजिक एव पाधिक हरिट स प्रभाव जातना लगभग बायस्यक हो गया है। इन जात-कारियों के हेतु प्रत्यधित समय या धन लयाना उचिन नहीं समझा जाता है। घट पूर्ण

परिगणन की सपेका प्रतिदर्भ अध्ययन एक उचित माग है।

कुछ प्रध्ययनो मे जिनम कि प्रेशन सेते समय वस्तु या जीव का विनाश हो जाता है इनकी पूर्ण परिणणना करना अनुचित है। पूर्ण विनाश यहते ही कर दिया तो आस्पन का म्या साम होगा ? जैसे एक फैरट्री डारा उत्पादित दिवसी के बत्वा का माप्य जीवन रास कात करना हो उत्पादित तार की टूटने की शक्ति जानना हो किसी व्यक्ति के नून की जांच करती हो या पतीसी में बढ़े वादता के पक्ते की जांच करता, बादि परीक्षण करते मे एकको के दिनाश हो जाने के प्रत्यक्ष उदाहरण हैं।

कुछ व्यक्ति सममते हैं कि प्रतिदश हारा प्राप्त परिणाम मृद्धि मुक्त होते हैं धीर पूण परिगणन द्वारा प्राप्त परिणाम गुढ होते हैं। किन्तु उनका बह विचार सस्य नहीं है क्यांक दोनो ही विषयो त्रुटिपूण हैं । इनके साथ-साथ सदय परिणुद परिणामा की धावक्यकता भी नहीं होती है। विसी दियय से अनुवान सन्ता के लिए न तो पूच परिनपन विया जा सकता है भीर न इसकी भावस्थाता है जैसे थाने वानी अग्रुस में बुन उप्पान्त या मार्ग बाते कुछ बयों में विसी देश या शहर की जनसंस्था गार्थ का प्रमुमान संपाना है।

प्रनिदश मध्ययनो में दो प्रकार की वृद्धि होनी है (क) प्रनिक्यन वृद्धि (Sampling error) (त) प्रजीवन्यन वृद्धि (Non-Sampling error)

- (क) वे त्रुटियों जो प्रतिदर्श के चयन प्रथवा प्रतिदर्श प्रेक्षणों के साधार पर समप्र वे प्रति निर्णय लेने में उत्पन्न होती हैं प्रतिचयन त्रुटियों कहलानी हैं। जंसे जंसे प्रतिदर्श परिमाण घढता है प्रतिचयन त्रुटियों कम होनी हैं। प्रारम्भ में तो इस त्रुटि में कमी मधिन होती हैं विन्तु एक प्रवस्था के बाद यह नभी नाम मात्र ही रह जाती है। प्रत प्रतिदर्श का प्रपुक्तिल्य परिमाण (optimum size) ज्ञान वरने सर्वेक्षण वे व्यय को पर्यान्त मात्रा में प्रदाया जा सकता है। निर्णय को के लिए एक सीमा तक श्रुटि को स्वीवार कर लेते हैं। बहु छोटे से छोटा प्रतिदर्श-परिमाण जिमसे त्रुटि को उस सीमा म रहना ताममा निष्तित हो, प्रतृत्वत्तम परिमाण कहलाता है।
- (त) प्रप्रतिचयन पृटियों वे हैं जो प्रांव हें सेन व प्राप्त न्याम (data) की प्रतिया (processing) करने वे समय होती हैं। वे पुटियों पूर्ण परिगणन एव प्रतिदर्श सर्वेंसण दोनों ही स्थितियों म होती हैं। पूर्ण परिगणन म प्रतिचयन पुटि का तो प्रका हो नहीं है किन्तु इससे प्रतिदर्श सर्वेंसण की मधेशा मर्पातचयन नृटि प्राय मधिक होती है। जैसे,
 - (1) न्यास के सग्रह ग्रयांत प्रेक्षणों के लेने में वटि।
- (ii) यदि एक सर्वेक्षण में घनेको भेंटकक्तां (investigators) हैं तो उनने साझात-कार विधि में घन्तर के कारण वटि ।
 - (111) सारणीयन मे त्रृटि, मादि ।

प्रतिचयन तृष्टि को कम बरने का एक मान उत्ताय, उचित प्रतिचयन विधि व प्रतिदर्श परिमाण भौर प्रम्य उत्तम प्रविधियों का प्रयोग करना है जबकि सप्रतिचयन नृष्टि प्रच्छे प्रबच्य तथा कृतत ब्यक्तियों की सेवाओं को प्राप्त करने वस की जा सबती है।

यावृध्यिक या प्राधिकता प्रतिचयन

माना कि एक समय मे N एकको U_1 , U_2 , U_3 , . , U_N हैं और इनमें से \mathbf{n} एकको का चयन किसी विशिष्ट विधि द्वारा किया गया हो तो ये एकक एक प्रतिवर्ध का गठन करते हैं। प्रतिचयन करने की विशिष्ट विधि यदि प्रायिकता के नियमा पर प्राधारित हो तो इसे यहिष्ण्य प्रायिकता प्रतिचयन कहते है। येते N समय एकको में से प्रत्येक एकक का चयन समान प्रायिकता से प्रतिस्थापन या विना प्रतिस्थापन सिंहत किया गया हो तो यह स्थापन साहित किया गया हो तो यह स्थापन सिंहत किया गया हो तो यह स्थापन सिंहत किया गया हो तो यह स्थापन सिंहत किया गया हो तो यह स्थापन के परचात् पुन समय में सम्मितित कर दिया जाता है प्रीर विना-प्रतिस्थापन के प्रतिचयन में एक एकक चायन होने के परचात् पुन समय में सम्मितित कर दिया जाता है प्रीर विना-प्रतिस्थापन के प्रतिचयन में एक एकक हो चयन करने के प्रचात् समय से यसना ही रखा जाता है स्थापन प्रतिस्थापन के प्रतिचयन के स्थापन विम्म हैं —

समय के प्रत्येक एकक के प्रतिदर्श में सम्मिलित होने से सम्बद्ध प्रायिकता ज्ञात होनी चाहिये और शृत्य से सधिक होनी चाहिए।

वह एक्क जिनका प्रतिदर्श के लिए ज्यन किया जाता है उन्हें प्रतिदर्श एकक कहते हैं भीर इन एकको पर लिए गये याप प्रतिदश प्रेक्षण कहताते हैं। प्रतिदर्श परिमाण 'n' व समग्र परिमाण 'N के अनुपात $\frac{n}{N}$ को प्रतिचयनानुपात

(sampling fraction) कहने हैं ग्रीर दी प्राय सिं सूचित करते हैं।

यदि समय से प्रतिदर्श एकनो का चयन बाइण्डिक न हो ता इस प्रकार की प्रतिवयन विधि नो प्रयाद्धिक प्रतिवयन विधि कहते हैं तथा इस विधि द्वारा प्राप्त प्रतिदर्श को प्रयाद्धिक प्रतिवर्श कहते हैं। इस प्रकार के प्रतिदर्श को प्रयाद्धिक प्रतिवर्श कहते हैं। इस प्रकार के प्रतिदर्श का चयन किसी सहायक सूचना के प्रतुतार क्यक्तिगत रूप से शिया जाता है और यह प्राामा की जाती है कि यह प्रतिदर्श समय का एक सच्छा प्रतिनिधि है। ऐसे प्रतिदर्श को सोहेश्य प्रतिदर्श (putposive sample) पहते हैं। निन्तु ऐसे प्रतिदर्श में सर्दश क्यक्तिगन प्रिमिनति (bias) होने की सम्भावता रहती है और साथ ही इस प्रकार के प्रतिचयन के प्रिमित्त का स्वाप्त के प्रतिचयन के प्रतिचयन का प्रयोग किया जाता है। यहिन्छत क्रिनेत्वा यो छाइगर सर्दश प्राधिकत प्रतिचयन का प्रयोग किया जाता है। यहिन्छत प्रतिचयन विधियो का वर्णन इस प्रध्याय में दिया गया है।

समग्र और प्रतिचयन युनिट

सर्वेक्षण व रने से पूर्व समझ के विषय में तय व रना होता है। यह एवं निश्चित क्षेत्र में वह सम्पूर्ण समुदाय है जिसके दिवय में जानवारी प्राप्त वरना है जैसे किसी फ्रेंब्ट्री हारा उत्पादित बस्तों ना समूह या भाग वोदे पदार्थ, राजस्थान में मभी खेत, एक बाग में सभे हुए सभी काल, एक हेन में विद्याना वीट, एक बहुर में सभी परिवार या किसी प्राप्त में हुए सभी काल, एक हेन में विद्याना वीट, एक बहुर में सभी परिवार या किसी प्राप्त में बेकारों का समूह झारि समय ने रूप में तिए जा सकते हैं। समग्र वा रूप एवं आवार सर्वेक्षण या अनुस्थान के कीट एवं सक्ष पर पूर्णत्या भाषारित है।

प्रतिचयन में समय ने युष्ठ एकनो का पदन करता होना है जिन पर प्रिन्ते एननित नरते होते हैं। प्रत्येन एक को प्रतिचयन एक नहते हैं। अवय ने इन एक्सो नो निविधित करते समय व्याध्यक साम्याधीन निविधित करते समय व्याध्यक साम्याधीन निविधित करते समय व्याधीन साम्याधीन निविधित करते समय व्याधीन निविधित करते हैं। यदि व्याधीन निविधित करते होता है प्रतिच नहते हैं व्याधीन निविधित करता होता है प्रयोग प्रतिच निविधित करता होता है। यूप्त प्रतिच निविधित करता होता है। यूपत प्रतिच निविधित करता होता है। यूपत प्रतिच निविधित करता करते पर प्रविचन परिवृद्ध सामय निविधित करता करते पर प्रविचन परिवृद्ध सामय निविधित करता करते पर प्रविचन परिवृद्ध सामय निविधित करता प्रतिच विधित प्रविधित करता करते पर प्रविच स्विधित करता स्विधित स्विधित

प्रतिचयन दांचा

समय में से विसी माहिन्छड़ प्रतिदर्ध चुनने के लिए उसके एकको की एक सूची प्राव-श्यक है। इन मूची नो 'प्रतिवयन ढाँचा' वहते हैं। सूची में इन एकको का विवरण रहता है प्रत्येक मो एक त्रम सल्या से सुचित किया जाता है।

याद्चिष्ठक संस्या सारणी श्रौर इसका उपयोग

याइच्छिक सस्या-सारणी की रचना सर्वप्रथम फिशर धौर पेट्स (Fisher & Yales)
ने की । इस सारणी में धनेको स्तम्म म याइच्छिक रीति द्वारा प्राप्त 0 से 9 तक धन दिये
होते हैं। जेता कि इस सारणी नो देवने से स्पट हैं। समग्र के N एक्को की किती कमामुसार 1 से N तक धिकत कर देने हैं। फिर यह देव तेते हैं कि सस्या N में फितने प्रक हैं। जितने धन होते हैं उनने हीं, याइच्छिक सस्या सारणों में से, सलान (adjacent)
स्तम्म ले लिये जाते हैं। इन स्तम्मों को साथ मानवर प्राप्तम से सस्या पड़ना प्राप्तम करते
हैं धौर यदि यह सस्या 1 से N तक में है तो वह एक्क जिस पर वह सस्या धिकत है,
प्रतिदर्श एक्क के रूप म स्थोकार कर लिया जाता है और फिर धनाती सस्या पढ़ते हैं धौर
फिर इस सस्या को 1 से N तक होने की स्थिति में स्थोकार करके इस सस्या बाते एकक
को प्रतिदर्श म सम्मिनित कर लेते हैं, धन्यथा सरया को छाड़ दिया जाता है। यह कम
तब तक चनता रहता है जब तक कि प्रतिदर्श के ए एक्को का वचन न हो जाय।

यह सिद्ध क्या जा सकता है कि यह विधि सरत याहिन्छक प्रतिचयन है। उदाहरण-तथा माना कि समग्र में 14 एकक है और 4 एकको का प्रतिदर्ध के लिए चयन करता है।

समग्र मे एकक U_1 , U_2 , U_3 ..., U_{14} हैं। तो बाहिन्छक सस्या सारणी के प्रयम दो स्तम्भ देखकर 1 से 14 के बीच भी सस्याएँ 11, 05, 12, 09 प्राप्त होती है मर्याद् प्रतिदर्श एकक U_{11} U_5 , U_{12} , U_5 चयनकृत हैं। इन्हीं एकको पर किसी भी सक्षण के प्रति प्रेक्षण लेकर, प्राचला के बागणक ब्रादि प्राप्त कर सक्ते हैं।

यदि समग्र म एकका की सस्या 'N' 100 से 999 तक हो स्रयांद्र सस्या मे तीन सक हो तो यादिष्य क्या-सारणी के तीन स्तन्भो को लेकर प्रारम्भ से सस्याएँ पढते जाते हैं भ्रोर क्यर की मीति यदि यह सस्या 1 से N के बीच मे हो तो स्थाकार कर ली आती है भ्रायया प्रस्थीकार कर दी जाती है।

यह ड्यान रहे नि सारणी में से कोई भी स्तम्भ तिये आ सकते हैं किन्तु इनको सेने से पर्व यह नहीं देखना चाहिए कि इसम कीन-कीनसी सस्याएँ हैं या नहीं हैं।

सरल याद्ञिक प्रतिचयन

परिभाषा: N एकनो के समय में से 11 परिमाण के प्रतिदर्श का चयन करने की विधि सरल याहिन्छक प्रतिचयन कहनाती है यदि N एकनो में से 12 एकनो के सभी सम्भव सचयों के चयन किये जाने की प्रायिकता समान हो। उदाहरणत माना कि समय में कैवल चार एकक A, B, C, D हैं जोकि एक-दूसरे से किसी लक्षण के प्रति निम्न हैं। इसमें से 2 एकनो के प्रतिवर्श का याहिन्छक विधि से चयन करना है। इस परिमाण के

कुल सम्भव प्रतिदर्श छ हो सकते हैं जोकि निम्न प्रकार हैं :---

जबिंग इस मोर कोई ध्यान नहीं दिया गया है कि एनक किस जम में चमन किमे गमे हैं। कोई भी ऐसी विधि जिसके अधनाने यर इसमें से प्रत्येक प्रतिवर्ध से चुने जाने की प्रायिकता है हो, एवं सरल याइज्छिन प्रतिचयन विधि बहुलाती है।

N परिमाण के परिशित समय ये हे, n परिभाण के विना प्रतिस्थापन द्वारा चयन किये गये सम्भव प्रतिक्यों की सस्था ${N \choose n}$ है और इनमें से प्रायेक, एक जनित प्रतिक्यों

है। सरल बाहिन्छन प्रतिचयन में इनये से प्रन्येन ने चयन होने नी प्रापितना $egin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}$ है।

सरल याहण्डिक प्रतिचयन करने को विधि को बाहण्डिक सक्या सारगी के जरयोग के झालांगंड दे दिया गया है। सरल याहण्डिक प्रतिदर्श द्वारा तभी आपके परिलाम प्राप्त होते हैं जबनि विचाराधीन चर के प्रति समय सजातीय हो या इससे पर्याप्त वृहत् प्रतिदर्श मा स्थान निया जाये। हार्वेद्याण का क्याच ध्विष्ट हो जाने के कारण खिल कृहत् प्रतिदर्श मा चयन करना प्राय ससम्भव हो जाता है। अत यदि समय में विकासीयता हो हो हो अम्ब किसी विधि ना प्रयोग न रना उपनुक्त है।

माध्य तथा प्रसरण के लिए सूत्र

साना कि समय में N एकक U_1 , U_2 , U_3 , ..., U_N है और इन पर किनी सराण के प्रति मेराण X_2 , X_2 , X_3 , ..., X_N है । एक समय से α प्रतिकार्ग एकको का साम किया गया है चौर जस समय के प्रति बेराण x_1 , x_2 , x_3 , ..., x_n है । यदि समय साध्य व प्रकरण कान्य α और β^2 है तथा प्रतिदर्श साध्य व प्रकरण कान्य α और β^2 है तथा प्रतिदर्श साध्य व प्रकरण कान्य α

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_{i} \qquad(121)$$

$$e^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (X_i - F)^2$$
 ...(12.2)

इसने प्रतिरिक्त एन भक्ता S^n , जो नि σ^n से बुछ शिप्र है, को विचार करना होता है, जहाँ,

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu)^2$$
 (123)

हम । भा प्रान्तन करना पाइने हैं।

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

म का एक अनिभनत आकलक है। और

$$V(\bar{x}) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) S^2$$
 (124)

V(x) को भी प्रतिदर्श प्रेक्षणो द्वारा ग्राकलित कर सकते हैं। इसका एक धनिभनत भारतर,

$$v(\overline{x}) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) s^{z} \qquad ... (125)$$

$$\approx s^{z}_{x}$$

है। जहाँ,

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

यदि 🔒 उपेक्षणीय हो तो

$$v(\bar{x}) = s^2 - \frac{s^2}{\bar{x}}$$
 ... (12.5.1)

x के मानक विचलन √िएं को प्र की मानक बृटि (standard error) कहते हैं।

टिप्पणी . दिसी श्रावलन के मानक विचलन की उस श्रावलन की मानक तुटि महते हैं।

यदि हम म का नही वरन् समग्र योग X = ∑ X, का ग्राक्तन चाहें तो ग्राक-

लक X=N x धनभिनत होता है। इसना प्रसरण,

$$V(X) = N^2 V(X)$$
 (126)

$$=\frac{N(N-n)}{n}$$
 S²(12.7)

है। इस प्रसरण का एक ग्रनिमनत ग्रावलक,

$$\frac{N(N-n)}{n} s^2$$
 (128)

पनुपात की स्थिति में सूत्र

मान सीजिये नि समय ने N एनन मुख क्यों में विभाजित हैं और हम एन विशेष वर्ष G में एननों भी सस्या N' ना मनुसात P जानना चाहते हैं। यदि सरस मारिन्द्रन प्रतिदर्श के क एननों में से क' इस वर्ष-विधेष ने हैं तो इस अनुसात P आ एन सनिमनत भागसक

$$p = \frac{n^r}{n}$$
 (12.9)

81

p का प्रसरण,

$$V(p) = \frac{N-n}{n} \frac{P(1-P)}{N-1} \dots (12.10)$$

इस प्रसारण का एक धनमिनत बावसक.

$$v(p) = \frac{N-n}{N(n-1)} p (1-p) \qquad(1211)$$

$$p_{0}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{pq}{n-1}$$
 . .(12 11 1)

यदि प्रतिषयन सनुपात $\frac{n}{N}$ तमु हो समर्थन् 05 सा इसमे रूम हो तो $\frac{n}{N}$ उपेशणीय

मान निया जाता है भौर इस स्थिति में,

$$s_n^2 = \frac{pq}{n-1}$$
 ...(12.112)

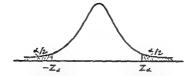
हो जाता है।

विश्यास्यता सीमाएँ

सम्रक्ष माध्य ॥ वि! विश्वास्थता सीमाधो वे लिए विवरण प्रध्याय 9 में दिया गया है। इनका परिचलन सूत्र (99) द्वारा घट सकते है। यहाँ Pवो विक्शास्थता सीमार्पो वाहो वर्णन एव सूत्र दिया थया है।

मने G_1 मे श्रतिको एकता वा सनुपात P है भीर यह मान तिया कि श्रतिको परिमाण ते मृहस् है। सन श्रतामान्य करन का श्रयोग किया जा गवता है। $(1 - \alpha)$ श्रतिक विवादसम्बादित होमाने का भूषे है कि $\alpha/2$ परिमाण का जानिक-क्षेत्र श्रमामान्य करू को दोनो पून्य का भीर होता चाहिये।

माना कि a/2 संसय धन्त तात के लिए प्रनामान्य विवर Z_{α} या $-Z_{\alpha}$ है जैता कि विवर (12-1) में दिवास गया है। बृहद प्रतिदर्श की स्थिति में धनुसात P के लिए



चित्र 12-1 प्रसामान्य वक्ष में दोनों युन्हों नी मोर a/2 त्रातित-सेत्र विश्वास्पता भीमाएँ निम्न सम्बन्ध द्वारा ज्ञान वर सबते हैं —

$$P_r\{p-Z_{\alpha} s(p) \leq P \leq p+Z_{\alpha} s(p)\}=1-\alpha$$

धर्मात् P की उपरि तथा निम्न सीमाएँ,

$$U(P) = p + Z_{n} s(p)$$

$$L(P) = p - Z_{n} s(p)$$
.... (12.12)

জৰকি $s(p) = \sqrt{\frac{pq}{n-1} \cdot \frac{N-n}{N}}$

यहाँ s(p) के लिए सूत्र से प्रतिचयन भिन्न को लेता आवश्यक है क्योंकि n को बृहद् लिया गया है

प्रतिदर्श परिमाण

सर्वेक्षण की मोजना को तमार करते समय एक स्थित ऐसी धाठी है कि प्रांतक्ष के पाँरमाण का निर्वय करता होता है। किती प्रतिदर्श का परिमाण मुख्यतः समय की विज्ञातीयता पर निर्मेद करता है। किती विज्ञातीयता ध्रिक होती है उपने ही कृद्व परिमाण के प्रतिदर्श का चयन करना होता है। किन्तु यदि समय पूर्णवया करातीय हो तो समय के एक एक को भाग पर प्रेषण के द्वारा पूर्ण जाननारी या प्रांचय समान प्रांत किये जा मनते हैं जैसे गरीर में खून पूर्णवया स्थानीय हो तो स्वार वहने कर एक दूँव की जॉव करके सही परिमाम बात हो जाते हैं। पत्र समय सिरमाण के प्रतिदर्श का प्रवाद किन्तु प्रमान स्थान करता प्रत्य करना प्रत्य समय किया वार्य में विचय करता प्रत्य समय किया वार्य कर है। प्रतिदर्श परिमाण के विचय में निर्मंग सेने समय निम्म बार्ते का प्रयान रखता प्रत्यन है। प्रतिदर्श परिमाण के विचय में निर्मंग सेने समय निम्म बार्ते का प्रयान रखता प्रत्यन स्थान है। प्रतिदर्श परिमाण के विचय में निर्मंग सेने समय निम्म बार्ते का प्रयान रखता प्रत्यन सावस्त सावस्त्व है:—

 सर्वेक्षण के दरेक्य का स्पष्ट विवरण दिया जाना वाहिये। इस क्यन में यह बताना चाहिये कि मन्त से किन विषयो पर निर्णय सेने हैं। (2) सर्वेद्यापकार्ध किवनी सूच्यता से परिणास प्राप्त करना चाहता है स्वारं पाकतर में किवनी पूटि तक सहन की जा सकती है। इस पूटि को सन्य पूटि (permissible eno) कहते हैं। धार ± 10% पूटि स्वीकार करने के विषय से सर्वेद्यापकार्य प्रपत्ती अपनी अपनीत देता है स्कीर प्रतिवर्ध हो। प्राप्त धाव नक का मान p प्रतिवर्ध हो सिंदी सक्षण के प्रति समग्र में प्रतिवर्ध हो। पार पाल का का मान p प्रतिवर्ध हो। धाव सक के प्रति समग्र में प्रतिवर्ध हो। पार (p − 10) के बीक स्थित होगा। धाव तक को परस युद्ध मानकार्थ भी प्रसाय है। पार यह परिणाय पत्ता हो सकते की कुछ प्राधिकता स्वारी होगी है, विके सार्थकता स्वर हारा सक्षीन्यत करते हैं।

प्रतिवर्श परिमाण 'व' के लिए सुत्र

माना कि सान् नित माध्य और सबद माध्य में सन्तर d को सहन किया जा सकता है सर्पाद सम्य प्रटि है। गणितीय भाषा में,

जब कि प्रतिदर्श नास्य 🛣 है और मन्याब भाष्य है। माना कि (I - a) इंक्टिंग विश्वास्यता स्तर है या a सार्थवता स्तर हैतो | 🛣 - म | के d से ब्रांडिक न होने की प्राधिकता,

$$P_{r}\{|x-r|>d\}=\alpha$$
(12.15)

बर
$$P_1\{|x-s| < d\} = 1 - a$$
(12.15.1)

क्षत: हमे धतने परिमाण के अधिकतें का जबन करना है कि यदि 🏋 धीर ⊬का सन्तर d से ब्राह्मक न हो सर्वाद वह अधिकतें परिमाण बान करना है कि बन्दर d, a सा• स्त• पर विवेदास्थ्या अन्तरान ने ही रहे !

माना कि किसी समय से एक प्रतिदर्भ का चयन सरक बाहिन्छक विधि द्वारा किस प्रतिक्यापन के किया जाना है। 18 थिलान के समय से बंदि व परिमान के प्रतिकर्भ का चयन किया जाना जीवत है तो इसके लिए मुत्र निकन प्रकार है:---

यदि चर् 🗴 के लिए प्रविदर्ध माध्य 🖫 का बटन प्रसाधान्य ै हो सूत्र (12.4) सारा विदित्त है कि.

$$V(\widehat{x}) \approx \frac{N-n}{N} \cdot \frac{S^2}{n}$$

विश्वतस्थाना मन्तर्भन विधि ने चतुमार प्रतिदर्श परिमाण a के निए α सार्यंतर्था स्तर पर सारणों $(\alpha-2)$ द्वारा प्राप्त प्रसामान्य विचर Z वा मान Z_{α} जात कर लेते हैं। प्रविदर्श

परियाण इतना हो कि जिससे बन्कर वं को व्यक्तितन को सके। इसके लिए निम्न सम्मिका साथ होनी फाहिए :--

$$\frac{d}{\sqrt{\frac{N-n}{N} \cdot \frac{S^2}{n}}} > Z_{\alpha} \qquad \dots (12.16)$$

$$\pi \quad n \left\{ 1 + \frac{1}{N} \left(\frac{Z_{\alpha} \cdot S}{d} \right)^{\epsilon} \right\} > \left\{ \frac{Z_{\alpha} \cdot S}{d} \right\}^{\epsilon}$$

धतः n का न्यूनतम भान निम्न है ----

$$n = \frac{\left(\frac{Z_{\alpha}}{d}\right)^{2}}{1 + \frac{1}{N}\left(\frac{Z_{\alpha}}{d}\right)^{2}} \dots (12^{17})$$

ध्यवहार में S का मान जात नहीं होता है। इनका मान किसी पिछने मर्बक्षण या प्रयोग के ब्राधार पर उसी चर या सम्बन्धित चर पर दिये गर्ने ब्रावनकों द्वारा मान सेते हैं। यदि इस प्रकार की कोई पिछली निपोर्ट उपसम्बन्ध न हो तो एक लघु प्रनिदर्श का चयन करके चर X पर प्रेक्षण लेकर प्रसरण S² के विषय में ब्रनुसन सना सेते हैं।

यदि प्रतुपातों को स्थिति से 'n' का मान ज्ञात करना हो तो S^2 के मान $\frac{N-n}{N-1}\frac{PQ}{n}$ का मुद्र (1217) में प्रतिस्थापन करने पर n के लिए निम्न मुख प्राप्त हो जाता है -

$$n = \frac{\left(Z_{\alpha}^{2}, \frac{PQ}{d^{2}} \right)}{1 + \frac{1}{N} \left(Z_{\alpha}^{2}, \frac{PQ}{d^{2}} - 1 \right)} \dots (12.18)$$

S² का भनुमानित मान कात वाले सम्बन्धी विस्तृत कान वे लिए Deming द्वारा लिलित पुस्तक 'Some Theory of Sampling' को पढिये ।

किनाइयाँ—प्रतिदर्भ परिमाम निर्धारित करते समय एक धौर समस्या उत्पन्न होनी है। वह यह कि धन्तर वे केवन एक लक्षण, पर या अर के लिए माना गया है वर्धाक सर्वेक्षण द्वारा धनेको लक्षम या चर के विषय में "धाँकडे एकत्रित किये जाते हैं धौर इनसे धाकलन किया जाता है। इस कठिनाई की हल करने की निम्न विधियों हैं:—

- (1) सर्बेक्स केवल उन चरो या सक्षणो ने प्रति निया जाय जो लगमग एन ही प्रकार के हों !
- (2) पहिले सर्वेक्षण मे मुख्य-मुख्य चरों ने लक्षण था पद के लिए खम्य बृटि d को प्रतप्तस्तर्ग निष्क्रित कर सिया जाये और प्रत्येक के निष् प्रतिदर्भ परिलाण का मानकत कर लें । इनमें के सर्वाधिक ॥ को प्रतिदर्भ परिलाण के रूप मे प्रदूष कर लिया जाता है । किन्तु ऐसा पर्याप्त साम्यों के उपस्त्य होने पर ही किया वा सकता है । यदि ए के प्राकृतिक मानों में प्रयुक्त सम्या के उपस्था होने पर ही किया वा सकता है । यदि ए के प्राकृतिक मानों में प्रयुक्त विचलन हो और सर्वाधिक ॥ का मान स्वीकार करना सम्पन्न न

हो तो यातो इन पदो को सर्वेशण से निकाल देना चाहिए यालचुn को लेकर इनका

रम परिगुद्ध झारुलन कर लेना चाहिए।

(3) सर्वेक्षण म विभिन्न घरों ने नारण बेबन प्रनिदर्श परिमाण ने निश्चित करने नो किन्तिर्ध से मितिरिक्त प्राय बहु भी धामान होता है कि सब चरो ने लिए एन ही प्रकार नी प्रतिवयन विधि उपयुक्त नहीं है। इस बिन्तिता नो दूर नरने का एकमान प्रवाय यह है कि बेबन उन घरों नो सर्वेदान से सम्मिनित निया जाये जिनने लिए एन ही प्रतिययन विधि उपयुक्त प्रतीत होती हो।

स्तरित प्रतिचयन

परिभाषा एक समय को विभी सदाण वे आधार पर कुछ सजातीय वर्गी [स्तरो (strats)] म विभाजित वरने और प्रत्येक वर्ग [स्तर (stratum)] मे से एक स्वतन्त्र प्रतिवर्गका करने को प्रिया को स्तरित प्रतिवयन कहते हैं।

इस प्रशार के प्रतिचयन की धावश्यकता मुक्यतया तब होती है जबकि समग्र में किसी लदाण के प्रति विजातीयता हो चौर भीमिन व्यय ही करना हो। क्तरित प्रतिचयन करने के कुछ कश्यों को निम्म प्रकार समग्र सकते हैं —

- यदि स्वीवार योग्य वृद्धि दी हुई हो तो वय प्रतिदर्श परिमाण धर्याद कम स्थय की प्रावश्यकता होती है या यदि वृत्त स्थय दिया हो तो वृद्धि कम होती है।
- वहुमासमय के कुछ प्राणी के माध्यों ने मानी का माक्सन करना प्रावस्यक होता है।
- (111) कई बार समझ के विभिन्न भागों में विभिन्न प्रकार के जनव्यन दांचे होने हैं। इस कारण इन भागों में निम्न शिन्न जिल्लान विधि का प्रयोग करना होता है।
- (1V) बहुमा समय ने विभिन्न आगो में भाषा वा प्रत्य नारची से ससय प्रत्य प्रत्येषरों (Investigators) को कार्य करना होता है। सबटन (organisation) के लिए इस प्रवच्या में स्नरित प्रनिचयन संविधावनक है।

स्तरण (stratification) ने नुख उदाहरण इस प्रनार हैं। भौधोगिन सगठनो सम्बन्धी सर्वेशण में स्तरण वर्षवारियों नी सक्या ने भाधार पर विया जा सन्ता है, विभी येत सम्बन्धी भाष्ययन के तिए दिनानों नी जीन ने बाधार पर स्तरण (stratefication) कर सकते हैं। इसी प्रनार और सम्बन्धी भाष्ययनों ने तिये जोगा नी भाषु, भार बार तस्त मारि के बाधार पर स्तरण करने मनत (logical) प्रनीत होता है, भारि।

प्रयोग स्तर को एक परिशंत समय के रूप से मान कर इन से से एक स्वान्त , जीवन परिशाप में प्रतिदर्श का क्यन कर सेते हैं। प्रतिदर्श का क्यन सब स्तरों से से एक ही प्रतिक्षण विशि सा निम्म निम्म विश्व विश्व को कोश करके करते हैं देना भी प्रयोग समुद्र के निए जानुका प्रतित हो। क्याहर से प्राप्त कर से खाविकार सरण साहिष्टर प्रतिक्यान विश्व का प्राप्त करके का का प्रतिक्या के स्वान्त का स्वान्त है। प्रतिराग्ने का परिपाण प्राप्त स्तरों के परिपाण के प्रत्यात में निया नाता है। समग्र ने लिये बावस्थन बानसनो ना परिनत्तन शत्येन स्तर द्वारा प्राप्त धानसनों का उचित देग से समन्वय नरने करते हैं। यह धानसन ब्राधिन परिशुद्ध एवं विश्वसनीय होते हैं।

स्तरित प्रतिचयन विधि प्रमासन की हिन्दि से भी प्रधिक उपयोगी है। यदि किसी सर्वेक्षण के लिए धनेको मण्डलो (Zones) की स्थापना को गयी है तो प्रत्येक मण्डल को एक स्तर, के रूप में प्रयोग कर सकते हैं। स्तरित प्रतिचयन का एक मुस्स लाम यह भी है कि समय के किसी चर के लिए धाकतन की दसता एतनी ही प्रति एक क्या करने पर पर्याप्त बढ जाती है। उपर्युक्त विवेचन के पटने से स्पष्ट है कि स्तरित प्रतिचयन में निम्न बातों की धोर विधेष ध्यान देना धावक्यक है। इन्ही बातों का ससीप में वर्णन भी दिया गया है —

- चर का निर्णय करना जिसके झाछार पर स्तरण करना है।
- (2) स्तरो भी सस्या निर्घारित करना।
- (3) स्तरो के लिये प्रतिदर्श परिमाण का नियतन करना।
- (4) स्तरो के बनुकूलतम विन्दुचो का निर्घारण करना।
- (5) स्तरो से प्रतिदर्भ धयन करने की विधि का निर्णय करना।
- (6) अत्येगस्तर के लिए उचित झावलको का परिकलन करना तथा इनका समन्वय करने समग्र के प्रति झावलनो को जात करना ।
- (1) स्तरण ने लिये घाधार चर पूर्णनया सर्वेक्षण के उद्देश्य पर निर्मेर नरता है। साथ ही इस चर ने लिए प्रत्येन एकक पर सूचना उपलब्ध होनी धावस्यन है जिससे यह तय किया जा सने नि नौनसा एनक किस स्तर में रखा जाये। स्तरण के लिए माधार चर सम्बन्धी उदाहरण पिछले लग्ड में दिये जा चुके हैं। वास्तव में चर ना निर्मय नरने के लिये कोई नियम वताना ममन्भव है। वेवल यह ही वहा जा सक्ता है कि चर ऐसा होना चाहिये नि र्मित तर पिछल से धावन से धावन सोवा हो भीर इस चर ना माननमें पर प्रभाव न पडता हा।
- (2) यदि समग्र के विषय से पर्यान्त जानकारी उपलब्ध हो तो स्राधिक से प्रधिक स्तरो का गठन करना लाभग्रद है। स्तर जितने प्रधिक सजातीय होते हैं उतना ही प्रपोक स्तर से से कम प्रतिचयन एकको वा चयन करना होता है। यहाँ तक कि कुछ स्थितियों में केवन दो एकको का हो एक स्तर से प्रतिदर्श के रूप से प्रयम करना पर्योन्त है।

स्तरों को सरमा निश्चित करने के लिए बुछ नूत्र भी दिये गये हैं। किन्तु इनकी इस पुस्तक के स्तर से उपर मानकर नहीं दिया गया है।

(3) स्तरों के तिए प्रतिदर्श परिमाण के निश्चय करने को नियतन (allocation) करते हैं। किसी एक स्तर से चयनहृत प्रतिदर्श के परिमाण का उस स्तर में भाकतरों की परिमाण का उस स्तर में भाकतरों की परिमाण \mathbf{n}_h के नियतन का समय के प्रति साकतक की परिमाण \mathbf{n}_h के नियतन का समय के प्रति साकतक की परिमाण \mathbf{n}_h के नियतन का समय के प्रति साकतक की परिमाण किसी है। जियतन का विगर्द विवरण भाकतकों के बाद दिया गया है।

- (4) सामाग्यन स्तर प्रणाननित्र मुनिया या भोगोनित्र हर्षिट गेस्वत हो तिनित होते हैं। निन्तु मुष्ठ निर्दातिया में स्तरों की रचना क्वय वरना सामग्रद होता है। उम्र स्थिति में यह उपयुक्त है कि स्तरा की गीमा का निर्धारण इस प्रवार विद्यालाय कि एक निरिष्ट म्राहल्य के प्रीत स्वरित्त प्रनिचयन द्वारा प्राप्त परिजाम मध्यिर परिगुद्ध हो। सीमा निर्धारण की मनेवा विधियों है निन्तु इतता विवरण इस पुन्तत के क्षेत्र में महर रखा गया है।
- (5) प्राय समय ने विषय स एक ही लक्षण ने प्रक्रि सिनिष्ट सुमाना उपलब्ध नहीं होती है। प्रत प्राप्त जानवारी ने साधार पर सर्यात्र विभिन्न लक्षणा ने प्राधार पर स्तरों नी रचना घर दी जाती है भीर दन स्वरा व सनुगार जो प्रतिचयन विधि उपसुक्त होती है उस विधि द्वारा प्रत्येग स्वर में से स्वरूप सामें प्रतिदर्शना चयन कर लिया जाता है।
 - (6) धारतका वा विवरण देते से पूर्व कुछ मनेत्रतो का परिचय देता धावश्यक है।

समग्रमे एवको दी सन्या = N दुल प्रतिदर्शदिमाण == n

नुत प्रोतदश परिमाण == 11 स्तरो की सक्या == K

h व स्तर का परिमाण = Nh बहाँ h=1, 2, 3,, K

h में स्तर से प्रतिदर्भ वा परिमाण ः □ ा

h में स्तर की प्रतिकासन भिन्न $=\frac{n_h}{N_h} = w_h$ और बहुपात $W_h = \frac{N_h}{N}$

h में स्तर का माध्य ≔#h चौर प्रतिदर्श माध्य 📆

h में हतर गा प्रगरण = Sn2 सौर प्रतिदर्श प्रमरण sn2

घोर

$$N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_K = N$$

 $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_K = n$

माना हि l: वें स्तर में किसी चर पर प्रेशच

है धौर प्रतिदर्ग में

हैं तो विभिन्न बाहत्तव निम्न प्रहार है :--

h वें स्नर का नास्य
$$X_h = \sum_{i=1}^{N_h} X_h / N_h$$
(12 19)°

h वें स्तर ने निए प्रतिदर्श भाष्य
$$\overline{x_h} = \sum_{k=1}^{r_h} a_{kl}/a_k$$
(12.20)

h वें स्तर का प्रसरण.

$$S_h^2 = \frac{1}{N_h - 1} \sum_{j=1}^{N_h} (X_{h_j} - \overline{X}_h)^2 \dots (12.21)$$

भौर प्रतिदर्भ प्रभरण,

$$s_h^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=-1}^{n_h} (x_{hi} - \overline{x_h})^2 \dots (1222)$$

यह सिद्ध विया जा सकता है कि Sp का धनिमनन धाकतव ९ है। यदि समग्र का माध्य म है तो स्तरित प्रतिचयन को स्थिति में इसका एक धनिमनत धाकतक

$$\begin{split} \widetilde{x}_{st} &= \frac{\sum\limits_{h=1}^{K} N_h \, \widetilde{x}_h}{\sum\limits_{h}} \qquad \qquad(12.23) \end{split}$$

होता है।

भाकलक 🔭 का प्रसरण,

$$V(\bar{x}_{rt}) = \frac{1}{\bar{N}^2} \sum_{h=1}^{K} N_h (N_h - n_h) \frac{S_h^2}{n_h}(12.24)$$

$$= \frac{K}{s} \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right) W_h^2 \cdot \frac{S_h^2}{n_h}(12.25)$$

बहाँ
$$W_h = \frac{N_h}{N}$$

भावतन \tilde{x}_t ना प्रमरण, जबकि $\dfrac{n_h}{N_h}$ श्रत्यत्य हो तो निम्न होता है :—

$$V(\vec{x}_{st}) = \sum_{h=1}^{K} \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h}$$
(1226)

V (🗓) का अनिभनत साक्लक,

$$v(\bar{x}_{st}) = \sum_{h=1}^{R} \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right) \frac{W_h^2 s_h^R}{n_h} \dots (12.27)$$

होता है।

मंदि $\frac{n_h}{N_s}$ धरपत्प हो तो,

$$v(\bar{x}_{st}) = \sum_{h=1}^{K} \frac{W_h^2 \, \delta_h^2}{n_h}$$
(12 27.1)

यह भी मुतमताने सिद्ध दिया जा सरना है कि 🗓 , 🎗 वा और 🗒 🖈 वा सनभिनन प्रावलक है।

मदि X मीर Y दो महचर हैं तो इनम ।। वें स्तर में सहप्रसर्ण,

$$S_{h,XY} \simeq \frac{\sum\limits_{b=1}^{K} (X_{bi} - \bar{X}_{b}) (Y_{N} - \bar{Y}_{b})}{N_{b} - 1} (1228)$$

है भीर भावतित सहप्रगरण,

$$\epsilon_{n,n_y} = \underbrace{\frac{K}{\sum\limits_{h=1}^{K} \left(x_{hl} - \overline{x}_h\right) \left(y_{hl} - \overline{y}_h\right)}_{n_h - 1} \quad\left\{12.29\right)}_{n_h - 1}$$

जबिक shaw. Shory का अनुभिनत आहलक है।

भनपातों के लिए भाकलक जात करना

यदि एकुको को देवल दो वर्षों G_p धीर G_p में क्ला जा सकता है भीर h वें स्तर के वर्षे G_1 में एक्सो की गल्या M_h है भीर इसके लिए प्रतिवर्ष में सब्या m_h है हो

$$P_h = \frac{M_h}{N_h} \quad \text{with} \quad P_h = \frac{m_h}{\sigma_h} \quad(1230)$$

माना \digamma वर्ग 🔾 में पूर्ण घतुरात 🛮 है. तो

हर्तात प्रतिषयन के प्रन्तगं वर्ष G2 में प्रनुपात, Pa का धावनित मान,

$$P_{et} = \frac{\prod_{h=1}^{K} N_h p_h}{N} = \prod_{h=1}^{K} W_h p_h$$
(1232)

सौर pst का प्रसरण

$$V(p_{st}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{R} \frac{N_h^2}{N_h^2 - 1} \cdot \frac{(N_h - n_h)}{N_h - 1} \cdot \frac{P_h Q_h}{n_h} \qquad(12.33)$$
and $Q_h = \{1 - P_h\}$

यदि $\frac{n_h}{N_k}$ तपुन हो तो भी सस्या $\frac{1}{N_k}$ जपेक्षणीय ही होती है धतः सूत्र (12.33)

को निम्न रूप में लिख सकते हैं :--

$$V(p_n) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{K} N_h (N_h - n_h) \frac{P_h Q_h}{n_h} \dots (12.33.1)$$

यदि प्रतिषयन मिस्र उपेसणीय हो

$$V(p_{n}) = \frac{1}{N^{3}} \sum_{h=1}^{K} N_{h}^{2} \frac{P_{h} Q_{h}}{n_{h}}$$
(12.33.2)

$$V(p_{st}) = \sum_{h=1}^{K} W_h^2 \frac{P_h Q_h}{n_h}$$
(12.333)

V (pat) का धनभिनत बाकलक

$$v(p_n) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{K} N_h (N_h - n_h) \frac{p_h q_h}{n_{h-1}} \dots (12.34)$$

प्रतिचयन भिन्न उपेक्षणीय होने की स्थिति में,

$$v(p_{rt}) \Rightarrow \sum_{h=1}^{K} W_h^2 \frac{p_h q_h}{v_{h-1}} \dots (12.341)$$

नियतन

सूत्र (12.25) से निर्दित है कि x_{st} का प्रसरण, स्तर प्रतिदर्श परिमाण v_h का फ़सन है। यत. v_h का चयन इस प्रकार किया जाना चाहिये कि जिससे प्रसरण कम हो जाये। नियतन की कुछ प्रविधियों निम्न हैं:—

चातुपातिक नियतन :—प्रायः ऐसा अनुमव किया नया है कि छोटे स्तर मे प्रसरण कम मीर बृह्द मे प्रसरण प्रधिक होता है। इस बात को ब्यान मे रखने पर प्रच्छे पाकतक प्राप्त करने हेतु छोटे स्तर में से छोटा प्रतिदर्श और बड़े स्तर में से बहा प्रतिदर्श लेना ज्यित है। मतः प्रयेक स्तर में से प्रतिचयन इस प्रकार करते हैं कि स्तरित प्रतिचयन-मिन्न समान रहती है। इस प्रकार के नियतन को म्रानुपातिक नियतन कहते हैं। गणितीय

$$\frac{n_h}{N_h} = \frac{n}{N} \qquad(12.35)$$

प्रमुपातिक नियतन के धन्तर्गत प्रकरण,

$$V_p(\bar{z}_{st}) = \left(1 - \frac{n}{N}\right) \sum_{h=1}^{K} \frac{W_h S_h^2}{n}$$
 ...(1237)

यदि 👖 उपेशमीय हो तो इस स्थिति में,

$$V_{p} (\bar{x}_{et}) = \sum_{h=1}^{K} \frac{W_{h} S_{h}^{2}}{t_{t}}$$
(1238)

यह नियतन किया-विधि में मुगम होने वे वारण प्राय इनवा प्रयोग विधा जाता है। धनुसूलतम नियतन :--स्तरित प्रतिचयन ने लिए व्यय फलन निम्न रूप में दिया जा सरता है ---

$$C=C_0+ {\begin{array}{c} K \\ x \\ h=1 \\ \end{array}} n_h C_h \dots (12.39)$$

जबकि Co बधी सागत है और Che b वें स्नर ने एक एक को सर्वेक्षण का श्रीसत अपन है। С कुल स्थय को सुवित करता है। सनुकुलतम नियतन के लिए दिन्न स्थञ्जक को सपाज गुणक विधि हारा व्यनतम करके nh का मान शांत कर सिया जाता है।

$$Q = \sum_{h=1}^{K} \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \lambda \left\{ C - C_0 - \sum_{h=1}^{K} n_h c_h \right\} (12.40)$$

सीधी और के स्पञ्जक को Q मान लिया गया है और A एक लगांज गुणक है।

O ना p, के सम्बन्ध में प्रांशिक प्रवन्तन करने गृत्य के समान रसकर प्राप्त समीकरण ही हल करने पर,

$$n_b = n = \frac{W_h S_h / \sqrt{C_h}}{2(W_h S_h / \sqrt{C_h})} ...(1241)$$

u, का मान सूत्र (12 25) में रहते पर धनुकू सबस नियतन के शन्वसैत हैं सा शासरण बात हो बाता है जो कि निम्न है .--

$$V_{0} (\overline{x}_{nt}) = \frac{1}{n} \left(\frac{x}{h} \frac{W_{h} S_{h}}{\sqrt{C_{h}}} \right) \left(\frac{x}{h} W_{h} S_{h} \sqrt{C_{h}} \right) - \frac{1}{N} \frac{x}{h} W_{h} S_{h}^{2} \dots (12.42)$$

धनुकुलतम नियतन निम्न दो स्थिति में हो सकता है .-

(क) यदि सबँसण का स्पय 'C' नियत हो तो में का वह मान जार्त करते हैं कि जिससे V (📆) स्पूतनव हो जाये। इस स्थिति में 🌣 का मान वशी सायट के परों में निम्न होता है :---

$$n = \frac{(C - C_0 \sum_h (W_h S_h / \sqrt{C_h})}{\sum_h W_h S_h \sqrt{C_h}} \qquad(12.43)$$

(12.41) मे n का मान रखने पर,

$$n_{h} = \frac{(C - C_{0}) W_{h} S_{h} \sqrt{C_{h}}}{\sum W_{h} S_{h} \sqrt{C_{h}}} \dots (12.44)$$

(12 42) मे n का मान (12 43) द्वारा रखने पर,

$$V_{0}(\bar{x}_{st}) = \frac{(\sum_{h} W_{h} S_{h} \sqrt{C_{h}})^{2}}{(C - C_{0})} - \frac{1}{N} \sum_{h} W_{h} S_{h}^{2}(1245)$$

यदि $\frac{N_h}{N^2}$ धरयत्य हो तो,

$$v_0 (\bar{x}_{st}) = \frac{(\bar{x} W_h S_h \sqrt{C_h})^2}{C - C_n}$$
(12.45.1)

स्मित (ल) . बाँद पूर्व निर्धारित स्वरित प्रतिदर्श प्रसरण V₀ ही प्राप्त करना हो हो हमें प्र_{ति} के ऐसे मान झात करने हैं कि जिससे सर्वेक्षण का न्यम C न्यूनतम हो जाये । संप्रान विधि द्वारा स्वयन्त्रक,

$$Q_{\underline{t}} = C_0 + \sum_{h=1}^{K} n_h C_h - \lambda_1 \left(V_0 - \sum_{k=1}^{K} \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} \right) \dots (12.46)$$

को न्यूनतम फरने पर, n का मान निश्चित प्रसरण वे लिए निम्न है :--

$$z = \frac{\left(\sum_{h} W_{h} S_{h} \sqrt{C_{h}}\right) \sum_{h} W_{h} S_{h} / \sqrt{C_{h}}}{V_{0} + \left(\frac{1}{N} \sum_{h} W_{h} S_{h}^{2}\right)} \qquad \{12.47\}$$

n का मान (12.41) में रखने पर,

$$a_{b} = \frac{\sum_{h} W_{h} S_{h} \sqrt{C_{h}} \cdot \left(\frac{W_{h} S_{h}}{\sqrt{C_{h}}}\right)}{V_{0} + \left(\frac{1}{N} \times W_{h} S_{h}^{2}\right)} \qquad(12.48)$$

यदि प्रत्येक स्तर मे प्रति एकक व्यय समान हो अर्थात्

$$C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow C_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_K \Rightarrow C'$$

हो तो सूत्र (12.41) निम्न हा जाता है .--

$$n_h = n \frac{W_h S_h}{\Sigma W_h S_h}$$
(12.49)

नियनन नायह मूत्र नेयेन नियनन (Neyman allocation) कहलाना है। इसे नेमेन ने सन् 1934 म दियाचा।

६म नियतन ने घल्नमंत $\overline{x}_{i:1}$ ना प्रसरण मून (12.42) की सहायना से निम्न हाता है —

$$V_{\text{Ney}}$$
 (\hat{x}_{3t}) = $\frac{1}{n}$ ($\frac{x}{h}$ $W_h S_h)^2 - \frac{1}{N} \sum_{h} W_h S_h^2$ (12 50)

इस नियतन म क का मान पूत्र नियारित हाता है।

सरल पावृष्टिक तथा स्तरित प्रतिचयन के घन्तर्गत ग्राकलित माध्य के प्रसरण को तुलना

माना कि प्रनिदर्श माध्य के असरण को नवर बाहण्डिक प्रनिचयन, नवन नियतन व खानुसदिन नियनन के सद्दि क्रिक्ट प्रतिचयन की स्थित में प्रवत V_{Ney} घोर V_{POP} द्वारा निक्षित किया गया है ता यह निद्ध किया जा सकता है कि,

$$V_{ran} - V_{Ney} = \frac{N-n}{nN} \sum_{h} W_{h} (S_{h} - \overline{S})^{2} + \frac{N-n}{nN} (s_{h} - \mu^{2})$$

$$\dots (1251)$$

$$\text{wigf } \vec{S} = \underline{x} W_{h} S_{h}$$

भीर

$$V_{ran} - V_{prop} = \frac{N-n}{nN} \sum W_h (\mu_h - \mu)^2$$
 ..., (12.52)

उर्खुत सम्बन्धों से स्पष्ट है नि

$$V_{\text{san}} > V_{\text{prop}} > V_{\text{Ney}}$$
 ...(12 53)

कमबद्ध प्रतिचयन

माना कि समय में N ए हैं है और इनम से n एकती के प्रतिदर्श का क्यम करता है। इन N एकबा को $\frac{N}{n}$ समूहा के विभावित कर दिया जाता है। माना कि $\frac{N}{n}$ \Rightarrow K, माम्ब्रि प्रयोक समूह में K एकक है। इन समूहों को K कारों में भी सममा जा सकता है समावि किसी समान के प्रति करों में भी समान जा सकता है तमावि किसी समान के प्रति करों

6 एकको के प्रतिदर्श का कमबद्ध प्रतिचयन विधि से चयन करना है। ग्रत यहाँ K=5 है। माना कि दूसरे एकक का सरल याइन्छिक प्रतिचयन विधि द्वारा चयन हुमा है तो 7, 12, 17, 22, 27 में एकको का चयन करना होता है। इस प्रकार के प्रतिचयन को रेखीय कथबद्ध प्रतिचयन (Linear systematic sampling) कहने हैं वयोकि इस प्रति-चयन को ज्यामिति में रेखा द्वारा निर्वायत कर सकते हैं। कार दिये गये उदाहरण के तिए निरूपण निम्म चित्र में दिया गया है —

चित्र 12-2 कमबद्ध प्रतिचयन का रैखिक निरूपण

यदि एकको का कार्डों के रूप में चयन करना है तो रैंक में रक्खे कार्डों की जैयाई नाप की जाती है भीर उसे जैयाई के घाधार पर समृतों में बौट दिया जाता है ! माना कि प्रत्येक समृद्ध 5 स्वें भीन कार्याई वां है। यहले समृद्ध में से एक कार्ड का याद्यांच्यक विशि स्वयंच्यन कर लिया जाता है भीर किर इस कार्ड से प्रत्येक 5 के भीन की दूरी पर दियत कार्ड मां चरन कर लिया जाता है। इस प्रकार सुपयंडा से प्रतिवर्श का च्यन हो जाता है तथापि प्रत्येक स्विं एकक का निद्धान्त पूर्णनया सत्य नहीं रहता है।

व्यवहार में N=nK की स्थिति प्राय नहीं पायी जाती है प्रयांत् K एकको के प्रत्येक समूह की रचना नहीं हो सकती है। तो इस स्थिति में प्रतिदर्श का चयन बृत्तीय कमबद्ध प्रतिचयन विधि द्वारा किया जा सकता है जोकि निम्न प्रकार है →

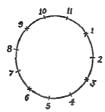
वतीय कमबद्ध प्रतिचयन

उपर्युक्त सच्ड में दिया है कि N=nk न होने की स्थिति में प्रतिदर्श परिमाण n के स्थान पर (n-1) होना सम्मन है धीर प्रतिदर्श माध्य भी एक धीमनत धागणक होता है। इस कमी को दूर करने के लिए डी० बी० लहरी (D B Lahiri) ने 1952 में राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण (National Sample survey) में बृत्तीय कमबद्ध प्रतियमन

का प्रयोग किया। इस विधि के अन्तर्गत शिक्ष में के निकटतम सरवा को 1 के समान

मान लेते है। फिर एक एकक का चवन का चवन 1 से N तक एकको में से यादृष्टिक हिंदिय से करते हैं। माना कि यह सस्था m है तो फिर प्रस्तेक (m+ik) में एकक (बर्बाक m+ik>N) मा (m+ik-N) में एकक (बर्बाक m+ik>N) का चवन कर तिया जाता है। इस मध्य एकको को एक बृत्त की परिचि पर स्थित यान सकते हैं। इस प्रकार समृद्धों को प्रतम-मलग नहीं बनाना होता है। N=11, n=4 की स्थित में ज्यामिन तीय निक्स्पर निर्मा रूप में कर सकते हैं — न्याग कि m=3 है।

इस स्यिति में k=3 लेना उचित है।



चित्र 12-3 वृत्तीय त्रयबद्ध प्रतिचयन का प्रदर्शन

इस प्रकार प्रतिदर्श में चयन किये गये एक्क 3, 6, 9, 1 श्रम सस्या वाले हैं

यदि N=nk हो तो पृशोध तथा रेजीय जमबद प्रतिचयन एक समान हो जाते हैं।

ममबद प्रतिचयन विधि प्रमय दो गयी विधियों की घरेशा वस्त है और इसके द्वारा
प्राप्त पाइसक भी धनिधनत एक विकानीय होते हैं। यह विधि पुरवता उस दिमति में

उपयुक्त है जबिन प्रतिचयन एक कि विदी को (Cards) के रूप मे हो और यह वार्ष एक साय रैक में देते हो। इस विधि का प्रयोग प्राय वन सम्बन्धी सर्वेशनो या मछनी

पनके सम्बन्धी सर्वेशनों में दोना है।

धागणकों के लिए सत्र

माना कि n परिजाण के जमबद्ध प्रतिदर्श में किसी लक्षण के प्रति प्रेदाण $X_1, X_2, X_3, ..., X_l, ..., X_k$ है तो प्रतिदर्श माध्य

$$\bar{X}_{sy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$
(12.54)

भौर प्रतिदर्श साध्य का प्रसरण V (प्र_{वर्}) जवकि Neenk

$$V(\overline{X}_{sy}) = \frac{N-1}{N} S^2 - \frac{k(n-1)}{N} S^2_{wsy}$$
(12.55)

जहाँ

$$S^1 = \frac{1}{N-1} \underset{i=1}{\overset{k}{\underset{j=1}{\sum}}} \overset{n}{\underset{j=1}{\sum}} (X_{jj} - \mu)^2$$
 जबकि X_{ij} , कि जनवद प्रतिकत

with
$$\frac{N-1}{N}S^2 = \sigma^2$$

S²wsy अमबद्ध प्रतिदशों के बन्दर प्रमरण है। प्रतः

$$S_{wsy}^{2} = \frac{1}{k(n-1)} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{N} (X_{ij} - \overline{X}_{i})^{2}$$

$$\frac{k(n-1)}{N} S_{wsy}^{2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{N} (X_{i1} - \overline{X}_{i})^{2} = \sigma_{w}^{2}...(12.56)$$

$$V(X_{xy}) = \sigma^{2} - \sigma_{w}^{2} ...(12.57)$$

स्पञ्चक (12 57) से स्पट है कि σ^2 समग्र प्रसरण है जो कि एक प्रसर सक्या है और σ^2 प्रगित्सों के धन्दर प्रसरण है। V ($\overline{\chi}_{ap}$) तम होने के लिए यह धावस्यक है कि σ^2 धर्मात् प्रतिदर्श के धन्दर प्रसरण प्रधिक हो। यत एक तमग्रद प्रतिदर्श में एक जितने प्रधिक निम्म कि प्रधिक निम्म प्रकार कि प्रधिक निम्म प्रधिक निम्म प्रधिक निम्म प्रधिक निम्म प्रधिक निम्म प्रधिक निम्म प्रधिक समुद्र निम्म प्रधिक निम्म स्थान कि प्रधिक निम्म समुद्र निम्म प्रधिक निम्म समुद्र निम्म प्रधिक निम्म समुद्र निम्म प्रकार कि प्रधिक निम्म समुद्र निम्म सम्म स्थान सम्म सम्म स्थान सम्म सम्म स्थान सम्म सम्म स्थान स्थान सम्म स्थान स्थान सम्म स्थान स्था

फमबद्ध प्रतिचयन को सरल बाद्ध्यिक प्रतिचयन से तुलना

कमबढ प्रतिचयन विधि में 1 में 1 तर एक्कों में से एक छवें एकक का चयन माह-चित्रक विधि से करते हैं पर्याद् 1 सम्भव प्रतिदशों का चयन समान प्रायिकता से करते हैं र मरल माहच्छिक प्रतिचयन डारा बुल सम्भव $\binom{N}{n}$ प्रतिदशों में से एक प्राप्त होता है। वेयल इन दोनों विधियों में प्रग्तर इतना है कि कमबढ प्रतिचयन अन्य विधियों की अपेसा क्रियासक होट में सुगम है क्योंकि इनमें कम मनम तथा प्रया लगता है। किसी उपयुक्त परिन्यितियों में इस विधि के अन्तर्गत प्रावलक अन्य की प्रयेक्षा प्रधिक परिगुद्ध होते हैं।

पुष्ण प्रतिवायन भव तक दी गयी विधियों में सदैव मून एकक (elementary unit) का क्रियों प्रध्ययन के हेतु चयन जिया गया । पून एकन से हमारा प्रभिप्राय उत एकक ने हैं जिस पर कि प्रेक्षण निए जाने हैं। इन एक्को ना प्रयोग करने में घनेकों कठिनाइयों भी था सकती हैं। बैसे,

- (1) मूल एकरों के लिए प्रतिवयन डाँवा उपलब्ध न हो धौर इसे तैयार करने में बहुत धन तथा समय की भावश्यकता पड़ती हो.
- (1) प्रतिदर्श एक एक दूसरे से स्रोधिक दूरी पर स्थित हो और एक एक में दूसरे एक क तक जाने में रूपय एद समय अधिक समुद्रा हो।
- (m) सर्वेक्षण-शैत्र में एक्को को पहलात के और इनकी स्थिति निर्धारण करते में अधिक समय लगता हो, मादि।

वे बिजाइमी विवाहान हथ्यि ने पर्यान्त अटिन है, बन इन्हें नम बन्ने के हेतु गुच्छ प्रतिचयन एक सच्छी प्रतिचयन विधि है। गुष्छ प्रतिथयन ने म्रन्तमंत समय ने मून एक में नो मुच्छा (तमूरों) से विनादित कर दिया पाता है। इन मुच्छों नो प्राथमिक एक न (primary unit) ने रूप से प्रयोग करते हैं जैसे परिवारों सावत्यी सर्वेशन ने संयोग से स्वित सराना द्वारा भूवना प्राप्त करता, इत्यूर स्थित सराना की मध्येशा मृत्य है। यत किसी वहे सहर से विभिन्न मुह्तों (क्रावरी) को, निर्मा प्रतेश में निलट के गाँवों को या सम्य (crop) सक्त्यों सर्वेशना में एक सर्वे को मूत एक के रूप से मान कीने हैं और इतसे से निवित परिमाण के प्रतिदर्भ का पूर्व एक के रूप से मान कीने हैं और इतसे से निवित परिमाण के प्रतिदर्भ का प्रताप्त की से से स्वीय में प्रतिदर्भ का प्रतिवर्भ की स्वीय के साव स्थान किसी से से से प्रवर्भ करते समय प्रवर्भ का प्रतिवर्भ की सुद्ध करने में विषय में प्रावर्भ का नाम प्रतिवर्भ का स्थान करने के विषय में प्रावर्भ का नाम प्रतिवर्भ का से से प्रवर्भ करने के स्थान करने के सियय में प्रावर्भ का नाम से से सुद्ध करने से से प्रवर्भ का स्थान करने के से स्थान से स्थान स्था

गुच्छ प्रतिचयत सम्य श्रतिषयत विधिया, जिनसे हि प्रत्येत प्रतिदर्श से एका का प्रस्त समय से सूत एका की सूची द्वारा हिया जाता है, की सरेशा कम दश (eliscent) है। इसमा कारण यह है हि गुच्छ प्रतिचयन सि प्रतिदर्श प्रस्ताचा प्रयोग कम होता है, क्यों कि व्यवहार से ऐमा पाना थाता है हि गुच्छ प्रान्तकों से प्रसाद होती है क्यों कि व्यवहार से ऐमा पाना थाता है हि गुच्छ प्रान्तकों से प्रसाद होती है स्वेदा वनते कि जो इर पर निवन हैं। दिहर भी गुच्छ प्रतिचनन क्यावहारित हर्षित से गुव्हायतिक होते हैं के कारण सनेत सबसातों के प्रयोग क्या जाता है स्वेर का दराता की हाति की समय तथा सन के कारों के निरंग गहर करता उपयुक्त समया जाता है।

माध्य तथा प्रसरण ने लिए सन

माना वि,

समग्र में भूत एक्को की सन्या≔ NM समग्र मे प्रावनिक एक्को (युच्छों भी सन्या) ≔ N एक मुल्छ से मूल एक्को की सक्या≔ M

प्राथमिक एकको के प्रशिद्यों का पश्चिमाण == n प्रतिदर्श में मुख एकको की सब्दा == n %

यदि। वें गुच्छ में jवें एवव पर प्रैश्तन Xijद्वारा नि≖िन है तो, 1 वें गुच्छ का माध्य,

$$\vec{X}_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} X_{i,j} \dots \{12.58\}$$

$$\forall y | i = 1, 2, 3, \dots, N$$

समय मध्य,

$$\mu = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} X_{i} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_{i} = \frac{1}{N} \dots (1259)$$

समग्र प्रसरण.

$$S^{2} = \frac{1}{MN-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (X_{ij} - \mu)^{2} \qquad ..., (12.60)$$

साना कि S₆2 और S₆2 असल गुच्छों के बीच और गुच्छों के अन्दर प्रसरण हैं।

$$S_b^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (\overline{X}_i - \mu)^2$$
(12.61)

मोर

$$S_w^{\ 9} = \frac{1}{N(M-1)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} (X_{ij} - \overline{X}_{ij})^2 \dots (1262)$$

मधिकतर Sp²>S_m2 होता है क्योंक्ति कुच्छ सजातीय होते हैं। मुक्छ प्रतिचयन की मरख मार्हीच्छक प्रतिचयन के छारेख दक्षता,*

$$E_{cr} = \frac{\frac{NM-Mn}{NM} \cdot \frac{S^2}{nM}}{\frac{N-n}{MS_p} \cdot S_s^2} = \frac{S^2}{MS_p^2} \quad(1263)$$

रूपर दिये हुए सूत्र की भौति प्रतिदर्श के लिए सूत्र, गुरुख का साध्य, जो उसी बार में चयनकृत है,

$$\tilde{x}_{j} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} x_{ij}; \quad \tilde{x}_{ij} : = 1, 2, 3, ..., n \quad(1264)$$

$$s_p^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{M} (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$
 (1265)

$$\overline{agt} \quad \overline{x} = \frac{1}{nM} \quad \sum_{i=1}^{n} \quad \sum_{i=1}^{M} x_{ij}$$

$$s_w^2 = \frac{1}{n(M-1)} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{M} (x_{ij} - \overline{x}_i)^2$$
(12 60)

प्रमुक्तितम मुख्य परिमाण — यव तक दिये विवरण से यह पता चलता है कि जैरे जैसे गुच्छ का परिमाण बढता है प्रतिचयन प्रसरण बढता है और सर्वेक्षण ना व्यय पटर

• प्रतिकार दस्ता $E = \frac{1}{V\left(\widetilde{X}\right)}$, यह दो बनिवनन दस्ताओं के अनुसात को भारेस दस्त कहते हैं।

है। इसने विषयीन जैसे-जैसे पुन्छों की सक्या बढ़ती है या मुख्छ परिमाण कम होता है तो व्यय वर्षना है धोर प्रनिचयन प्रमरण घटना है। धन सन्तुतन के तिए व्यवहार मे एन उचिन पाकार ने मुख्य बनाने होते हैं धौर मुख्यों को सक्या भी न बृहद् रुपनी होती है धौर न समु ही। धावस्थानता पड़ने पर पूर्व निर्धारित व्यव या मूरमता के लिए गणितीय निधि से भी अनुतृत्तसम प्रनिदम परिमाण एव मुख्य परिमाण जाने कर सकते हैं। इन विधियों के लिए गणितीय कतन इस अध्याय से नहीं दिये क्ये हैं।

यहुकम प्रतिचयन

गुच्छ प्रतिचयन म बुछ गुच्छो का चयन करके प्रत्येक में विद्यमान मूल एक्को पर प्रश्नित किये जाते हैं किन्तु बाँद बुच्छ में बाँटक मुख एक्क सामानीय है तो। सदका सर्वेक्षण करता व्यर्व है। क्यांकि इस स्थिति से पर्याप्त सूचता कुछ ही एकवों द्वारा प्राप्त भी जा गरती है और इसके बाधार पर प्राप्त धानजर भी दश होते हैं। इस स्थिति मे एक चरण प्रतिचयन करना उपनन्ध साधनों का धपन्यस हैं। चन प्रत्येक चुने हुसे तुच्छ में में भी इछ मूल एक्को का चयक किमी प्रतिचयक विशिव द्वारा कर जिया जाता है। इत एक्को को दिवरण एक कहते हैं। इस प्रकार के प्रतिवयन को दिवरण प्रतिवयन (two stage sampling) कहते हैं। इस नाम को सबसे पहले महापानबीज (Mahalanobis) ने दिया या । यदि दिनरण एक्को मे भी धन्य एक्कों का समन किया पया हो तो इमे त्रिवरण प्रतिवयन (three stage sampling) शहने हैं। इस स्थिति में द्विचरण एवर स्वयं में मेरेवों मून एवरी का समृत है। इस प्रवार प्रतिदर्श में मे प्रतिदर्श प्रतेन चरणो (stages) में नेते की प्रविधि को उपप्रतिकाम (sub-sampling) कहते हैं। यदि सन्तिम प्रतिदर्भ का चयन दो या दो से धिंदर चरणों में किया गया हो सी इंगे बहचरणी प्रतिचयन (multi-stage sampling) बहुने हैं। जैमे रिमी शहर में ती बुछ बनों रो का प्रथम चरण में चयन किया बाये और इन बनोंका में में बुछ परिवारी का दूसरे चरण में चयन किया जाये तो परिवार क्रान्तिस एक्क के रूप में प्राप्त होने हैं भन यहाँ रेवन द्विचरण प्रतिचयन का प्रयाग किया गया है ।

द्वती प्रकार किमी जिने म से तहनीको, प्रत्येक तहनील में के गाँवों घीर गाँवों में से परिवारों के चयन करने की विधि जिकरण प्रतिचयन का उदाहरण हैं।

बहुबरणी प्रतिप्यत भी सावस्थलता प्राय दल नात्म भी परती है हि एन ही गर्येश्य में नई प्रहार ने भ्रत्यमत नरते ना नस्य होता है। इन सहरों ने मनुगार निभन्न प्रतिप्यत एकाने वा अयोग नरता होता है। जैने क्लिन प्रदेश में जनस्या कर साम्यान करते तथा ग्राया में उपलब्ध बस्तुबों ने विश्व में जातनारी चीर प्रति परिवार ग्राय मादि ने विषय में महत्यत नरते ने हेनू बहुबर्ली, प्रतिप्यत प्राय उपयोगी निक्र होता है।

इत विधि का प्रयोग मन् 1940 में महानानवीय ने बगान में सन्य गरेना के निए विषा था। 1954 ने उनता प्रयोग भारतीय गष्टु प्रनिदर्श सर्वेशन (Indian National sample survey) में प्राय होता रहा है। द्विचरण प्रतिचयन मे भाष्य एवं प्रसरण का आकलन

समग्रम प्राथमिक एकका की सम्या = N

प्राथमिक एकको के प्रतिदर्शका परिमाण == n

ा वें प्राथमिक एवक से द्विचरण एवको की सस्या⇔ M₁

। वें प्राथमिक एकक से किसी प्रतिचयन विधि द्वारा चयन किये गये द्विचरण एकको को सस्या $= m_1$

$$M = \sum_{i=1}^{N} M_i \quad \text{with} \quad \overline{M} = \sum_{i=1}^{N} M_i / N = M / N$$

माना कि दोनो चरणो ने बिना प्रतिस्थापन के समान प्राधिकता से एकको का स्थम क्या मार्ग है। । वें प्राथमिक एकक से । वो प्रतिदर्श प्रेक्षण x_{ij} द्वारा मूचिन है।

ा वें प्राथमिक एकक के लिए प्रतिदर्श माध्य,

$$\bar{\mathbf{x}}_{i} = \frac{1}{m_{i}} \sum_{i=1}^{m_{i}} \mathbf{x}_{ij} \tag{12 67}$$

प्रतिदर्शे माध्य प्रति ज्ञिचरण एकक,

$$\overline{x'} = \sum_{i=1}^{n} M_i \overline{x_i} / \sum_{i=1}^{n} M_i$$
 (1268)

र्म्म समग्र माध्य का अभिनत आकलक है। इसना एक धनमिनत धाकलक निम्न रूप से दिया जा सकता है —

$$\overline{\overline{x}}' = \sum_{i=1}^{n} M_i \ \overline{X}_i / n \overline{M} \qquad . (12 68 1)$$

📆 के प्रसरण V (📆) का बाकलित प्रसरण,

$$v\left(\overline{x}'\right) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) s_b'^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i^2}{M^2} \left(\frac{1}{m_i} - \frac{J}{M_i}\right) s_w^2 \quad (12 69)$$

$$\forall \vec{s}_{i}^{t} \ s_{b}^{tB} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\vec{x}_{i} - \vec{x}')^{2}$$

with
$$s_{wi}^2 = \frac{1}{m_i-1} \sum_{j=1}^{m_i} (x_{ij}-\overline{x}_i)^2$$

🛒 के प्रसरण V (🛒) का भाकलित प्रसरण,

$$v \; (\overline{\overline{x}}'') = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) s_b''^2 + \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i^2}{M^2} \left(\frac{1}{m_i} - \frac{1}{M_i}\right) s_{wi}^2 \quad . (1270)$$

$$\text{with } s_b^{TI} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i}{\widetilde{M}} \ \widetilde{x}_i - \widetilde{x}^{\prime} \right)^2$$

यदि प्राथमित एक्को के परिमाण में सम्तर बृह्त् हो तो प्राय V (क्रि") प्राप्तित प्राक्तक क्रि" के प्रमरण V (क्रि") में स्राधिक हा जाता है।

परिमाण के समानुपातिक प्रायक्तिता प्रतिचयन

यिसाण के समानुभातिक प्राधिकता से कवनकृत प्रतिदर्भ द्वारा प्राप्त धाकलक धामितन होने हैं यदि प्रेराणों को आधित नहीं किया सवा हो। इसका कारण यह है कि इस स्थिति में करें गण्डा को प्रतिदर्भ से काम्मित्तत होने का स्थित प्रदार किस जाता है धीर छोटे एकको को कम प्रयोद कड़े एक दों का प्रतिदर्भ से खांबक प्रतिनिधित होना है धीर छोटे एकको का कम प्रयाद कड़े एक दों का प्रतिदर्भ के स्वित प्राधित का शोति कर परिचलत करने पर धनिमतन धावनक प्राप्त हो आड़े हैं। इस विधि को वैनात कहरिवास (Hanson and Hurwitz) से 1942 में बिल्कृत क्य से दिया था।

यदि एक सदस्य में परिमाण के समानुसानिक शायिकशा प्रतिकथन दिश्रिय द्वारा प्रतिक्यापन सहित n एकवा के एक प्रतिदर्श का क्यन करना हो तो इसके सिए विशियों निक्त प्रकार है —

संख्यी योग स्थितः — माना नि गयस ने N एनता U_1 , U_2 , U_3 ,, U_h म्नारार जमाः X_1 , X_2 , X_2 , ..., X_h है। इस विधि से प्रयोग एक ने गम्बद्ध सामास्त्र प्रस्तान के मुख्यी योगों की सारणी से प्राप्त होने हैं।

शस्या	सचयी योग
X_1	$X_1 - C_1$
X ₃	$X_1 + X_1 \Rightarrow C_2$
X_2	$C_1 + X_2 = C_1$
	I .
XH	$C_{N-1} + X_N = C_N = 1$

पहले एम \mathbf{U}_1 से सम्बद्ध घन्तराल $(1-C_1)$, \mathbf{U}_2 से सम्बद्ध घन्तराल $(C_1+1)-C_2$, \mathbf{U}_3 से सम्बद्ध घन्तराल $(C_2+1)-C_3$ धादि लिस देते हैं ।

इसने पश्चात् 1 से X तन सस्या में से एन ना याहि छन सस्या सारणी नी सहामता से चयन नरते हैं। यह याहि छन सस्या जिस प्रन्तरान में स्थित होनी है उनी प्रन्तरान के मगत एनक ना चयन नर निया जाता है प्रन्यया नहीं।

इस विधि ना मुख्य दोष सह है कि इसमें सचयी योग आत नरने होते हैं जो नि N बृहत् होने नी स्थिन में पर्याप्त निटन नार्य है जैसे निसी प्रदेश के शिक्षा सम्बन्धी सर्वेक्षण के लिए हुछ रकूतों ना अपर दो हुई बिधि द्वारा चयन नरने में हजारों रकूतों में बिद्यार्थियों नी सरया नो X, मानते हुये सचयों योग ज्ञान नरना एन निटन नार्य है! मत इस निटनाई में मुक्त होने ने लिये एन विधि है उन्नियन है —

लहरी विधि: — सचयी योग विधि में विषयान कठिनाई को दूर करने के लिये डी॰ बी॰ लहरी (D B Lahm) ने 1951 म एक नई विधि सुमाई। माना कि समग्र में N एक्क $U_1, U_2, U_3, ..., U_N$ हैं और इनके परिमाण कमश

हैं तो इस दिधि के मन्तर्गत इन एकको के परिमाण 🔏 मे जा सबसे वडी सख्या होती है उसे M ने मूचित करते हैं। एकको का चयन निम्न प्रकार से करते हैं —

दी याइन्छिन मरवाधी ना, एन ना 1 से N तन में से खीर दूनरी ना 1 से M तक में से याइन्छिन सरवाधी ना, एन ना 1 से N तन में से खीर दूनरी ना 1 से M तक में से याइन्छिन सरवा-भारणी नो सहायता के स्वतन्त्र रूप में चयन किया जाता है। माना कि 1 से N में याइन्छिन सरवा। और 1 से M तन में सस्या K प्राप्त होती है!

यदि $K \subseteq X_1$ हो तो एक क U_1 का चयन कर तिया जाता है धन्यया एक क U_1 पा चयन नहीं किया जाता है।

धव पुने नई याहिन्छन सस्यामो । व K को स्वतन्त रूप से भारणी द्वारा झात करते हैं और नियमानुसार एक के चयन निये जाने के विषय से निर्णय कर लेते हैं। व परिमाण के अतिवर्ग कर परिमाण के समानुसातिक अधिकता में अतित्यापन सहित चयन करने से एक के बाद एक मुगल याहिन्छन सस्यामो का चयन करते रहते हैं और नदनुसार एक को चा चयन कर लिया जाता है। यही कार्यक्रम चतता रहता है जब तक कि n एक को का चयन कही जाये।

जदाहरण 12 1 आठ नगरो की जनसच्या निम्न सारणी के धनुसार थी --

नगर त्रमसस्या : 1 2 3 4 5 🖩 7 8 जनसप्या (सी ब्यक्ति) 100 120 240 320 290 110 30 10

दा नगरों में से बी नगरों का चयन परिमाण के समानुपातिक प्रायिकना से सबयी या" प्रीयद्वारा इम प्रकार कर सकते हैं। पहले सबयी योग एवं मन्तरालों को निम्न प्रका लिख दिया —

नगर कमसंख्या	धनसक्या (सौ ध्यक्ति)	संदरी योग	सम्बद्ध कन्तरात
1	100	100	1 100
2	120	220	101 — 220
3	240	360	221 — 360
4	320	680	361 — 680
5	290	970	681 — 970
6	110	1080	971 1080
7	30	1110	1081 1110
8	10	1120	1111 — 1120

मन याहिण्युक्त सक्या सारणी सक्याया का देखना आरम्भ किया। पहली याहिण्युक्त सक्या जो 1120 से कल है वह 0554 है। यह सक्या अन्तराल 361 — 680 में है मत नगर 4 या प्यन कर नियाजाता है। यन धनली सक्या 0709 है। इस सक्या का धन्तराल 681 — 970 में नमावेश है बत नगर 5 का प्यन कर लिया। इस प्रकार प्रतिवर्ग में नगर 4 व 5 का प्यन हुया।

उदाहरण 122 कार दिवे उदाहरण (121) में दिये गवे नगरों ने समय से बिद को नगरों ने प्रतिदर्श का बवन कहरी विधि हारा निस्न प्रकार कर सकते हैं .—

यहां N=8 व M=320 है।

पहले बाहिकाह सारणी द्वारा 1 से 8 के बीब प्राप्त संस्था :=6 है, 1 से 320 के बीब सक्या K=096 है।

नगर 6 को जनसक्या 110 सी है जो कि 96 से बांग्र है बाद नगर 6 स्वीइन है। इसी प्रतार सम्य सुनक बाइन्सिन सक्याएँ । = 4 बीर K = 030 है। नगर 4 भी जनसक्या 320 है जो कि 30 से बांग्र है। धन नगर 4 का स्वयन बर निया जाता है। इस प्रकार स्वत्र इस 4 व 6 है। यह उन स्वया को छाइ दिया गया है अनके बारण नगर को प्रतिदर्ध के साम्मतिन दिया जाता सम्बद नहीं था। जेसे। चनि प्रकार सामा की अनके सामा जीवा अन्य की अनकस्य 30 है जो कि 893 से स्व है। धंउ नगर 7 की अनसक्य 30 है जो कि 893 से स्व है। धंउ नगर 7 की अनसक्य 30 है जो कि 893 से स्व है। धंउ नगर 7 की अनसक्य 30 है जो कि 893 से स्व है। धंउ नगर 7 की अनसक्य 30 है जो कि 893 से स्व है। धंउ नगर 7 की अनसक्य 30 है जो कि 893 से स्व है। धंउ नगर 7 की अनसक्य 30 है जो कि 893 से स्व है। धंउ नगर 7 की अनसक्य 30 है जो कि 893 से स्व है। धंउ नगर 7 की अनसक्य 30 है जो कि 893 से स्व है। धंउ नगर 7 की अनसक्य 30 है जो कि 893 से स्व है। धंउ नगर 7 की अनसक्य 30 है जो कि 893 से स्व है। धंउ नगर 7 की अनसक्य 30 है जो कि 893 से स्व है। धंउ नगर 7 की अनसक्य 30 है जो कि 893 से स्व है। धंउ नगर 7 की अनसक्य 30 है जो कि 893 से स्व है। धंउ नगर 7 की अनस्व हो।

माकलकों के लिए सूत्र

स्थिति । माना कि समय में N एवक U_1 , U_2 , U_3 ,, U_N है धीर इन एक्को दर एक बर भीर महायक बर के लिए बुगल बान $\{Y_1, X_1\}$, $\{Y_2, X_2\}$,, $\{Y_N, X_N\}$ है। इस समय में परिसाण के प्रतिवर्ध के बरन वरियाण के समानुपातिक

प्राधिकता से प्रतिस्थापन सहित विधा गया है। यहाँ चर x के मान विसी पूर्व मे हुये सर्वेक्षण द्वारा या विसी ग्रन्य स्रोत से प्राप्त विये गये है।

माना कि एक U_i के चयन विये जाने वी प्राधिवता p_i है ग्रीर $_i$ वें प्रतिचयन एक के लिए यूगल मान $\{y_i, x_i\}$ हैं।

जहाँ
$$i=1,2,3,...,n$$
 स्त्रीर $p_j=\frac{x_i}{X}$
$$N$$

$$N$$

$$X Y_i = Y$$

$$T X_i = X$$

$$X_i = X$$

Y का मनभिनत आवलक.

$$\stackrel{A}{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{p_i} \qquad (1271)$$

होता है।

^ Y का प्रसरण.

$$V(\hat{Y}) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{Y_i^2}{p_i} - Y^2 \right)$$
 ... (12.72)

 $V\left(\stackrel{\cdot}{Y} \right)$ का भी प्रतिदर्श प्रेक्षणो द्वारा भाकतन कर सक्ते हैं। इसका एक प्रनिभनत माकतक निम्न है —

$$v \stackrel{A}{(Y)} = \frac{1}{n (n-1)} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i}^{2}}{p_{i}^{2}} - \alpha \stackrel{A}{Y^{2}} \right) \dots (12.73)$$

उपर्युक्त भूत्रों में प्रत्येक $\frac{y_i}{p_i}$, Y का एक अनिधनत आक्रलक है और प्रत्येक $\frac{y_i}{p_i}$ का

समान प्रसरण है।

स्थिति 2: समग्र के N एकको मे से यदि ॥ परिमाण के प्रतिदर्ग का चयन परिमाण के समानुपातिक प्राधिकता से बिना प्रतिस्थापन सहित किया यथा हो तो Y के

आकलक Y व इसके प्रसरण व इस प्रसरण के धाक्तक के लिए सूत्र निम्न होते हैं।

माना कि पहला एक \mathbf{U}_1 के चयन किये जाने के प्राथिकता P है भीर \mathbf{I} विचयन एक के लिये युगल प्रेसण $(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1)$ है,

जहाँ 1=1, 2, 3, ..., n । मानाकि समग्र में प्रेक्षणो का योग,

$$\begin{array}{cccc}
N & N \\
\Sigma & y_i = Y, & \Sigma & x_i = X \\
1 = 1 & 1 = 1
\end{array}$$

ग्रनः एकक् U_। का अधन करने की प्राधिकता,

$$P_i = \frac{X_i}{X}$$

भीर दूसरी बार में किसी एक्क U, के खुबन करने की प्राधिकता,

$$=\frac{P_j}{1-P_i}$$

जदिं ।≠ं

जबकि एक क U, काचवत किया जा चुना है। ती-नरी बार में एक्क U_ल के चयत किये जाने की प्राधिकता,

$$=\frac{P_m}{1-P_i-P}$$
 , $i\neq j\neq m$

जबनि एवन Ui तथा Ui ना तमा पहली व दूसरी बार में भवन हो भुता है।

हमी प्रकार n एकको का एक के बाद एक करके स्थल करने की प्राधिकता दी जा सकती है।

भागानि दः,, एक्क U। के प्रतिदर्श से सस्मितित होने की प्राधिकता है,

$$\mathbf{g}_{i} = \begin{pmatrix} N-1\\ n-1 \end{pmatrix} \mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_{1}^{1} \\ \mathbf{s}_{n} \end{pmatrix} \qquad \dots (1274)$$

जबार के, एक गणियाओं के बजानित प्रतिदर्शकों तिरूपित करता है जिसमें कि को एक कमिम्मित है। यहों प्रकोध को समस्य सम्भव प्रतिदर्शों के दिए निद्यासमा है जिनमें कि को एक वास्मिनित है।

📆 😑 एक्क 🗓 तथा 🖖 के प्रतिदर्श से सम्मिलित होन की प्रासिकता 🖡 ।

$$\pi_{ij} = \frac{\binom{N-2}{n-2}}{\sum_{n=1}^{N} P(s_n^{ij})}$$
(1275)

जहीं क्षे , एक संपित्याल के खबलित प्रतिबन्ध को जिल्लाल करता है जिलमें कि किसार प्रतिकार किसार किसार

माना कि Y का धनभिनन रेसीय बाकसक

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} I_{i} y_{i}\right) = \sum_{s} P(s_{n}^{1}) \left(\sum_{i=1}^{n} I_{i} y_{i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \pi_{i} I_{i} y_{i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} I_{i} Y_{i} y_{i}$$

N यदि ∑ धा, (,)ा, Y वाएक बनिनत बावलक हैतो,

Y का मनभिनत भावलक जो कि हूरिबट्ज व यामसन (Horvitz and Thompson) ने दिया, निम्न है,

$$\hat{Y}_{HT} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\pi_i}$$
(1276)

मौर Yे का प्रसरण,

$$V(\hat{Y}_{HT}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i}^{N} (\pi_{i} \pi_{j} - \pi_{ij}) \left(\frac{Y_{f}}{\pi_{i}} - \frac{Y_{f}}{\pi_{j}} \right)^{2} ...(1277)$$

^ १ के प्रसरण का धनामकत धावतक जो कि हूरविट्ड व यागसन ने सन् (1952) म दिया उसके लिए मुत्र निम्म है

$$V_{HT}\left(\hat{Y}_{HT}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \pi_{i}\right) \left(\frac{y_{i}}{\pi_{i}}\right)^{2} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i \neq j} \frac{\pi_{ij} - \pi_{i}}{\pi_{i}} \frac{y_{j}}{\pi_{i}} \frac{y_{i}}{\pi_{i}} \frac{y_{j}}{\pi_{i}} \frac{y_{i}}{\pi_{i}} \frac{y$$

Y_{нт} के प्रसरण ना धननिनत धानसक जो कि येट्स व यरुष्टी (Yates and Grundy) ने सन् 1953 में दिया उसके लिए सूत्र निम्न है

$$v_{YG}(\hat{Y}_{HT}) \approx \sum_{j=1}^{H} \sum_{j>j}^{H} \frac{w_{j} w_{j} - w_{jj}}{w_{jj}} \left(\frac{Y_{j} - Y_{j}}{w_{j}}\right)^{2} ...(1279)$$

जबनि उपर्युक्त सूत्रों (12.78) सीर (12.79) में π_{ij} गुणका U_i स्रोर U_j . (1 \neq 1) में एक साथ सम्मिलित होन की प्रायिकता है।

इन मूनो द्वारा प्राप्त प्रमारण ने प्रावणका का एक मुक्त्य दोध यह है कि प्राप्त कुछ प्रतिदर्भों ने लिए इनका मान ऋणासमय था जाता है जिसने कारण इन धाकलको का नोई पर्य मही रहता थीर विकास्थता धन्तराज के लिए इनका उपयोग नहीं किया जा सकता। इस्तु प्रतिदर्भों ने लिए इनके द्वारा धन्ते धाकलक भी प्राप्त होते हैं।

देशराज काकसव .—यदि N एकवी वे एव समग्र से परिमाण ने सामानुपानिक प्रायिकता से किना प्रतिस्वापन सहित n एकवी वे एव प्रनिदर्श वा प्यन विद्या गया है तो देशराज ने समग्र योग Y वा एक प्रावन्तव है दिया (यहाँ t = Y) जो एकवा वे प्यन होने ने जम पर प्रायादित है।

Y ना मनभिनत मानलक,

$$\overline{t} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i \qquad ... (1280)$$

$$\forall \xi! \quad t_1 = y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{l-1} + \frac{y_l}{p_l} \left(1 - p_1 - p_2 - ... - p_{l-1} \right)$$

भीर T के प्रकरण का प्रतिदर्श प्रेक्षणा के सामार पर सक्तिमनत साक्तक निम्न है जो ति सर्देव सनात्मक होता है —

$$v(\bar{t}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2 ...(128!)$$

विशेषत जब त=2 हो तो.

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1+p_1}{p_1} y_1 + \frac{1-p_1}{p_2} y_2 \right\} \dots (1282)$$

 $\operatorname{ult} \quad \operatorname{v} \left(\overline{t} \right) = \frac{1}{4} \left(t_1 - t_2 \right)^2$

$$= \frac{1}{4} \left(1 - p_1 \right)^2 \left(\frac{y_1}{p_1} - \frac{y_2}{p_2} \right)^2 \qquad \dots (12.83)$$

यह तिन्द्र किया जा सहना है कि परियोज के सथानुसानिक प्रादिक्ता से दिशा-प्रतिस्थापन द्वारा प्रनिदर्श का प्रयत्न करने की स्थिति अ देखराज धारकार, प्रतिस्थापन सहित्र प्रनिययन करने की स्थिति की घरेगा प्रियत्न स्था है। किये किये तिए धारकारों का परिकास करने स प्राधिकताथा का परिकास करना होना है के कि प्रतिदर्श हुएत् होने की स्थिति से एक वर्डित सथरथा है। इसी कारण यहाँ विना प्रनिक्शन के प्रतिकरण का अयोग क का मान 3 या 4 तक हान की स्थिति से करने है। यदि प्रतिकर्ण परिकास 'n' बृहत् हो भीर $\frac{\pi}{N}$ उपक्षणीय हो तो यहाँ दोनो प्रकार ने प्रतिचयन लगभग समान दक्ष

होते हैं।

म्नाकलन की मनुपात विधि

यहाँ उन प्राक्तको पर विचार करना है जिनमें दो याद्दिछक वरो का प्रमुवात लिया जाता है। इसवा प्रयं है वि इसमें प्रश्न व हर दोनों में प्रतिचयन त्रुटि हो सकती है। प्रश्न यह जानने की उत्तरण्या होती है वि इस प्रकार के प्राक्तव की प्राव्ययत्ता ही क्या है? इसको प्राव्ययत्वा के दुछ उदाहरण हम प्रवार है — नेहूं की उपन का पेहूं के लिए बोधे गये क्षेत्र सं अनुवात का प्राव्यत्व करना है, आपकर की प्राप्ति एक साथ के प्रमुवात का प्राव्यत्व करना है, आपकर की प्राप्ति एक साथ के प्रमुवात का प्राव्यत्व करना है करना हम प्राप्ति करना करना होता है। प्रमुवात का प्राव्यत्व क्षा प्राव्यत्व के प्रमुवात का प्राव्यत्व करना होता है। प्रमुवात का प्राव्यत्व कुल सानों के स्थानकान के हेतु भी उपयोगी है।

भाकलन की भनुपात विधि में एक चर (Y) तो वह होता है जिसके विषय में जानकारी प्राप्त करनी है और हुमरा चर सर्वव एक सहायक चर (X) को देना होता है। सहायक चर इंद प्रकार का होना चाहिये कि इसका Y से सम्बन्ध उच्च कुम का हो। साता कि किसी समझ में । वें एकक का मान Y_1 है और सहायक चर का मान Y_2 है (जहीं 1=1, 2, 3, ... N)। जैंदे 1961 की बनवणना के भ्रमुतार किन्दी सहरों की जनसक्या चर X द्वारा सुचित है भीर 1971 की जनस्था का भ्रमुतार इनकी जनसक्या के भ्रमुतार कर के रूप में द्वारा सुचित है। कुस जनसम्बा के भ्रमुता प्रकान हेतु X को सहायक चर के रूप में प्रयोग करता होगा।

जन स्थितियों में जिनमें कि अनुगत के हर (denominator) का वास्तिकि मान सात ही नो यह पर्योग्त है कि घण के हुल मान का भाक्तन कर लिया जाये प्रीर प्रमुपात सात कर लिया जाये। किन्नु इस प्रकार प्राप्त धनुगत के आकलन का यथाये होना सातस्यक नहीं है।

यदि प्रशास हर के आकलक लगभग समानुपाती ही सर्थात् इनमें समाध्यण रेखा मूल बिन्दु से होकर जाती हो तो प्रशास हर के अनुपात को हर के बास्तविक मान से गुणा करके अग के प्राचल का एक अच्छा आकलक आप्त हो जाता है।

माना कि समग्र मे N एकक हैं और 1 वें एकक पर प्रेक्षित मान Y है भीर इसके

तदनुसार सहचर का मान X; है। तो, योग,

$$T_X = \sum_{i=1}^{N} X_i$$
, $T_Y = \sum_{i=1}^{N} Y_i$.(12 84)

भीर माध्य-

$$\mu_{X} = \frac{T_{X}}{N}$$
; $\mu_{Y} = \frac{T_{Y}}{N}$ (12.85)

समग्र धनुपात,

$$R = \frac{T_{\gamma}}{T_{\chi}} = \frac{\mu_{\gamma}}{\mu_{\chi}} \qquad ...(1286)$$

यदि समग्र से n परिमाण ने एक सरल याद्यप्तिक प्रतिदर्शका चयन निया गया हो भीर । में एनक पर चर का मान y, व सहचर का मान x, है तो योग,

$$\overset{A}{T}_X := \frac{N}{n} \overset{\pi}{\underset{i=1}{\overset{} {\stackrel{} {\stackrel{} {\scriptstyle \perp}}}}} x_i \,, \quad \overset{A}{T}_Y := \frac{N}{n} \overset{\pi}{\underset{i=1}{\overset{} {\stackrel{} {\scriptstyle \perp}}}} y_i \qquad(12.87)$$

where
$$\overline{x} = \frac{\hat{x}_2}{N} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$
, $\overline{y} = \frac{\hat{x}_1}{N} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \dots (1287.1)$

प्राव्तित धनुपात,

$$\stackrel{A}{R} = \frac{\stackrel{A}{T_{Y}}}{\stackrel{A}{T_{X}}} = \frac{\stackrel{Y}{y}}{\stackrel{X}{x}} \qquad(1288)$$

Ty का धनुपात थावलक.

$${}^{A}_{YR} = {}^{A}_{Y}_{X} = {}^{Y}_{X}_{X} = {}^{Y}_{X}_{X} = {}^{Y}_{X}_{X} =(1289)$$

समय माध्य 🗠 का धनुपात चाकसक,

$$\stackrel{\Lambda}{\mu_{YR}} = \frac{\overline{y}}{\overline{x}}, \quad \mu_{X} \qquad(12.90)$$

^ Tya का प्रसरण,

$$V(X_{YR}) = \frac{N(N-n)}{n(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (Y_i - RX_i)^2 \dots (12.91)$$

V (Tyn) का n प्रतिदर्ध प्रेशको हारा प्राकृतिन मान निम्न होता है ---

$$v(T_{YR}) = \frac{N(N-n)}{n(n-1)} \int_{t=1}^{n} (y_i - \hat{R} x_i)^n$$
(1292)

$$= \frac{N}{n} \frac{(N-n)}{(n-1)} \begin{pmatrix} \frac{n}{x} & y_1^2 + \frac{n}{n} & \frac{n}{x} & x_1^2 - 2 & \frac{n}{n} & x_2 & y_1 \end{pmatrix}}{i=1}$$
....(12.92.1)

$$v \ (\overset{\text{A}}{T_{\text{YR}}}) = \frac{N \ (N-n)}{n} \ (s_{\text{Y}}^2 + \overset{\text{A}}{R^2} \ s_{\text{X}}^2 - 2 \overset{\text{A}}{R} \ s_{\text{XY}}) \ ... (12.92 \ 2)$$

 $^{\Lambda}_{V(T_{YR})}$ प्रमरण $^{V(T_{YR})}$ ना मिनत मानलक है। अनिभनत मानलक मनी तन ज्ञात नहीं किया जा सना है। अनुपात मारुलन की मापेक्षिक मिनतता का मानित

मान, $\frac{b(\hat{R})}{R}$, निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं —

$$\frac{b(\hat{R})}{R} = \frac{(N-n)}{Nn} [\{c : v(X)\}^2 - \rho : c : v(X) c : v(Y)]..(1293)$$

यही $\frac{1}{n_2}$ व उच्च क्रम के पदो को अपेक्षा कर दी यदी है। यदि Y की X पर

समाध्ययण रेखा मूल बिन्दु से होकर जाती हो तो उपयुक्त मूत्र (12.93) से दिखाया आ सरता है कि यह प्रभिनतता शून्य हो जाती है।

माकलन की समाध्यण विधि

मनुगत मानलन विधि द्वारा धन्छे मानलक प्राप्त होते हैं यदि चर Y व सहायन चर X में सम्बन्ध रैलिक हो मीर यह रेखा मूल बिन्दु से होकर जाती हो । यदि समाध्यण रेखा मूल बिन्दु से होकर न जाती हो तो मनुभात आकतन की छ्पेक्षा रैंजिक समाध्यण मानलन विधि उत्तम है।

समग्र के N एकको से एक a परिमाण के प्रतिदर्श का सरन यादिष्ठक विधि द्वारा ज्यान किया गया है। \widehat{y} व \overline{x} चरो Y व X के लिये कमका प्रतिदर्श माध्य हैं।

माना कि निम्न भाकलक yo विचाराधीन है.

$$y_0 = y - K(x - \mu_X)$$
(12 94)

यहाँ y_0 एक सन्तर साकलक (difference estimator) है क्योंकि y में से सरपा K ($x - \mu_X$) को पटाया गया है। जबकि K एक स्वियाक है। समीनरम (1294) में K का स्वयं इस प्रकार करना होता है कि y_0 का प्रसरण न्यूनतम हो जबकि,

 $V\left(\overline{y_0}\right) = V\left(\overline{y}\right) + K^2 V\left(\overline{x}\right) - 2K Cov\left(\overline{y},\overline{x}\right)$. .(1295) समीकरण (1295) वा K वे सम्बन्ध में आशिव अनवसन करने भून्य वे समान रसन पर K का निम्न मान प्राप्त हो जाता है

$$K = \frac{\text{Cov}(y, x)}{V(x)} = \beta \qquad \dots (12.96)$$

जहाँ $oldsymbol{eta}$, $\overline{oldsymbol{y}}$ वा $\overline{oldsymbol{x}}$ पर समाध्यय गुणान है। K ने मान $oldsymbol{eta}$ नो (1295) में श्रुतिस्थिपित करने पर $\overline{oldsymbol{y}_D}$ का न्यूनतम प्रसरण निम्न होता है.—

$$V(\overline{y_0}) \approx \frac{(N-n)}{Nn} S_Y^2 (1-\rho^2)$$
 ...(1297)

$$q_{\overline{k}}^{\dagger} \quad S_{\gamma}^{2} := \frac{1}{N-1} \quad \sum_{i=\gamma+1}^{N} (Y_{i} - \mu_{\gamma})^{2}$$

विन्तु β का मान प्रभात है, चत इसने बावलक b को β दे स्थान पर प्रयोग करना होता है। इस स्थिति में,

$$\overline{y}_{ir} = \overline{y} - b (\overline{x} - s_x)$$
 (12 98)

yir को रेलिक समाध्रयण बाकलक कहते हैं। यहाँ प्रसरण,

$$V(\bar{y}_{\nu}) \equiv V(\bar{y})(1-p^2)$$
 . (1299)

$$= \frac{N-n}{Nn} S_{\gamma^2} (1 - p^2) \dots (12 99 1)$$

जबित यहाँ $\frac{1}{n^2}$ व उपन तस ने पदो नी उपेशा कर दी गदी है। V (\overline{y}_{ν}) का u शास्त्रक.

$$v(\bar{y}_{tr}) = \frac{N-n}{Nn} s_r^2 (1-r^2) \dots (12100)$$

होता है, जहाँ र प्रतिदर्श सहसम्बन्ध भुगांत है।

धावलक \hat{y}_{μ} वी धामिनतता — $Cov(b, \hat{x})$ ने समान है। मूत्र (1299) ते स्पष्ट है कि मंदि $\rho = 0$ हो तो \hat{y}_{μ} वा प्रमाण बही होता है जो कि सप्त धारिना प्रतिप्रम की स्थित में होता है। साथ ही यदि ρ ना मान बृहत् हो तो \hat{y}_{μ} ना प्रमाण पर्यास्त कम हो जाता है।

दिप्पणी: (1) मनुपात धाननक से समाध्यण प्राक्षनक सहै। यदि समाध्यण रेगा पूल सिन्दु से होक्ट जानी हो तो इन दो जाकनन विधिया द्वारा समान परिगृद्ध परिचान प्राप्त होते है।

(2) सरम थाइन्छिन प्रनिषयन के धीतरिक्त खब्द प्रतिवयन विधियों में रे रतित प्रतिवयन विधि, वमबद प्रतिवया धानि के निष् भी धनुषान या गमाध्यम धावषन का प्रयोग निया प्रा सकता है। धन्य विधियों के निये गुत्रों को यहाँ नहीं दिया गया है।

ग्यास का संप्रह

प्रतिकारी ने स्थल करने के पहलात् धाँतके सध्यपक की साहत्वकता ने सनुसार प्रत्येत प्रतिपयन एकक से सहरीत किये जाते हैं। इस प्रकार प्रधन धीकको को प्रायधिक स्थास (pumary data) कहते हैं। ये धीकके दो प्रकार से प्रधन किये जा सकी हैं.~-

(1) व्यक्तियत पूछ-ताछ: --इस प्रकार की पूछ-ताछ के लिए पहले प्रक्तों तथा कुछ सम्भव उत्तरों का एक प्रोफार्मा (proforma) तैयार कर सिया जाता है। इस प्रोफार्मा को मूची-पत्रक (schedule) कहते हैं । इस सूची-पत्रक में दिये प्रक्रों के उत्तर घन्देपक प्रतिदर्श में चुने हुए एकको से व्यक्तिगत पूछ-ताछ द्वारा प्राप्त करता है। उनके उत्तर के मनुसार चन्वेपक सुची-पत्रक मे टिक (√) सगा देता है या इन्हें लिख देता है। जैसे किसी भनाज के उत्पादन व्यय का भनुमान लगाना है तो उनसे व्यक्तिगत रूप से मिलकर भिन्न प्रश्न पूछते हैं जैसे वह सिचाई पर, खाद पर, बैसो पर, मजदूरी, बीज व दीटनाशी तथा खरपतवारनाशो शादि पर क्लिना व्यय करता है ? उसे प्रति एकड क्लिना धनाज प्राप्त होता है, क्लिना भूमा या चरी बादि मिनती है । इस प्रकार की विश्वसंतीय सूचना व्यक्तिगत पूछ तास्त्र द्वारा प्राप्त की जाती है। कभी-कभी सर्वेक्षण इस प्रकार का होता है कि जिसमे प्रत्येपक किसी से पुछताछ न करके स्वय ही धवलोवन, नाप सील ग्रादि करके सूची-पत्रक को पूरा करता रहता है और कुछ समय में आदश्यक सूचना प्राप्त करने के परचात् वह उस स्थान को छोड देता है। इस प्रकार के सर्वेक्षण पहले प्रकार की प्रपेक्षा कम होते हैं। जैसे जनता में विसी नये नियम के विषय में प्रतिक्रिया की जानने, किसी क्षेत्र में एक विशेष विभारी के घटित होने या रोकशाय के उपायो का प्रभाव देखने आदि सर्वेक्षणों में व्यक्तिगत अवलोकन ही एक उचित उपाय है।

सुची-पत्रक

प्राप्त सेवनों से बुख जानवारी प्राप्त करने ने लिए निम्न सूत्री-पत्रक का प्रयोग किया गया । यहाँ टेने मक्षेत्र में उदाहरण के रूप में दिया गया है जिससे पाठकों को सूची-पत्रक के विषय में रूपट क्षात्र हो जाये।

1. ग्राम सेवक का व्यक्तियत परिचय :

नाम	कीड नं॰
ণাৰ কালাস	थयायत समिति
(जिसमे वह नियुक्त	₹)
ब्रायु :	वैवाहिक स्तर विवाहित □, अविवाहित □, विद्युर □
जन्म स्थान : गाँव	पंचायत समिति जिला
शिक्षाकास्तरः (क) शिक्षित है (ग) कृषि में डिप्स् स्नातक []	□ (क्ष) हाई स्कूत या सेकण्डरी 🗍 नोमा प्राप्त 🛘 (प) इन्टर या हायर सेकण्डरी 🚨

भाषाएँ जो वह जानता है:

	वादा	बोल कवता है	यह सदमा है	निक सरता है			
	हिन्दी						
	ग्रहेजी						
	भन्य ()					
_	पिना का न	ाम -		वसाय			
2	प्राम सेवर	प्राम सेक्श बनने से पूर्व बायने दिस प्रकार का प्रजिशन दिया ?					
	(ৰা) সলিং	तण का नाम	चर	धि			
3	प्रापने ग्राम सेवन वनने के पत्रचात् कोई विशेष प्रकार का प्रशिक्षण लिया।						
	(₹) हौ	🗇 (य) नरं	f 🖂				
	यदि हो ती	, प्रशिक्षण रा नाम		मवधि			
4	भापको सेन	ी-बाडी की मसी विशि	यो वा ज्ञान दिन सं	नो से होना है भीर इनमे			
		हप्टि मे नौनसा स्रोत					
	(ৰ) হবা	र प्रसार प्रधिकारी [🗌 (ন) ৱন্নৱ ৰিন	ान 🔲 (ग)रेकियो 🗖			
	(ঘ) ভ্রাঘ	गरी 🔲 (४) राष	ट्रीय प्रदर्शन 🔲				
	(च) पुस्ता	हें एवं परने 🔲 🤚	छ} भ्रन्य				
	सर्वो	तम स्रोत का नाम या	न् o				
5	• माप विकास	हो की कठिमादयों के	विषय ये ज्ञान दिस प्र	गर प्राप्त ग रते हैं ?			
	(*) स्वय	उनकी उपन देसकर	🔲 (स) पूदराछ	गरके 🛮			
		सेनो की मिट्टीकी ज					
		मे भौटाणुषो सा प्रभा					
	, ,	में दीमारियों की जाँ	व करते 🔲				
	(च) ग्रन्य						
6			निम्न प्रायम्यक पदा				
			सद 🗋 (ग) पानी				
		ग्नशी 🛘 (इ)स्त					
7.			पर भैतकर प्रशिक्षित व	रने से सामें होता ह			
_	, , , ,	🕽 (ल) नहीं 🗓					
8.		विस प्रकार मूचना देन		_			
			(त) प्रदर्शनी समावर				
		_ ,	ष) राष्ट्रीय प्रदर्गनों ह	<u> </u>			
		गडारा 📑 (व) व		4.7			
9.		मधते हो र धार्प । दर राज्य स्थापना	तनों के निए उपयोगी	Ęi			

- नया द्याप द्यपने क्षेत्र में स्वतन्त्रता ने नार्यं कर पाते हैं ? 10
 - (क) हो ☐ (ख) नही ☐ यदि नही तो क्यों ?
- क्या प्राप सपने कार्य से सन्तुष्ट हैं ? 11.
 - (क) हो 🗌 (ब) नही 🗍
- (2) डाक द्वारा पूछ-ताछ इस विधि के धन्तर्गत तैयार विये गये प्रस्तो तथा वुछ मम्प्रावित उत्तरों के प्रोफार्मों को प्रश्नावनी (questionnaire) क्हते हैं। इमको तैयार करने में मूची-पत्रक की ग्रपेला पछित्र सावधानी बर्तनी होती है इस प्रकार के सर्वेक्षण में प्रश्नावली नो डाक द्वारा प्रत्येक चयनकृत प्रनिचयन एक्क के पास भेज देने हैं भीर उनने प्रार्थना की जाती है कि वे इसे पूर्णनया मरके बापन भेज दें। इस प्रकार के सर्वेक्षण में क्षम क्ष्यम होता है और बहुत क्य प्रशिक्षित व्यक्तियों की झावक्यकता होती है। इस विधि में एक दोष यह है कि अत्यधिक अनुकिया सभाव (non response) की समस्या सन्मुख म्राती है। इम समस्याना समापान करने की विधि एल-वडी (El-Badry) ने JASA, 1956 में (डाक प्रकावनी के लिए एक प्रतिचयन विधि) (A sampling procedure for mailed questionnaire) नामक लेख में दी गयी है।

डाव-प्रश्नावली वा प्रयोग विन्ही दफ्तरों, प्रधिकारियो या शिक्षित तथा प्रगनिनील

व्यक्तियों के प्रतिचयन एवकों के रूप में होने की स्थिति में उचित है।

इसके झतिरिक्त किसी प्रयोग में कुछ सगृहीत एकको पर परीक्षण करने के उपरात जो प्रेक्षण प्राप्त होते हैं वे प्रायमिक न्यास ही होते हैं।

न्यास का विश्लेयण

त्थाम का विस्तेषण करने से पूर्व मूची-पत्रक या प्रक्नावली पर ही गयी मूचनाका मम्पादन (editing) करना धावस्थक है। इस प्रकार कुछ स्पष्ट कृटियों को दूर कर सकते हैं ग्रीर प्रतुपयोगी मूचना को निकाल दिया जाता है। इसके पत्रवाद प्रावस्थक मारणियाँ बनाकर न्यास का मान्यिकीय विक्लेपण करके ध्राक्तको के मान झात कर लिये जाने हैं तथा विभिन्न परिकल्पनाधी की परीक्षा कर सी जाती है। इस विक्लपण के बाधार पर प्राप्त परिणामो का निर्वेचन करके एक रिपोर्ट के रूप में प्रस्तुत या प्रकाशित कर दिया जाता है-।

प्रश्नावली

एक शहर, जिसमे कि 10,000 परिवार हैं, का सर्वेक्षण करके गिक्षित व्यक्तियो की सत्ना तथा पारिवारिक माध्य धाय का पता लगाना है. तो बताइये कि क्स 1. प्रतिचयन विधि को घपनाया जाये और कितने परिमाण का प्रतिदर्ण तिया जाना उचित है कि अच्छे स्राकनन प्राप्त हो । इसवे तिये द्याप दिन प्रकार की पूर्व मूचना प्राप्त करना चाहेंगे ?

दिल्ली में नगर सम्पत्ति की भीमा निर्घारित करने के हेतु एक सर्वेकण करने पना लगाना है कि इससे क्तिने मूल्य की सम्पत्ति सरकार के नियन्त्रण में ग्रा जायेगी। माना कि प्राप्त सूचना के ब्रनुसार ऐसे संयभग 7,000 परिवार हैं जो सम्पत्ति सीमा में माते हैं। इन परिवारों को बीन वर्गों से उक्च, सध्यम, भीर निस्त में सम्पत्ति ने मूल्य ने साधार पर विभाजित विया गया है और इन वर्गों से माला कि परिवारों की महत्या 1,500, 2,500 व 3,000 है, तो बताइये कि किए प्रतिचयन विधि का प्रपताया आये कि जिससे कुल सम्पत्ति के अच्छे आवणक प्राप्त हो ? प्रत्येव वर्ग में उपयक्त प्रतिदर्श परियाण के विषय में भी विचार व्यक्त की निये ।

- देण राज (Des Raj) शासनक को समझाइये तथा श्रान्य शासलों की शुमना मे 3 हमने गुण एव दोवो का विवेचन कीजिये ।
- प्रतिचयन पृटि व ग्रंप्रनिचयन पृटि में धन्तर उदाहरूको गहिल बनाइये ।
 - निम्न पर टिप्पणी निनिए ---(1) प्रयोगवत स्थास

 - (2) प्रतिषयन एकक
 - (3) वृत्तीय त्रमबद्ध प्रतिचयन
 - (4) मार्टिन्छन सम्या सारणी
- विमी प्रतिदर्श मर्वेशण स पूछ-नाछ की विधियों का वर्णन की जिये सौर यह भी बताइये कि किन-किन दिवनिया में इनका प्रयोग करना अधिन है ?

प्राय. हो या दो ने मधिक बरो का एक साथ मध्ययन वरने की बावस्वकता होती है। साम ही इन बरो में फननीय सम्बन्ध जानना भी मावस्वक हो जाता है। जैसे माना कि एक बस्तु की उप्पादन-सारत (production cost). बच्चे मान के मून्य, बिजनी वे इंग्रन का क्या सब्दुहुत पर निमंद है। यदि उत्पादन-सारत व मन्य तीनी बरो में फननीय सम्बन्ध कात हो हो क्यों मान के मून्य, बिजनी व इंग्रन के स्वाय मोर्ग मजदूरी के निविद्य सानों के तिए उत्पादन-सारत का मानुसान किया जा सकता है। यहां उत्पादित बस्तु का मून्य, मानित वर भीर सान तीनी बर, स्वतन्त्र कर कहनाते हैं।

ममाश्रयण शब्द का विचार नवंप्रयम गैस्टन (Galton) ने दिया जबिन उन्होंने यह कहा कि एक व्यक्ति के विशेष लक्षण उसने स्वकुत्त्य द्वारा शेयर (share) निये जाते हैं। इसी तप्य नो सिद्ध करने के हेतु नार्स पियमेंन ने पुत्र नो ऊँचाई ना पिना की ऊँचाई पर

समाध्यम जात दिया ।

दो बसों की स्थिति में समाध्यम रेखा या वक को इस प्रकार समक सकते हैं। माना दो बर Y और X है और इनका प्रतिवस्थी बारस्वारना पनन $\{(y/x)\}$ है। बरि $\{(y/x)\}$ के किसी विशेष मान बैंखे भाग्य, माध्यम भार की विशाद करें तो यह विशेष मान प्रप्त निर्मेर करता है। माना दि यह विशेष मान y_x है। $\{ux\}$ Y एक फामित वर और X एक प्रकार कर है। $\{ux\}$ Y एक फामित वर और X एक प्रकार कर है। $\{ux\}$ Y एक फामित वर और X एक प्रकार कर है। $\{ux\}$ Y एक प्रमान वर्ष और X एक प्रकार कर है। $\{ux\}$ Y एक प्रमान प्रकार $\{ux\}$ Y के विशास कर है। $\{ux\}$ Y हम प्रकार $\{ux\}$ Y हम प्रप्त हम प्रप्त हम प्रकार कर है। $\{ux\}$ Y हम प्रप्त $\{ux\}$ Y हम प्रप्त $\{ux\}$ $\{ux\}$

माना कि एक साधित चर Y का स्वतन्त्र चरो $X_1, X_2, X_3, ..., X_K$ पर समाजनण कपन ज्ञात करना है। यह एनन रेसीय या दक्त-रेसीय देशा सी ही सकरा है। ज्यापर क्रम से मिनिटीय कपन की निन्न प्रकार से निर्मापन कर से मिनिटीय कपन की निन्न प्रकार से निर्मापन कर सहते हैं \cdots

हर में भाषताय फलन व । जन्म प्रवाद में । जन्म प्रवाद में । जन्म प्रवाद में । जन्म प्रवाद में । $(13\ 1)$ समीकरण $(13\ 1)$ में θ_1 , $(2\overline{e}^1) = 1$, (2, 3, ..., m)) जा प्राचन है । स्ववहार में प्राच एकत $(13\ 1)$ ने जिल्ला प्रवाद में [लियते हैं —

$$E(Y) = \psi(X_1, X_2, X_3, ..., X_K)$$
(13 1.1)

इसी एलन को समार्थयण एतन कहते हैं। इस एलन वाक्य निर्धारित करना प्रयोग करने बाले भी दक्षता पर निर्मर करता है। यदि एलन वारूप निश्चित भी कर लिया गया हो तो यह कहना कठिन है कि करों में सम्बन्ध का सस्तित्व है भी या नहीं। मन पननीय सम्बन्ध चयन करने की निम्न दो विधियों से से एक का प्रयोग करना होता है। विधि 1 '--विधा सम्बन्धी नच्यों हा बैक्नीयन होन्द्र से विचार करता। यह विधि उत्तम है किन्तु किया ने विकास से पूर्णान जानकारी न होते भी विधान से इस विधि को इसील से नहीं साथा आ सकता।

विधि 2 — प्रोप्तन स्थान को बादेशित करने पर प्राप्त प्रकृति भारित के निरीक्षण द्वारा । प्रथम विधि उत्सुक न कोने की स्थिति से यह विधि क्षप्रिक उत्सीती एक स्थानगरिक है ।

प्रकृषि मारेल —िवन्तुषो (X, Y₁), जहाँ ।⇒ 1, 2, 3,..., त, को X-Y सनतक्त (plane) म जबनित किया जा सकता है। इस जकार जान्य प्रारेण को प्रकृषि मारेख कहते हैं।

वक-समंजन

यदि चर Y ना X_1 , X_2 , X_3 , ..., X_K चरो पर समाप्रयम फरन ना निश्चय कर निया गया है तो उपना प्रसिद्धाव है हि यही समग्र से बार्स्सार के बहुनाड़ा है। सब प्रीक्षित मानों ने बार्यार पर इस करन ने बार्यों ने सर्वेत्तम स्नामक प्राप्त करना है। प्राप्ता में स्वाप्त कीर अपने द्वारा करना है। प्राप्ता में स्वाप्त कीर अपने द्वारा करने ने विधित्त करने ने ही बक्त्मकप्त महेते हैं। सब प्राप्त ने बार्यामक नरते ने प्रस्त सम्मुख है। स्वाप्त न नी स्वेत्त विधित्त हैं किन्तु सर्वोत्तम सामग्रक प्राप्त करने ने विध्य स्वित्त क्षेत्र के बिद्ध स्वित्त करने विधित्त करने विधित्त स्वाप्त स्वाप्त स्वाप्त स्वाप्त स्वाप्त स्वाप्त कीर्या विधान स्वाप्त स्वाप

म्यूननम् बर्गे विधि — सन्तम् (13.1) वे धनुसार Y एव धायित पर है धौर $X_1, X_2, X_3, ..., X_L$ स्वनम्य पर है। माना कि Y', Y वा $X_1, X_2, X_3, ..., X_L$ स्विम होने पर प्रस्मामित मान है भीर Y' का Y से भन्तर = है जिसकी कि नूटि क्टूरे हैं। धन.

$$Y = Y' + e = \#(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) + e$$
(13.2)

यहां यह भी करूना की गयी है कि एक वाहिन्छक वर है जिनका बटन प्रमामाय है भीर हमते माध्य व प्रमरण जयन 0 और σ_s^2 है। यदि σ_s प्रेसण निष्मये हैं जितमें में हों प्रेसण ने याबिक और करूनज करों के मान क्रमण Y_t और $X_{1t}, X_{2t}, X_{2t}, \dots$ X_{2t} है। $\{132\}$ के सनुभार,

$$Y_i = \#(X_1, X_2, X_2, ..., X_n) + c_i$$
(13.21)

$$\pi_i = (Y_i - Y_i^*) = Y_i - \phi(X_{1i}, X_{2i}, X_{2i}, ..., X_{2i})$$
(13.22)

 $(Y_i - Y_i')$ वा बात पतास्तर है यदि $Y_i > Y_i'$ हो और क्षणास्तर है यदि $Y_i < Y_i'$ हो। बात दम बिह्न वी समस्या वा दूर वरते के निग् होतों और ने स्थानक वा बर्ग वर दिया बाता है। इस प्रवार क्षेत्र पृष्टि के गरिमाण से ही सम्बन्ध वह जाता है। पूर्व प्रवार के परिमाण से ही सम्बन्ध वह जाता है। पूर्व स्थान के विच्या प्रवार प्रवार है। पूर्व के प्रवार के निग् स्थान के लिए तो स्थान के निग् निव्य द्वारा प्रवार के निग् निव्य द्वारा निग् परिवार द्वारा प्रवार के निग् निव्य द्वारा प्रवार के निग्न प्रवार के निग्न निग्न निग्न प्रवार के निग्न न

प्रदेशन गणित (differential calculus) की महायता से ब्यूननम करते हैं।

$$Q = \sum_{i=1}^{n} e_{i}^{2} = \sum_{i=1}^{n} (Y_{i} - Y_{i}^{*})^{2} = \sum_{i=1}^{n} \{Y_{i} - \psi(X_{1}, X_{2}, X_{3}, ..., X_{n})\}^{2} \dots (13.3)$$

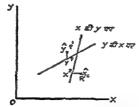
चपर्युक्त विधि मा प्रयोग विनिध पननो ने ममजन के हेतु आगामी खण्डों में हिया गया है।

सरल समाध्यण रेखा

यदि साम्रित घर भीर स्वतन्त्र चर मे या चरों मे पनतीय सम्बन्ध रैनिक समीकरण हारा प्रदर्शित किया गया हो तो इसे रैनिक समाध्यदण कहते हैं। एक्ट सरल में भाव है कि रेला के समीकरण में चर Y लेवन एक ही स्वतन्त्र चर X रूर साम्रित है। यदि रेला के समीकरण को इस प्रकार निया गया हो कि Y-एक्ट के ममान्तर विचनमों के वर्ष के सौग को स्मृतन्त्र किया गया हो की Y को स्मृतन्त्र किया गया हो की Y की Y के स्मृतन्त्र किया गया हो की Y की Y के स्मृतन्त्र किया गया हो की Y की Y की Y की स्मृतन्त्र किया गया हो की देशे की स्मृतन्त्र किया गया हो दी दिले की स्मृतन्त्र किया गया हो दी दिले की स्मृतन्त्र किया गया हो दी दिले

ा

X की Y पर नमाश्रयण रेखा बहते हैं। यह न्यिति X के झाश्रिन चर और Y के स्वनन्त्र
चर होने की दशा में उत्तम होती है।



वित्र 13-1 दो समाध्यम रेलाको का निस्पण

माना कि समग्र के लिए Y की X पर समाययण रेखा समीकरण है,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$$
(13.4)

यहाँ β_0 भौर β_1 दो प्राचल हैं। इन प्राचलों के आनमक b_0 b_1 (मानिजा) म्यूनतम वर्ग विधि द्वारा इस प्रकार जात कर सकते हैं। माना कि प्रजिदमें में सुमन प्रेसमों की संस्था \mathbf{n} है जो कि निम्न हैं :—

$$Y : Y_1, Y_2, Y_3...Y_n$$

 $X : X_1, X_2, X_3...X_n$

प्रत Y नी X पर ग्रागणित समाश्रयण रेखा निम्न है --

$$Y'=b_0+b_1 X$$
(13.5)

। वे प्रेक्षण के लिए रेखा समीकरण,

$$Y_i' = b_0 + b_1 X_i$$
(13.5.1)

है अब इन प्रेशणों के पदों में ७, व ७, के मान ज्ञात करते हैं स्पष्टत ,

$$(Y_i - Y_i') = (Y_i - b_o - b_1 X_i)$$

at $(Y_i - Y_i')^2 = (Y_i - b_o - b_1 X_i)^2$

श्रद प्रेशणों के निए विचलनों के वर्गों का यौग,

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - Y_i')^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_o - b_i X_i)^2 \dots (13.6)$$

है। Q का bo, ba के सम्बन्ध में जमग्रा मागिक घवकपन करके शूर्य के समान रखने पर,

$$\frac{\partial Q}{\partial b_0} = -2 \times (Y_1 - b_0 - b_1 X_1) = 0 \quad(13.7)$$

$$\frac{QQ}{3b_1} = -2 \sum_{i} X_i (Y_i - b_0 - b_1 X_i) = 0 \qquad(13.7.1)$$

इत दोनो समीकरणो को इल करने पर, पहले (13.7) द्वारा,

इसी प्रकार (13 7.1) हारा

$$\sum_{i} X_{i} (Y_{i} - b_{0} - b_{1} X_{i}) = 0$$
 $\sum_{i} X_{i} Y_{i} - b_{0} \sum_{i} X_{i} - b_{1} \sum_{i} X_{i}^{2} = 0$
 $\sum_{i} X_{i} Y_{i} - \sum_{i} X_{i}^{2} = 0$

b₀ का (13 8) द्वारा मान रखने पर,

$$X \times Y_i - (\overline{Y} - b_1 \overline{X}) = X_i - b_1 = X_i = 0$$

$$p_i = \frac{1}{2} \frac{X_i Y_i - \overline{X}}{X_i^2 - \overline{X}} \frac{\overline{X}}{X_i} \frac{Y_i}{X_i}$$

$$\sum_{x \in X_1} X_1 - \frac{(x : X_1) (x : Y_1)}{n}$$

$$\sum_{x \in X_1^2 - (x : X_1)^2/n} \dots \dots (13.9)$$

सूत्र (13.9) की माध्य से विचलन के रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं।

$$b_{1} = \frac{\sum \{X_{i} - \bar{X}_{i}\} (Y_{i} - \bar{Y})}{\sum \{X_{i} - \bar{X}\}^{2}} ..., (13.9.1)$$

माना कि $X_i - \overline{X} = x_i$ भौर $Y_i - \overline{Y} = y_i$

$$b_1 = \frac{\sum_{i} x_i y_i}{\sum_{i} x_i^2} \qquad(13.9.2)$$

यदि b1 के लिए दाथों भीर के व्यञ्जक में मश व हर की (n-1) से भाग कर दें ती

$$b_1 = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{v}(X)}$$
(13.9.3)

यदि cov $(X, Y) = s_{xy}$ और $v(X) = s_x^2$ रख दें ती

$$b = \frac{s_{xy}}{s_{x}^{2}}$$
 (13.9.4)

 b_1 को Y का X पर आगणिक समाध्यण गुणाक कहते हैं धौर इसे b_{yx} द्वारा भी निरुपित करते हैं। अनुसन्न yx यह प्रदर्शित करता है कि Y का X पर समाध्यण ज्ञात किया गया है। माना $\overset{\Lambda}{Y}$, साध्यत चर $\overset{\Lambda}{Y}$ का स्वाकतित सान है। सत. साकतित समाभ्रयण समीकरण निम्न है:—

$$\stackrel{?}{\stackrel{\checkmark}{Y}} = (\overrightarrow{Y} - b_1 \overrightarrow{X}) + b_1 X$$

$$\stackrel{?}{\stackrel{\checkmark}{Y}} - \overrightarrow{Y}) = b_1 (X - \overrightarrow{X}) \qquad(13.10)$$

समीकरण (13.10) में b_1 , \overline{X} , \overline{Y} के परिकलित मानों को रखने पर प्रामणित समाययण रेखा, $Y'=b_0+b_1$, X के रूप में जात हो जाती है।

यदि X की Y पर समाध्यण रेखा $X'=\beta_0'+\beta_{sy}$ Y करना हो तो पहले की भौति β_0' और β_{sy} के धार्गणत मान b_0' और b_{3y} को तकर सकते हैं। इस स्थिति मे,

$$b_0' = (\overline{X} - b_{xy} \overline{Y}) \qquad \dots (13.11)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{x}_{1} - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}_{1} - \mathbf{y}) \dots (13.12)$$

सूत्र (1394) की मौति,
$$b_{xy} = s_{yy} (s_y^2 \ ...(13121)$$

यत X की Y पर भागणित समाध्यण रेखा है.

$$\hat{X} - \overrightarrow{X} \rightleftharpoons b_{xy} (Y - \overrightarrow{Y})$$
 ...(13 13)

डिप्पणी (!) सत्री मूत्राकादेसने सेस्पट है कि Y नाX पर समाध्यम की रियति में यदि X को Y से घोर Y को X से बदल दें तो X व Y पर समाध्रयण के लिए सूत्र एव समीररण ज्ञात हा जाते है।

(2) साथ ही यह बात ब्रान देन योग्य है कि X वी Y पर समाश्रयण रेला वही

नहीं होती है जो Y की X पर होनी है।

(3) यदि प्रतिदर्श में युगत प्रेक्षणों (X, Y,) की बारम्बारता परिवर्ती हो तो b_{ve} का परिकलन निम्न सूत्र द्वारा तिया जानाहै। साना कि सुगल प्रेक्षण (X, Y,) की शारम्बारता (, है जहाै ।=1, 2, 3, . n ता,

$$\sum_{y_{X}=1}^{X} \frac{f_{1}(X_{1} - \overline{X})(Y_{1} - \overline{Y})}{\sum_{x}^{X} f_{1}(X_{1} - \overline{X})^{2}} \dots (13.14)$$

$$= \frac{\sum_{i}^{1} f_{i} X_{i} Y - \frac{\left(\sum_{i}^{1} f_{i} X_{i}\right) \left(\sum_{i}^{2} f_{i} Y_{i}\right)}{\sum_{i}^{1} f_{i}}}{\sum_{i}^{1} f_{i} X_{i}^{2} - \frac{\left(\sum_{i}^{1} f_{i} X_{i}\right)^{2}}{\sum_{i}^{1} f_{i}}} \dots (13 14 1)$$

(4) s_x व s_y सदैव घनारमक होते हैं। धन b_{yx}, b_{xy} व s_{ev} का विहा दिश होता है सर्पात् P11, X x, y, द Say के जिल्ल एक गहोते हैं।

समाश्रयण गुणांक को परिभाषा

बहु माधित चर मे उस परिवर्तन का माप है जो कि स्वतन्त्र चर से एक इवाई परि-

बर्तन करने से जन्मन होता है।

समाध्यम गुणाक \mathfrak{b}_{vc} नी इनाई Y की इनाई ब्रिटि X नी इनाई के तुन्य है। जैसे Yशामाप क्सोप्राम में बोट X वासाय खटोसीटर में विया गया हो तो b_{ps} की देवाई विसोपास प्रति सेंटीमीटर होनी है यदि b_{sa}=3 5 विक प्रति में के है तो इनवा प्रतिप्रत्य है दि सम्बाह को ! संटीमोटर बड़ा देने थर भार 35 विलाशस वह जाता है। सदि b,x दामान ऋणात्वत हो नो Y वे सान से दसी हो जानी है। इसी प्रकार वा दया b_{sy} के लिए भी दिया जा सकता है।

जबाहरण 13.1 : एक सरपनवारनाशो (seedicids) का मरूल की उनक पर प्रभाव जानने के सिर् प्रयोग किया गया। मश्का बोने के 10 दिन के बाद प्रयोग मूलपट (p'ot)

में सरपतवारों व मक्का की उपज निम्न थी :--

सरप्तवारो को सस्या (X) 80, 28, 42, 37, 61, 52, 45, 39, 38, 34, 56, 40

मक्काकी उपज

(वर्षीटन प्रति हैक्टर) (Y) 10, 24, 15, 28, 16, 26, 25, 26, 18,

22, 22, 20

यह ज्ञात है कि उपज्ञ. सरपतवारो को मक्या पर निर्मर करती है। सन उपज Y की सरपतवारो को सक्या X पर सरम समाध्यक रेचा निम्न प्रकार ज्ञात कर नकते हैं —

 $\sum_{i=1}^{n} X = 552$, $\overline{\lambda} = 46$, $\sum_{i=1}^{n} Y = 252$, $\overline{Y} = 21$ निम्न सारणी बनावर b_{yz} का मान सुगमता म परिक्शित किया जा सकता है ।

(X − X)	(Y - Y)	$(X - \overline{\lambda}) (Y - \overline{Y})$	(X - X)2	(Y-\overline{Y}2)
34	-11	-374	1156	121
-18	3	- 54	324	9
-4	-6	24	16	36
-9	7	- 63	81	49
15	-5	- 75	225	25
6	5	30	36	25
-1	4	-4	1	16
-7	5	- 35	49	25
-8	3	24	64	9
-12	1	- 12	144	1
10	1	10	100	1
-6	-1	6	36	1
0	0	-523	2232	318

दिये बये परिकलन के अनुसार,

$$\sum_{i} (X_{i} - \overline{X}) (Y_{i} - \overline{Y}) = -523,$$

$$\Sigma (X_1 - \bar{X})^2 = 2232$$

मीर n=12, X=46, Y=21

सूत्र (1291) के चनुसार,

$$t_{yz} = \frac{-523}{2232} = -02343$$

यत समीवरण (13 10) की सहायता से मागणित समाध्यण रेखा,

$$(\hat{Y} - 21) = -0.2343 (X - 46)$$

 $\hat{Y} = -0.2343 X + 21 + 10.7778$
 $\hat{Y} = -0.2343 X + 31.7778$

ह। यदि X = 50 ने निरुप्त कार्यानन मान जात नरना है ती,

$$\hat{Y}$$
 = -02343 × 50 + 31 7778
= -11 7150 + 31 7778
= 20 0628

इसी प्रकार X के श्राय किसी भी मान के लिए Y का धागणित मान शांत कर सकते हैं।

हिष्युणी X के मान क्षेत्रे संबद्द ध्यान रतना चाहिय कि समितित समाध्यय समी-करण X के परिसर से व परिसर व बाहर निम्न व उच्च धानो वे निच्ट मानो के निच् ही साथ है।

चरों के रैकित क्यान्तरण (सकेतोकरण) का समाध्यण गुणांक पर प्रभाव

प्रतिदर्श में X और Y के रेखीय रूपान्तरण के हेतु माना कि

$$v_i = \frac{X_i - a}{c}, \quad v_i = \frac{Y_i - b}{d}$$

$$\forall i \quad X_i = a + cv_i, \quad Y_i = b + dv_i$$

थौर माध्य X=a+cu, Y⇒b+d v

सूत्र (1391) के धनुसार,

$$b_{1} = \frac{x ((a+cu_{1}) - (a+cu_{1})) \{(b+dv_{1}) - (b+dv_{1})\}}{x \{(a+cu_{1}) - (a+cu_{1})\}^{2}}$$

$$cd x (u = \overline{u}) (v = \overline{v})$$

$$\operatorname{cd} \underbrace{\frac{1}{2} \left(n^{2} - \underline{n}\right)_{2}}_{q}$$

$$= \frac{d}{\epsilon} b_{uv} \qquad(1315)$$

 b_{yx} भीर b_{xy} में सम्बन्ध में स्पष्ट है कि जून बिन्दु वो बदलने का समाश्रयण गुणाक पर कोई प्रमाव नहीं पबता है धर्यात् सदि बोई सकर मान, X भीर Y के समुच्चय में से घटा या जोड दिये जाथ तो b_{yx} के मान पर कोई प्रमाव नहीं पडता है किन्तु गुणा या भाग करने का समाश्रयण गुणाक पर प्रभाव पडता है। यदि वेचल भूत बिन्दु ही बदला गया हो तो उस स्थिति में c = d = 1. होता है भीर यदि मापनी (scale) में हो परिवर्तन किया गया हो तो a = b = 0 होता है।

दो सरल समाध्यण रेखाओं का कटान विन्द्

सूत्रों (13 10) और (13 13) द्वारा दी गयी दो सरल समाध्यय रेलाएँ

$$(\stackrel{\wedge}{Y} - \stackrel{\nabla}{Y}) = b_{yx} (X - \stackrel{\nabla}{X})$$
 स्रोर $\stackrel{\wedge}{(X - \overline{X})} = b_{xy} (Y - \stackrel{\nabla}{Y})$

हैं। इन दोनो समीशरणों नो बिन्दु, जिसके निर्देशान $(\overline{X}, \overline{Y})$ हैं, सन्तुष्ट नरता है, मतः इन दोनों रेखायों का कटान बिन्दु $(\overline{X}, \overline{Y})$ है धर्यांद् X और Y के मध्य पर दोनों रेखाएँ एक दूसरे को काटती है।

सरल रेखीय समाश्रयण के लिए प्रसरण-विश्लेषण

यहाँ प्रसरण विश्लेषण को सीधे हो दिया गया है। इसके सैद्धान्तिक विवरण के लिए प्रध्याय 21 का प्रध्ययन कीजिये।

पूर्व की भाँति, माना कि समाश्रयण रेखा समीकरण $Y=\beta_0+\beta_1$ X है और आक्तों β_0 व β_1 के सागणक b_0 शोर b_1 है ।

यहाँ कुल प्रसरण को तीन समस्को में िशानित किया वा सक्ता है। एक तो b_0 के कारण, दूसरा समाश्रयण (b_1/b_0) के a रण और तीसरा भवशिष्ट (residual) प्रसरण होता है।

माना कि प्रतिदर्श में निम्न 🛭 युगल प्रेक्षण

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ X_1 \end{pmatrix}$$
, $\begin{pmatrix} Y_2 \\ X_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} Y_3 \\ X_3 \end{pmatrix}$,....., $\begin{pmatrix} Y_n \\ X_n \end{pmatrix}$

हैं। इन प्रेक्षणों द्वारा दुल वर्ग-योग (ब॰ य॰) b₀ तथा समाक्ष्यण (b₁/b₀) के कारण वर्ग योग सामान्य राान से बात कर लिय बात हैं। वर्ग-योगो को उनकी तदनुसा**र स्था॰** को॰ द्वारा भाग देने पर माध्य वर्ग योग (मा॰ य॰ य॰) बात हो जाते हैं। समाक्ष्यण मा॰ व॰ य॰ का सबिगष्ट मा॰ व॰ य॰ से सनुपात. परिकत्तित F के समान होता है।

यहाँ कुत व॰ य॰=
$$\sum_{i} Y_{i}^{2}$$
(13.16)
 b_{0} के कारण य॰ $\approx (\sum_{i} Y_{i})^{2}/n$ (13.17)

(13 20 2)

समाध्यम्
$$\{b_1/b_0\}$$
 के नारण के मिंक b_2 $\left\{ \begin{array}{l} \sum_i X_i Y_i - \frac{\left(\sum_i X_i\right)}{n} \left(\sum_i Y_i\right) \\ = b_2 \sum_i X_i y_i & \left(13.18.1\right) \\ = \left(\sum_i X_i y_i\right)^2 / \sum_i X_i^2 & \left(13.18.2\right) \\ = \left(\sum_i X_i y_i\right)^2 / \sum_i X_i^2 & \left(13.18.2\right) \\ = \left(\sum_i X_i y_i\right)^2 / \sum_i X_i^2 & \left(13.18.2\right) \\ = \sum_i Y_i^2 - \left(\sum_i X_i\right)^2 / \sum_i X_i^2 & \left(13.19\right) \\ = \sum_i Y_i^2 - \left(\sum_i X_i\right)^2 / \sum_i X_i^2 & \left(13.20\right) \\ = \sum_i Y_i^2 - \sum_i X_i y_i & \left(13.20\right) \\ = \sum_$

इन वंग योगों को निक्त प्रसारण-विश्लेयण सारणी में इस प्रकार प्रयाग करते हैं।

 $= \sum_{i} (Y_i - Y_i)^2$

	सारका	(131) असरव	विश्लवय सारणा	
विकास मोड	हव+ गो+	4. 4.	মাণ ৰঙ হাঙ	টি বাৰ
कुल	n	Σ Y [‡]		
b _e	1	(X Y _i) ² / _n		b _i z zy,
समाध्यण (b _t / _{b0})	ı	b _i x x _i y _i	51 ≥ X1 31	1 ~F _{1, n-2}
संविशय	(n-2)	∑ y ₁ 2-b ₁ ∑ x ₁ y ₁	$\frac{\sum y_i^2 - b_i \sum x_i}{(n-2)}$ $= s_0^2$	
	1		(बाद भिरा)	

परिकृतित F नी पूर्व निर्धारित मा स्त्र. α व (1, n-2) स्व नो के लिए सारणीब α F से तुनना नरने b_1 की सार्थकता ने प्रति निश्चय नर लिया जाता है।

यदि परिकलित F > F $_{lpha}$ हा ता ${\it b}_{1}$ सार्थंक है और यदि परिकलित F < F $_{lpha}$

हो तो b1 निरर्थन है ग्रर्थात् समाध्यण का व्यावहारिन दृष्टि से महत्त्व नहीं है।

उदाहरण 132: यदि उदाहरण 131 म दिवे गये न्यास के लिए Y का X पर समाध्ययण विश्लेषण करना है तो प्रवरण-विश्लेषण सारणी (131) बनाकर समाध्ययण की सार्यकता परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं —

न्यास के लिए उदाहरण (131) के अनुसार परिकलित मान निम्न हैं -

$$\sum_{i} x_{i} y_{i} = -523, \sum_{i} x_{i}^{2} = 2232$$

$$E_1 y_1^2 = 318$$
, $n = 12$, $b_1 = -0.2343$

समाध्रयण के कारण व
$$u = \frac{(-523)^2}{2232}$$

= 122.55

प्रसरण विश्लेषण **सार**णी

विश्रण स्रोत	स्त्र को	वश	मादय	F-मान
समाश्रयण	1	122 55	122 55	$\frac{122\ 55}{19\ 55} = 6\ 27$
भवशिष्ट	10	195 45	19 55	
पूर्व	11	318 00		

माना कि a=05 है तो सारणी (परि॰ ध-52) हारा $F_{05, 1, 10}=496$

है । परिकलित F, सारणीबद F से बड़ा हु धत समाध्यण सार्यक है। इसका प्रभिन्नाय है कि खरपतबार नी सख्या का उपन पर सार्यक विपरीत प्रभाव पड़ता है। यहाँ विपरीत प्रभाव इस कारण कहा गया है कि b, का मान ऋणात्मक है। समाश्रयण-गुणांक की सार्यकता की ध्परीक्षा

यह यहले ही कहा जा चुका है कि यदि X एक I_a पर हो तो X^2 एक $F_{1/6}$ यर होगा । इस कारण बजाय F परीक्षण के जिसना बर्णन हम ऊपर कर चुते हैं हम

$$\sqrt{\frac{b_1 \sum x_i y_i}{s_0^2}}$$
 पर i_{1i-2} परीक्षण भी कर सकते हैं ह

$$\sqrt{\frac{\overline{b_1}\,\Sigma\,x_i\,y_i}{s_a^{\,2}}} = \frac{b_1\sqrt{\,\Sigma\,x_i^{\,2}}}{s_a}$$

माना कि निराकरणीय परिकल्पना

 H_0 $\beta_{yz} = C$ वी H_1 $\beta_{yz} \neq C$ वे विषद परीशा करती है, जहां C एक ज्ञात सकर मान है। यदि β_{yz} को वेचल मार्थकता परीशा करती हो तो इस स्थिति में C को शूर्य के समान मानते हैं।

माना वि n परिमाण के प्रतिदर्श में यूगत प्रेक्षण हैं --

 $X X_1, X_2, X_3, X_n$

H, की t-परीक्षा निम्न प्रकार है —

$$t_{n-2} = \frac{b_{yx} - \beta_{yx}}{s_b} \tag{13.21}$$

 $\therefore \quad \beta_{yx} = 0 \quad \delta,$

$$t = \frac{b_{yx}}{s_b}$$
 (13 21 1)

जबकि sb, bvx वा मानक विचलत है।

 $b_{\gamma x}$ या मान सूत्र (139) द्वारा ज्ञान वर लिया जाता है धौर %, निभ्न प्रवार ज्ञान करते हैं -

$$s_{e}^{2} = \frac{1}{n-2} \left\{ \sum_{i} y_{i} \left(\sum_{i} x_{i} y_{i} \right)^{2} \right\}_{\sum_{i} x_{i}^{2}} \right\}$$
 (13.22)

भीर $s_b^2 = \frac{s_e^2}{\sum_i x_i^2}$

$$: s_b = \sqrt{\frac{s_b^2}{\sum_{i} x_i^2}}$$
 (13 22 1)

प्रतिदर्शज (1321) म b,β व sьका मान रसकर, t का परिकत्तित मान झात कर लिया जाता है।

यदिवसाम्न भौर (n–2) म्ब को पर $\mathfrak{t}_{\mathfrak{a},\,(n-2)}<\mathfrak{t}$ हो, तो $\mathfrak{H}_{\mathfrak{o}}$ को ग्रस्वीकार कर दिया जाता है। इसका ग्रभिप्राय है कि β_{γκ} का मान, C से सार्यक रूप में भिन्न है। यदि $t < t_{g, \{n-2\}}$ हो तो H_o वो म्बीकार कर लिया जाता है जिसका म्नपिप्राय है वि $eta_{
m yz}$ वामान C सस्य है । $eta_{
m yz}=$ o की स्थिनि म H_o को स्बीकार करने से यह निप्कर्ष निवसता है कि, X स इकाई परिवर्तन करने पर,Yम परिवर्तन महत्त्वपूर्ण है।

By की विश्वास्यता सीमाएँ

माध्य 🖟 के लिए दियं गये सूत्र (99) के समन्प निम्त सूत्र द्वारा समग्र समाश्रयण गुणीक $oldsymbol{eta_{yx}}$ की $oldsymbol{lpha}$ मारून परउपरिव निम्न सीमार्णे $oldsymbol{U}$ तथा $oldsymbol{L}$, ज्ञान कर सकते हैं $oldsymbol{ ilde{t}}$

$$\begin{bmatrix} U \\ L \end{bmatrix} = b_{yx} \pm s_b t_{a, (n-2)}$$
 (13 23)

चदाहरण 13 3 $β_{yx}$ की सार्षक∼ा-परीक्षा तथा विश्वास्थता सीमाएँ उदाहरण (132) में दिये गये न्यास के लिए निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

इस उदाहरण द्वारा,

$$b_{yx} = -0.2343, n=12$$

 $s_a^2 = 19.55$

सूत्र (13 22 1) द्वारा,

$$s_b^2 = \frac{19}{2232} = 008759$$

$$s_b = 093$$

 $extsf{H}_{o}$ $extsf{eta}_{yz}=0$ की $extsf{H}_{1}$ $extsf{eta}_{yz}
eq 0$ के दिरुद्ध परीक्षा करनी हैतो प्रतिदयज (13 21 1) द्वारा,

$$t = -\frac{0\ 2343}{093} = -2\ 52$$

सारणी (परि घ−3) द्वाराα = 05 वस्व को 10 के लिए १ का मान = 2 228

म्रत H_o को मस्वीकार कर दिया। इसना सर्यहै कि $oldsymbol{eta_{yz}}$ सार्थर है। मूत्र (1.3.2.3)

B. की सार्यकता-परीक्षा

 H_0 $\beta_0 = 0$ की H_1 $\beta_0 \neq 0$ के बिग्द, सार्वका। परीना प्रतिदर्शन t हारा करते हैं जो कि निम्न प्रकार है —

$$t_{n,2} = \frac{b_0 - 0}{s_{bo}} \tag{13.24}$$

जबिर b_0 का सामगिक माउ ($\overline{Y}-b_{\gamma x}$ \overline{X}) के समान है s_{bo} , \overline{b}_0 का सामगित मानक सिचलन है ।

b, का प्रसरण,

$$s_{bo}^2 = s_b^2 \left\{ \frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\Sigma (X_b - \overline{X})^2} \right\}$$
 (23.25)

b, व s_{bo} के मानों का (12 24) मे प्रतिस्थापन करके t का मान परिवर्तित कर तिया जाता है। इस t की सारभीवड t₀, (n-2) के नुजना करके परिवर्तना H_0 के कियम में निर्णय नियमानुसार कर निया जाता है।

βo की (1-a) प्रतिशत विश्वास्थता शीमाएँ निम्न मूत्र द्वारा ज्ञात करकरते हैं ---

$$\begin{bmatrix} U \\ L \end{bmatrix} = b_0 \pm s_{bo} \quad t_{\alpha_1} \quad (n-2)$$
 (13 26)

उदाहरण 134 β_0 की सार्थकरा परीना तथा 95 प्रतिकत ($a \approx 05$) विश्वस्थता सीमाएँ, उदाहरण (131) में दिवे गये ज्यात के लिए निम्न प्रकार कान कर सकते हैं।

b₀=31 7778,
$$n \approx 12$$
, $X = 46$, $Y = 21$
 $X = x^2 = 2232$
 $X = x^3 = 2232$
 $X = x^3 = 2232$
 $X = x^3 = 232$
 $X = x^3$

बूत्र (13 24) द्वारा,

$$t = \frac{31}{40}$$

≈7 07

सारणीवड (परि घ-3)द्वारा (05) (10) = 2 228 जो कि t के परिकलित मान से कम है फत B_o का मान सार्थक है।

सूत्र (13 26) हारा β, वी 95% विश्वास्यता सीमाएँ निम्न हैं —

$$\begin{bmatrix} U \\ L \end{bmatrix} = 31 7778 \pm 4 49 \times 2 228$$

ध्रत उपरि सीमा U=41 7815

भौर निम्न सीमा L=21 7741

 $\overset{\mathtt{A}}{\mathbf{Y}}$ की मानक त्रुटि एवं $_{_{\mathbf{Y}/\mathbf{X}}}$ की विश्वास्यता सीमाएँ

स्पष्टत $\mu_{y/x}=\beta_0+\beta_1\times$ वर धाराणक $Y=b_0+b_1X$ है। जबांक $\mu_{y/x}$ एक प्रसानात्म्य समय से घर Y का X वे दिए हुए मान के प्रति धाष्ट्य है। $\mu_{y/x}$ की $100~(1-\alpha)$ प्रतिकृत विश्वसंख्या मीमाएँ निम्न होती हैं -

$$\begin{bmatrix} U \\ L \end{bmatrix} = \mathring{Y} \pm t_{\alpha, (n-2)} \quad \stackrel{s_{\Lambda}}{Y} \tag{13 27}$$

जब कि Y की भागक ब्रुटि का बगं ऽ 2 ॣ े निम्न होता है —

$$s_{Y}^{2} = s_{e}^{2} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{(X - \overline{X})^{2}}{\overline{x} (X_{1} - \overline{X})^{2}} - \right\}$$
 (13.28)

जबिक X एक निरिष्ट मान है।

यदि $\overset{\circ}{Y}$ को एक प्रसामान्य समग्र के माध्य का झागणक न मानकर एक Y- मान के झागणक के रूप मे प्रयोग किया गया हो झर्यान् $Y=eta_0+eta_1X$ का झागणक $\overset{\circ}{Y}=b_0+b_1X$ हो।

यहाँ X के एक निर्मिट मान के लिए Y का आगणक Y है। इस स्थिति स,

$$s_{Y}^{2} = s_{e}^{2} \left\{ 1 + \frac{1}{n} + \frac{(X - \overline{X})^{2}}{\Sigma (X - \overline{X})^{2}} \right\}$$
 (13.29)

Y की $(1-\alpha)$ प्रतिकत विक्शास्त्रता सोमाएँ (13.26) के समस्य निम्न भूत द्वारा ज्ञात कर सकते हैं —

$$\begin{bmatrix} U \\ 1 \end{bmatrix} = \overset{\bullet}{Y} \pm t_{\alpha, (n-2)} \overset{s, \bullet}{Y} \tag{1330}$$

सरस प्ररेखिक समाध्यम समीकरण

भ्रमेल भ्रमुनभानो एव र्यापतिय विश्वयणो मे यह देला गया है नि भ्राप्तिन चर व एक या एवं से प्रियन स्वतःत्र चरा थे सम्बन्ध देशीय म होक्ट प्राय भ्रदेलिक होता है। इस वक्त वा रूप कृता भी हो सकता है भ्रीर उसी के ध्रनुसार समाम्यण समीवरण के गणितीय प्रतिक्ष्म (Mathematical model) का प्रयत्न करता होता है। इस प्रकार श्रदेलीयता के करण होने वाली गुरे को समाप्त कर दिया जाता है। समाम्यण चक्त का कर निर्मारित करने के पत्रवाद गणितीय समीकरण तिल दिया जाता है भीर प्रतिदर्श प्रसाण की सहायता से वक्त का समजन कर दिया जाता है। इस प्रतिमा के कानेश्रीय समाभ्यरण समजन कहते हैं। हुछ मुख्य मुष्य कर्को का वर्णन महाँ दिया गया है।

चरवातांकी समाभवण बक

प्राय परतात्र चर (Y) और स्वतात्र कर (X) में सम्बाध चरपाताकी वन नियम कर पालन करता है। चरपाताकी कृद्धि कम सभीकरण —

$$Y = \alpha \beta^2 \tag{13.31}$$

है। इस कृद्धि करु की विवेधका यह है कि दिनी औ सबय पर X में बृद्धि उस समय तर प्राप्त Y के परिमाण के सवानुवाती होती है।

हसका ज्यामितीय रूप उंदाहरण (13.5) के साथ दिलाया गया है। यहाँ पूनताप्र यन विधि द्वारा प्राप्त मुगयत समीव लों वो हस करने व व β ने प्राप्णक कात विधे गये हैं। इस वक का समयन संयुग्णक (Loganthan) की सहायना से विधा जाता है।

माना कि $\log_{10} Y = \mathbb{Z}$, $\log_{10} a = a \log_{10} \beta = b$ समीकरण (13.32) का निम्न रूप हो जाना है —

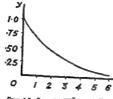
$$Z=a+bX$$
 (13 32 1)

a पोर 6 के प्रावित बात (13 8) धौर (13 9) के द्वारा नुवनना से ज्ञान विधे का सकते हैं। इत माना का परितपुर्णक (antiloganthm) रेनवर α थ β के धारित्य मान ज्ञान वर लिए बाते हैं जिनका कि श्वित्यान्त करके वालीय वक समीकरण निश्चिक हो जाता है।

यदि चर X ग्रीर Y, क्षय (decay) घातीय निमय का पालन करते 🕅 तो घातीय वक समीकरण

$$Y = \alpha \beta^{-x}$$
 (13.33)

है। इस स्थिति में ज्यामितीय रूप को चित्र (13-2) में दिखाया गया है।



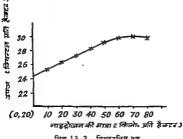
जित्र 13-2 घर घातीय बक का रूप

मिरच्रलिस वक

इसी प्रकार धनन्तस्पर्शीय समाध्ययण (asymptotic regression) समीकरण

$$Y = a - \beta P^x$$
 (13.34)

हैं। यदि $X{=}0$ हो तो $Y{=}(\alpha-\beta)$ है। इसके प्रतिरिक्त जैसे-जैसे X का मान बढता है 🔑 का मान घटता जाता है (∵ρ<1) ग्रत: Υ का मान व की ग्रोर प्रवृत करता है। इस α मान को ही अनन्तस्पर्शी कहते हैं। कृषि विज्ञान में इस वक को मिश्च्रलिस बंक (Mitscherlich's curve) कहते हैं। इस वक का रूप चित्र (13-3) मे दिखाया गया है।

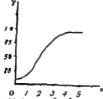


चित्र 13-3 मिश्चरलिस वक

संधगणकीय वृद्धि नियम

जनसंस्या में बृद्धि प्राय संयुगनवीय बृद्धि नियम (logistic growth law) का पासन न त्ती है। मत इस स्थिति में निम्न लघुनणकीय वृद्धि वक्त ना समजन निया जा मकता है ---

इस वक्त का ज्यामितीय रूप चित्र (13-4) मे दिखाया गया है।



छ / 2 3 4 5 " चित्र 13-4 समुगमकीय वृद्धि दक्ष्या स्वस्थ

उबाहरण 13.5 : विभिन्न तापनमी का पत्ती से बाच्योरमर्वन दर पर प्रभाव देता गया । सात तापक्रमो पर बाट्योरमर्जन की दर निम्न वासी गयी ---

तापकम (X) 5, 10, 15, 20, 25, 30. बाष्पोसाजॅन दर (Y) 2, 6, 10, 18, 25, 35. यह गात है कि वाष्त्रोरसर्जन दर तापत्रम पर निर्भर है और एक शीमा तक यह पातीय

नियम का पालन करता है । बाद इन प्रेशकों की महायहा ने समीकरण $\hat{Y} = \hat{B}^{\hat{x}}$ का समजन कर सकते हैं।

पहले समीवरण (13 32.1) वा समजन वरेंगे और फिर प्रतिलयुगयह सेवर सधी-

Y	log Y=Z	X	ZX	X2
18	0 2553	5	1 2765	25
60	0 7782	10	7 7820	100
100	1 0000	15	15 0000	225
180	1 2553	20	25 1060	400
25 0	1 3979	25	34 9475	625
350	2 5441	30	46 3230	900
50 0	1 6990	35	58 41 50	1225
	7 9298	140	188 7600	3500

ममीवरण Z=a-{-b X वे समजन वे लिए,

$$b = \frac{18876 - \frac{79298 \times 140}{7}}{3500 - \frac{(140)^2}{7}}$$

$$= \frac{3016}{700}$$

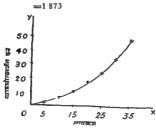
$$= 0.043$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{Z} - b\mathbf{X}$$

$$= (1.1328) - (0.043) (20)$$

$$= 0.2728$$

∴ a=Antilog (0 2728)



वित्र (13-5) चरघाताकी समाश्रयण वक

भत चरपाताकी वृद्धि दक Y=(1873) (1104) व

है । द्विधात या उच्चतर घात समीकरण का समंजन

भ्रतेक भ्रम्ययनो के भ्रम्तर्गत ऐसा देखा गया है कि द्विषात या भ्रम्य उच्चतर पात बहु-पद समाध्रयण समीकरण उचित है। यदि द्विषात समीवरण का समबन करना है तो माना कि इसका समग्र के लिए गणितीय प्रतिरूप

$$Y \Rightarrow \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2$$
 (13 36)

है। निर्देशार (Y,X) को बाफ पर वालिसित करने पर दम वक की प्राहित परस्तम (Parabola) जैसी होनी है जिसनी प्रश्न छन्दीघर है। साधारणनवा इस परस्तम वक का पूर्ण भाग बाफ में न होकर कबल दमका एक राष्ट्र ही होता है। इस वक का गमजन क्यूनतम क्यें विधि हारा पर समते हैं। माना कि प्रावतों a_0 , a_1 , a_2 के प्राकृतित मान कमा a_0 , a_1 , a_2 है। यह समति मान कमा a_0 , a_1 , a_2 है। यह समति समत

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$$
 (13.36.1)

है । माना कि प्रतिदर्श म n युगल-प्रेसंस्थ (X_i, Y_i) है । (जहाँ i = 1, 2, 3, ..., n) ।

सरपा $\mathbf{x} (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})^2$ का स्थूननम वर्ग विद्धि के मन्तर्गत a_0 a_2 a_3 के सम्प्रक्ष के माणिक मवक्तन करने पर प्रणामान्य तमीकरण जात होते हैं। इन समीकरणो तो हल करके a_0 , a_1 , a_2 के मान बात कर लिए जात है जिनका कि (13.361) में प्रतिस्वापन करके माणिल दियान तमीकरण बात हो जाती है।

प्राप्त प्रसामान्य समीकरण निम्न होने है —

$$\begin{array}{c} x \ Y_{1} = x \ a_{0} + a_{1} \ x \ X_{1} + a_{2} \ x \ X_{1}^{2} \\ x \ X_{1} \ Y_{1} = a_{0} \ x \ X_{1} + a_{1} \ x \ X_{1}^{3} + a_{2} \ x \ X_{1}^{3} \\ x \ X_{1}^{2} \ Y_{1} = a_{0} \ x \ X_{1}^{3} + a_{1} \ x \ X_{1}^{3} + a_{2} \ x \ X_{1}^{4} \\ x \ X_{1}^{2} \ Y_{1} = a_{0} \ x \ X_{1}^{3} + a_{1} \ x \ X_{1}^{3} + a_{2} \ x \ X_{1}^{4} \\ x \ X_{1}^{3} \ Y_{1} = a_{1} \ x \ X_{1}^{3} + a_{2} \ x \ X_{1}^{4} \\ x \ X_{1}^{3} \ Y_{1} = a_{1} \ x \ X_{1}^{3} + a_{2} \ x \ X_{1}^{4} \\ x \ Y_{1}^{3} = a_{1} \ x \ X_{1}^{4} \\ x \ Y_{1}^{4} = a_{1} \ x \ X_{1}^{4} \\ x \ Y_{1}^{4} = a_{1} \ x \ X_{1}^{4} \\ x \ Y_{1}^{4} = a_{1} \ x \ X_{1}^{4} \\ x \ Y_{1}^{4} = a_{1} \ x \ X_{1}^{4} \\ x \ Y_{1}^{4} = a_{1} \ x \ X_{1}^{4} \\ x \ Y_{1}^{4} = a_{1} \ x \ X_{1}^{4} \\ x \ Y_{1}^{4} = a_{1} \ x \ X_{1}^{4} \\ x \ Y_{1}^{4} = a_{1} \ x \ X_{1}^{4} \\ x \ Y_{1}^{4} = a_{1} \ x$$

मानस्थननातृत्तार X^z ने स्थान पर द्विषात समीनरण (13.37) में \sqrt{X} , $\log X$

या $\frac{1}{X}$ नाभी प्रयोग नर सनते हैं और फिर इस नासम्बन भी उत्तर नी मंति नर

सकते हैं।

यदि धन समीकृत्य

$$Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$$

का समजन करना हो हो जनर दी हुई विधि के समन्त a_0, a_1, a_2, a_3 के धार्यणन मान a_0, a_1, a_2, a_3 विनन प्रसायान्य समीकरणों तो उन करके शात कर सकते हैं ${}_1$

(13. 37) या (13 38) में दी हुई प्रसामान्य समीवरायों को इसी प्रकार हन कर सकते हैं जैसे कि बहुसमाध्ययम नमीकरण (multiple regression equation) के समजन में दिया गया है। इस विधि का वर्णन धागामी खण्ड में दिया गया है।

चतुर्घाती या धन्य उच्चतर घाती ममीकरण का समजन भी उपर्यक्त रीति से कर सकते हैं किन्तू बहुधा यह निश्चय करना कठिन हो जाता है कि समाध्ययण समीकरण एक थाती, दियाती, पन पाती या अन्य उच्च घात का सेना उचित है। इस बात का निर्णय करने में समाध्यण विश्तेषण सहायना करता है। असरण-विश्नेषण सारणी बनाकर एक धात, द्विपात, घन पात बादि पदो के समाययण युगाक और इन्ही से दिवलन के लिए माध्य वर्ग योग ज्ञात करके सार्यकता की परीक्षा कर सेते हैं। यदि यहाँ उच्च वाती पद की सार्यकता सिद्ध हो तो इनका यभित्राय है कि यधिक यात का समीकरण सेने से Y का बत्तम बागणक प्राप्त होता है। इसके विपरीत यदि निर्देक सिद्ध हो तो उच्च घाती पद का सम्मिलित करना लामप्रद नहीं है । किन्तु कभी-कभी ऐसी स्थिति भी उत्पन्त होती है कि दिवात पद के लिए परीक्षा द्वारा निरयंक परिचान प्राप्त हो. पर चन वाती यद के लिए सार्यकता सिद्ध होती है । ऐसी स्थिति में विधिष्ट रूप से कुछ कहना कठिन है । फिर भी व्यावहारिकता की हुटि से इस नियम का पालन किया जा सकता है कि यदि दो लवातार पदो के गुणाक निर्यंक सिद्ध हो तो उन्हें छोड़ देना चाहिये और उनसे निम्न बाह का समीकरण ही प्रामुक्ति के लिए पर्याप्त गृद्ध है । इस विश्लेषण की विधि का प्रयोग बहु समाध्यण रेला के समजन के समत्य हाता है केवल समजन में यह धन्तर होता है कि यहाँ चर के पदो X, X2, X3 ..., Xk को विभिन्त चरो X_1 , X_2 , X_3 ,... X_k के रूप मै प्रयोग करना होता है। बहुपद समीकरण के समजन के प्रति उदाहरण की वह समाध्यण रेला के समजन के निए उदाहरण द्वारा पाठक स्वय समझ सकते हैं।

संबक्तोणीय बहुपढ विधि द्वारा बहुधातीय समाध्यण समीकरणों का समंजन

यदि स्वतन्त्र वर X पर प्रेक्षण एक समान्तर लेगी मे हो ती लबकोगीय बहुयद विधि का प्रयोग किया जा सहता है। कार लग्ध मे देला गया है कि यदि उच्च मात का पर समीकरण मे बढ़ाना है तो फिर से प्रमानग्य समीकरणों की जात करना एवं हुत वरता होता है पर्णत् परि एक पात समीकरण का समवन कर तिया गया हो और पव किया समीकरण का ममवन कर तिया गया हो और पव किया गये समीकरण का ममवन कर तिया गया हो और पव किया गये परिकलन तथा मागणकों को प्रयोग नहीं कर सकते हैं। किन्तु लबकोगीय बहुयर विधि हारा उच्च कम के पद को समीकरण में, पिछले परिकलनों का प्रयोग करके मुगमना से बड़ा सकते हैं। यह ध्यान रहे कि स्वतन्त्र वर X के मानों मे समान फन्तर का प्रतिबन्ध स्वयन हों सो मानवान के प्रयोग गया है वर्डा सकते हैं। यह ध्यान रहे कि स्वतन्त्र वर X के मानों मे समान फन्तर का प्रतिबन्ध स्वयन हों सो प्रत्यन हैं। यह ध्यान कि स्वतंत्र एक न हो तो प्रन्तरात से माग देकर X का मकेतीकरण कर देना चाहिये।

माना कि चर X पर प्रेक्षण समान्तर श्रेगी में हैं जिनका यन्तराल एक है और सर-

कोणीय बहुपद रीति से बहुपद समीकरण

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + + \beta_k X^k$$
 (13.39)

का समजन करना है। तो समीकरण (13.39) को सदैव निश्न रूप में दिया जा सकता है —

$$Y = a_0 + a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + + a_k \phi_k$$
(13.39.1)

जहाँ α_p, (p == 0, 1, 2,...,K)

रियरांक हैं थौर नृ सबकोणीय बहुपद है।

इस बहुत्य समीकरण में गुणाक इस प्रकार चयन किये जाते हैं कि प्रतिदर्ग के प्र प्रेक्षणों के लिए,

इस स्थिति मे बहुपद 🛭 लबकोणीय कहुनाते हैं ।

माना कि a_p का धागणित मान a_p है थहाँ p=0, 1, 2,...,k

मत. मार्गामत बहुपद समीकरण निम्न हो जाता है :---

$$\tilde{Y} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k + a_k ... (1340)$$

उपर्युक्त सनीकरण में दिये गये स्थिपाको के मान निम्न सूत्रों द्वारा जात निये छ। सकते हैं.—

uht
$$a_j = X Y_1 \oint_{J} X \oint_{J}^{X} \dots (13.42)$$

 $j = 1, 2, 3, ..., k$

यह स्थान रहे कि $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n$ शखादि कमश्च एक पात, दो पात शखादि सदकोषीय बहुएशे को निरुपित करते हैं ।

मारं X के मान सम्रान्तर खेणी से हो बिनका समातर ! है और वर X का माध्य X है जो कि प्रतिनर्श परिमाण ≡ पर साम्रास्ति है तो ∳'ड सीर वर X में निम्न सम्बन्ध होते हैं:—

$$\begin{split} \phi_1 &= \lambda_1 \ (X - \overline{X} \) \\ \phi_2 &= \lambda_2 \left\{ (X - \overline{X})^2 - \frac{2}{18} \ (n^2 - 1) \right\} \\ \phi_3 &= \lambda_3 \left\{ (X - \overline{X})^3 - \frac{2}{18} \ (3n^2 - 7) \ (X - \overline{X}) \right\} \\ \phi_4 &= \lambda_4 \left\{ (X - \overline{X})^4 - \frac{1}{18} \ (3n^2 - 13) \ (X - \overline{X})^5 \right\} \\ &+ \pi_{\pi\pi}^2 \left(n^2 - 1 \right) \ (n^2 - 9) \end{split}$$

$$\phi_5 = \lambda_5 \left\{ (X - \overline{X})^5 - \frac{5}{18} (n^2 - 7) (X - \overline{X})^3 + \frac{1}{100} \pi (15n^4 - 230n^2 + 407) (X - \overline{X}) \right\}$$

 ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ... के मान X के वदी में नमीकरण (13 40) में रखने पर बहुपानीय समान्त्रपण समीकरण ज्ञात हा जाते हैं।

$$a_0$$
 ने नारण वर्ष योग= $a_0 \ge Y_0$

jदें घातीय पद के कारण वर्ग योग में कमी = a, (∑ Y, ♦,,)है ध

 ϕ , जोकि सदकोणीय बहुपद हैं इनके गुणाब धौर इनको मध्या प्रनिद्ध परिमाग n पर निर्मर करती है। यह नियम है कि n प्रनिद्ध प्रेक्षणों के रिण प्रवक्रोणीय बहुपदों की प्रिष्टिक्तम मध्या (n-1) है। स्पष्टत कियों n के मान के लिए (n-1) म ϕ_i 's की सध्या कम नी ही सकती है किन्तु प्रधिक नहीं हो सकती है।

विभिन्न प्रतिदर्श परिणामों को स्थिति म ϕ_3 , ϕ_2 , ϕ_3थादि वे मान, χ , ζ , के मान तथा Σ ϕ_1 ? के मान निम्न मारणी म दिये गये हैं।

जब कि λ' ऽ वह धवर मान है जो ॥ यर निर्भेर है अवन वयन इस प्रकार दिया जाता है कि के के मानो का सपने न्यूनतम पदो की पूर्ण सक्या में सधुकरण हो जाये।

(सारणी 13.2) ϕ_j , λ_j व ्रू ϕ_j ै के मार्ना की सारणी

1	n ≈ 3		1	n=4			1	1 ≔ 5	
	φ ₁	φ ₂	φ ₁	₫2	φ3	\$ 1	φ ⁸	ψ ₈	φ ₄
	-1	1	-3	1	-1	~2	2	-1	1
	0	-2	-1	~1	3	-1	-1	2	-4
	1	1	1	-1	-3	0	-2	0	6
			3	1	1	1	-1	-2	-4
						2	2	_ 1	1
λ's	1	3	2	1	10	1	t	\$	35
$\Sigma_i \phi_{ji}^2$	2	6	20	4	20	10	14	10	70

	*	7	23	-17	13	13	17	-23	7	F.5	2184
	**	-	-13	13	6	6	ñ	-13	7	-5	616,
n == 8	*r	1	45	7	n	ï	1	5	7	•"	264,
	*	-	~	5	5-	ņ	5	_	t -	-	168,
	*	-1	V 3	៊	ĩ	-	•	٧	۲	- 7	168,
	*	7	۳	473	0	47	7	-	_	122	e7 80
	4	-	-1	-	9	e4	-7	٣			154,
1=0	o,	7	-	-	0	-	ĩ	-		-2	٥
	÷.	~	0	er	4	។	0	8		-	84
	£	Ę.	7	ï	0	ı	84	۴		-	38,
	48	7	W	-10	0	Ş	-			en me	252
9 <i>≔</i> u	74	-	m	8	~	ñ	-			r H	28,
	→	3,	7	4	7	7	8				180, 28,
-	**	5	ī	7	7	7	'n				3. 2.
	4	'n	។	ĩ	-	т	to.			"	š,
				_				_			

उच्च पातीय बहुपदों 🔖 तथा n धन्य मानो ने तिए दी गयी सारणी को देखिये। उपर्युक्त विधि का प्रयोग निम्न उदाहरण में क्या गया है।

उदाहरण 13.6: यहूँ को छोटी क्सि S-307 की उपन, राम्यायिक छाद की बढती हुई मात्रा के प्रयुक्त करने पर निम्न पायी गयी ---

राहावनिक चाद की मादा (X) (क्वोटम बीत हैक्टर)	येहूँ की उपय (Y) (क्वीटब प्रति हैक्टर)
00	187
2 5	192
50	31 2
7 5	41 8
10 5	42 \$
12 5	40 4
150	38.2
17 5	37 0

इस न्यास मे अतुर्वेधात बहुबद समीकरण का सम्बन तथा बहुबातीय पदो की सार्यकता परीक्षा, दी हुई विधि के सनुसार इस प्रकार कर सकते हैं .—

यहाँ n=8 है और ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 , तक बहुगदों को लेना है। X के मानों को 2.5 से मान कर दें तो इनसे समातर 1 हो जाता है।

		8 . s	म स्केट	में के भरि	हताम के हैं।	गुसारको जवात≖	भैंड तथा बर्य-योगों के परिकान के हेतु सारको जब n=8 सारको (132) के भनुसार	के मनुसार		
	>	4"	*	*	₹	Y41	Y4,	Υφs	Y 4.	}
	18.7	1	7	1-1	7	-130 9	1309	-1309	1309	₹E7
	19 2	ş	-	89	2	0 96 -	19.2	0 9 6	-249 6	गश्चव
	31.5	។	ñ	,	8 1	- 94 5	- 94 5	220 5	- 94 5	ण सा
	£	7	ş	•	٥	- 42 8	-209 0	1254	3762	मान्य
	42.5	-	۳	r	٥	42.5	-212 5	-127 5	382 \$	विवेच
	404	6	ĩ	7	ñ	121 2	-121 2	-282 8	-1212	न तथ
	382	5	-	ñ	13.	1910	38.2	-1910	-496 6	ा गरि
	37.0	-	۲.	7	7	259 0	259 0	259 0	259 0	ग्तीय
1,7		7	-	2/3	21/12			1		फलन
χ ψ ³		168	168	264	919					,
£						250 5	-1899	- 313	1867	2

$$\begin{array}{l} x \ Y_1 = 269 \ 3, \ x \ (Y_1 - \overline{Y})^2 = x \ y_1^2 = 659 \cdot 16 \\ a_0 = \frac{269 \cdot 3}{8} = 33 \ 66 \\ a_1 = \frac{250 \cdot 5}{268 \cdot 6} = 1 \cdot 49 \\ a_2 = \frac{-189 \cdot 9}{168 \cdot 0} = -1 \cdot 13 \\ a_3 = \frac{-31 \cdot 3}{204} = -0 \cdot 118 \\ a_4 = \frac{186 \cdot 7}{616} = 0 \cdot 303 \\ A = \frac{33 \cdot 66 + 1 \cdot 49}{616} = 0 \cdot 303 \\ A = \frac{3}{204} = -0 \cdot 118 \\ a_4 = \frac{186 \cdot 7}{616} = 0 \cdot 303 \\ A = \frac{3}{204} = -0 \cdot 118 \cdot \frac{4}{3} + 0 \cdot 303 \cdot \frac{4}{4} \\ A_1 = \lambda_1 \ (X - \overline{X}) = 2 \ (X - \frac{1}{8}) = 2 \ (X - 3 \cdot 5) \\ A_2 = \lambda_2 \left\{ -(X - \overline{X})^2 - \frac{63}{12} \right\} \\ = 1 \left\{ -(X - \overline{X})^3 - \frac{63}{12} \right\} \\ = X^2 - 7 \cdot 0 \ X + 12 \cdot 25 - 5 \cdot 25 \\ = X^2 - 7 \cdot 0 \ X + 7 \cdot 0 \\ A_2 = \lambda_3 \left\{ -(X - \overline{X})^3 - (X - \overline{X}) \cdot \frac{3n^2 - 7}{20} \right\} \\ = \frac{2}{3} \left\{ -(X - 3 \cdot 5)^3 - (X - \overline{X}) \cdot \frac{185}{20} \right\} \\ = \frac{2}{3} \left\{ -(X - 3 \cdot 5)^3 - (X - 3 \cdot 5) \cdot \frac{185}{20} \right\} \\ = \frac{2}{3} \left\{ -(X - 3 \cdot 5)^3 - (X - 3 \cdot 5) \cdot \frac{185}{20} \right\} \\ = \frac{2}{3} \left\{ -(X - 3 \cdot 5)^3 - (X - 3 \cdot 5) \cdot \frac{185}{20} \right\} \\ = \frac{2}{3} \left\{ -(X - 3 \cdot 5)^3 - (X - 3 \cdot 5) \cdot \frac{185}{20} \right\} \\ = \frac{2}{3} \left\{ -(X - 3 \cdot 5)^3 - \frac{1}{3} \cdot (3n^2 - 13) \cdot (X - \overline{X})^2 + \frac{8}{16} \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 9) \right\} \\ A_4 = \lambda_4 \left\{ (X - \overline{X})^4 - \frac{1}{16} \cdot (3n^2 - 13) \cdot (X - \overline{X})^2 + \frac{8}{16} \cdot (3n^2 - 13) \cdot (X - \overline{X})^2 + \frac{8}{16} \cdot (3n^2 - 13) \cdot (X - \overline{X})^2 + \frac{8}{16} \cdot (3n^2 - 13) \cdot (X - \overline{X})^2 + \frac{8}{16} \cdot (3n^2 - 13) \cdot (X - \overline{X})^2 + \frac{8}{16} \cdot (3n^2 - 13) \cdot (X - \overline{X})^2 + \frac{8}{16} \cdot (3n^2 - 13) \cdot (X - \overline{X})^2 + \frac{8}{16} \cdot (3n^2 - 13) \cdot (X - \overline{X})^2 + \frac{8}{16} \cdot (3n^2 - 13) \cdot (X - \overline{X})^2 + \frac{8}{16} \cdot (3n^2 - 13) \cdot (X - \overline{X})^2 + \frac{8}{16} \cdot (3n^2 - 13) \cdot (X - \overline{X})^2 + \frac{8}{16} \cdot (3n^2 - 13) \cdot (3$$

 $=\frac{7}{18}\left\{ (X-35)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{18} \times 179(X-3.5)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{18} \times 63 \times 55 \right\}$

$$\begin{split} &= \frac{7}{18} \left\{ X^4 - 140 X^3 + 735 X^2 - 1715 X + 1500 \\ &- 128 \left(X^2 - 70 X + 1225 \right) + 1850 \right\} \\ &= \frac{7}{18} \left\{ X^4 - 140 X^3 + 607 X^2 - 819 X + 1176 \right\} \\ \mathring{Y} &= 3366 + 149 \times 2 \left(X - 35 \right) - 113 \left(X^2 - 70 X + 70 \right) \\ &- 0118 \times \frac{2}{8} \left(X^3 - 105 X^2 + 275 X - 105 \right) \\ &+ 0303 \times \frac{7}{18} \left(X^4 - 140 X^3 + 607 X^2 - 819 X + 1176 \right) \\ &= 18224 - 6149 X + 10425 X^2 - 25546 X^3 + 01768 X^4 \end{split}$$

मानीय पदो के कारण व॰ य॰ से कसी.

एक पात
$$= a_1 \pm (Y_1 \phi_{21}) = 377 245$$
दो पात $= a_2 \pm (Y_1 \phi_{21}) = 214 587$
दोन पात $= a_3 \pm (Y_1 \phi_{21}) = 3 693$
 $= a_4 \pm (Y_1 \phi_{21}) = 56 570$

हिप्पक्ती - X के किमी भी निश्चित मान के निए Y का धावणिन बात Y ज्ञान करते समय यह ज्यान रचना चाहिये कि X के इस जान की, X सावों के सन्नरात से भाग देकर ही सागणित बहुचातीय समीकरण ने प्रतिस्थापित करें सम्या Y का मान जुटि भुक्त होगा।

मानाकि X≕10 के लिए Y का बागणित सान, ¥ ज्ञान करना है सी

X=10 न सेक्ट
$$X = \frac{10}{2.5} = 4$$
 क्षेत्रा होगा जब $X = 4$ हो गो

यह भागनित मान X⇒10 के लिए Y ने प्रेक्षित मान ने नगभग नमान है।

बहुपातीय पदी श्री सार्यक्ता परीक्षा निम्न प्रमरण विश्वेतच्य मारणी हारा कर सकते हैं

विषरण लोत	स्वर्ग को ॰	হ০ য০	ঘা•ৰ•ৰ•	- भाग	a = 05 पर सारबीबढ F-मान
एकघात पद	1	377-245	377 245	160-19	
द्विघातीय पद	1	214 587	214 587	91 12	
चनवातीय पद	1	3 693	3.693	1 57	F ₁₃
चतुर्येघातीय पद	1	56 570	56 570	24 02	=10 13
समाश्रयण से विचलन	7 3	7 065	2 355		
कुल	7	659 16			

उर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि एक बात, डियात तथा बतुर्यवात के पद सार्यक हैं। यदि बाहें तो अग्य उच्च बात के पद यहां सिम्मिलत किये जा सकते हैं किन्तु प्रेक्षणों की सस्या कम होने के कारण धग्य उच्च पदों को सिम्मिलिड करना उचित नहीं है। बास्तव में तो समाध्यमण से विचलन को स्वतन्त्रता-चोटि 3 भी कम है किन्तु यहाँ हल को मिश्रिक जटिल न दिलाने के कारण केवल घाठ प्रेलण ही लिये गये हैं।

बहुसमाध्यण रेखा

ऐसा देला गमा है कि माधित चर (Y) का मान केवल एक स्वतन्त्र चर (X) पर निर्मर न होकर एक से माधिक स्वतन्त्र चरों

 $X_1, \ X_2, \ X_3, \ \ X_K$ (जहाँ K>1) पर निर्मेर होता है ।

इसका पर्य है कि समान्यण समीनरण का समजन दो या दो से प्रधिक्त करते की स्थिति में करना है । जैसे गेहूँ की उपज, खाद की मात्रा, पानी की मात्रा, तथा कीट-मार्गी की मात्रा प्रादि पर निर्मर करती है । यदि उपज तथा दन स्वतन्त्र करों में सम्बन्ध ज्ञात करना हो तो बहुसमान्ययण एक उचित विधि है । इसी प्रकार किसी फंन्ड्रों में एक उस्पादित वस्तु का मूक्त, कच्ची सामग्री के मूल्य, मजदूरी, पैक करने के खर्च, विज्ञापन स्थाप, परिवहन भाढा, मजीनों के मुख्य-ह्यास प्रादि पर निर्मर करता है । इस प्रचार की स्थितियों में बहुसमान्ययण रेखा के समजन डारा प्राधित्र कर व स्वतन्त्र करों से सम्बन्ध ज्ञात कर सकते हैं तथा इस प्रकार का समीनरण प्रायुक्ति के निष् प्रत्यन्त उपयोगी है । माना कि समग्र के निष् बहुसमान्ययण समीकरण

$$Y = \beta_0 + \beta_2 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_X X_X$$
 (13 43)

है। माना कि $oldsymbol{eta}_j$ का मागणक $oldsymbol{b}_j$ है जहाँ $j=1,\,2,\,3,\,....,\,k$ धौर धागणित समाश्रमण रेक्षा समीकरण,

$$\stackrel{\text{A}}{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + ... + b_K X_K \qquad (13 44)$$

है। माना कि n परिमाण के प्रतिदर्ज का चयन किया गया है सर्थोंन् प्रत्येक कर पर समत प्रेसणों की सहसा n है जो इन प्रेसणों के द्वारा प्राचलों b_0 , b_1 , b_2 ,, b_K के मान सात करना है।

 β_1 , β_2 , β_2 ,, β_K में ने प्रायेष नी प्रापित समाययण मुनान (Partial regression coefficient) कहते हैं। इन प्रापतों ने प्रायोगन मान b_0 , b_1 , b_2 , ..., b_K म्यूनतम वर्ग निध्य हारा ज्ञात करते हैं, इन विधि हारा प्रसामान्य समीवरण निम्न प्रकार प्राप्त कर सकते हैं।

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_0 - b_X X_{1i} - b_2 X_{2i} - ... - b_X X_{Ki})^*$$

का b₀, b₁, b₂, ..., b_द के सम्बन्ध में स्रांतिक घवकलन करके जून्य के समान रचने पर निम्न समीकरण प्राप्त होते हैं —

दत (K+1) प्रसामाग्य समीयरणों को हुण करके b_0 , b_1 , b_2 , ..., b_K के मात जात कर निष् जाते हैं और इनका समीवरण (13 44) में प्रनित्सपन करके सार्यापन सहुत्तामाध्यय समीवरण आत हो जाता है। किन्नु अपर्युत्त गमीवरणों को निरमन-प्रणामी (climination method) हारा हल करना, दो से सायक घर होने की स्थिति में, दुसंभ हो जाता है। पान-इन समीवरणों को सायहूर (Matrix) को सह्ययता से गुगमदा ने हम कर गकते हैं। (13 45) हारा दी हुई समीवरणों को सायहूर के कर में निम्न प्रकार निवास सकते हैं:—

यहाँ यह बात ध्यान देने योग्य है कि (13.45.1) में समीकरणी के दायी घोर के पदों को नायी घोर घौर नार्यी घोर के पदों को दायी घोर लिखा गया है।

यदि गुणाक आब्सूट को A से, समाध्यण गुणाव आब्सूट को B से भीर दासी भीर के प्राब्सूह को Y से निरूपित कर दें तो (13.451) को निम्न प्रकार निख सकते हैं :---

यहाँ A कात्रम $(K+1) \times (K+1)$, B का त्रम $(K+1) \times 1$ द Y का त्रम $(K+1) \times 1$ है।

समाध्यम गुणाको का परिकलन करने के हेतु इस समीकरण को इस प्रकार लिख सकते हैं:---

$$B = A^{-1} Y$$
 ...(13 45 3)

जबरि A⁻¹, A वा प्रतिलोब खाव्यूह है। A⁻¹ को दू-लिटिल या कीलकीय सवनन विधि द्वारा सरसता से क्षात वर सकते हैं। इन विधियों का वर्णन परिकारट-क में दिया दिया गया है। माना कि

$$A^{-1} = \begin{cases} c_0 & c_1 & c_3 \dots c_K \\ c_1 & c_{11} & c_{12} \dots c_{1K} \\ c_3 & c_{21} & c_{22} \dots c_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_K & c_{K_1} & c_{K_2} \dots c_{KK} \end{cases} \Rightarrow \{c\}$$

यतः समीकरण (13 45 3),

$$\begin{bmatrix} b_{0} \\ b_{1} \\ b_{2} \\ \vdots \\ b_{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{0} & c_{3} & c_{2} \dots c_{K} \\ c_{1} & c_{11} & c_{12} & c_{3K} \\ c_{2} & c_{51} & c_{22} & c_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{K} & c_{K1} & c_{K2} \dots c_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma Y_{i} \\ \Sigma X_{1i} Y_{i} \\ \Sigma X_{2i} Y_{i} \\ \vdots \\ \Sigma X_{K} Y_{i} \end{bmatrix} \dots (13 45 4)$$

समीकरण (13 45.4) द्वारा,

 $b_0 = c_0 \Sigma Y_1 + c_1 \Sigma X_{11} Y_1 + c_2 \Sigma X_{21} Y_1 + ... + c_K \Sigma X_{K_1} Y_1 (1346)$

चार
$$b_1 = c_1 \Sigma Y_1 + c_2 \Sigma X_{11} Y_1 + c_{12} \Sigma X_{21} Y_1 + \dots + c_{|K|} \Sigma X_{K} Y_1 \dots (1347)$$

जहां $j = 1, 2, 3, \dots K$

bo, b1, b2,, bK ने परिकलिन मानो का समीकरण (13.44) में प्रतिस्थापन करके

मार्गागत समाश्रमण समीकरण प्राप्त हो जाती है। इस समीकरण में स्वतन्त्र घरो

के प्रावर्थकर्तानुमार मान रलने पर Y का धार्गणित मान प्राप्त कर सिया जाता है।

पाय्यूह का अम बितना प्रांपक होता है उतना ही तकका प्रतिलोग जात करने में प्रिय परिश्रम करना होना है। यत यदि प्रत्येक कर के मानो का प्रतिरां माध्य से विकल ले लिया जाये तो $b_0 = \overline{Y}$ हो जाता है भीर धम्य K धांतिक समाध्रमण पुगांको को, $(K \times K)$ जम के धाय्यूह के प्रतिलोग की सहायता छे जात कर सकते हैं। इस प्रकार प्राम्यूह का जम कम हो जाता है धौर इस क्षिति में अर्थेक कर के लिए,

$$x_{ji} = X_{ji} - \overline{X}_{ji} \quad \text{wit} \quad y_{i} = Y_{i} - \overline{Y}$$

इस प्रकार साध्य से विषयन केने पर K सज्ञात b_j 's के निए (j=1,2,3,...,K) साध्यह समीकरण निम्न हो जाता है —

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z} \ \mathbf{x}_{11}^{2} & \mathbf{X} \ \mathbf{x}_{11} \ \mathbf{x}_{21} \ \dots \mathbf{X} \ \mathbf{x}_{21} \ \mathbf{x}_{K1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1} \\ \mathbf{b}_{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{K1} \ \mathbf{x}_{K1} & \mathbf{X} \ \mathbf{x}_{21} \ \mathbf{x}_{K1} & \mathbf{X} \ \mathbf{x}_{21} \ \mathbf{x}_{K1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1} \\ \mathbf{b}_{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \ \mathbf{x}_{1}^{2} \ \mathbf{y}_{1} \\ \vdots \ \mathbf{X} \ \mathbf{x}_{1}^{2} \ \mathbf{y}_{1} \\ \vdots \ \mathbf{X} \ \mathbf{x}_{1}^{2} \ \mathbf{y}_{1} \end{bmatrix} \dots (1348)$$

यदि b's के गुणांत का चितलोस सान्यूह (c_s) हैं तो b's के सात निम्न प्राम्यूह सम्बन्ध की सहायता से बाद किये जा सकते हैं।

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{31} & c_{32} & c_{13} ... c_{1K} \\ c_{31} & c_{22} & c_{33} ... c_{2K} \\ \vdots \\ c_{K1} & c_{K2} & c_{K2} ... c_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{x}_{31} & \mathbf{y}_t \\ \mathbf{X} & \mathbf{x}_{21} & \mathbf{y}_t \\ \vdots \\ \mathbf{X} & \mathbf{x}_{K1} & \mathbf{y}_t \end{bmatrix} (1349)$$

उपर्यक्त सम्बन्ध द्वारा,

$$b_j = c_n \times x_{i1} y_i + c_{i2} \times x_{i2} y_i + ... + c_{i1} \times x_{i2} y_i$$
 ... (13 50)
 $\text{sign}_{i} = 1, 2, 3, ..., K$
 $\text{sign}_{i} = 1, 2, 3, ..., n$

 b_0 तथा b's के आगणित सानों का प्रतिस्थापन करने पर बहुममाश्रयक समीकरण निम्न रूप में प्राप्त हो बाता है \longrightarrow

$$\overset{\bullet}{Y} = Y + b_1 (X_1 - \overline{X}_1) + b_2 (X_2 - \overline{X}_2) + + b_4 (X_4 - \overline{X}_4)$$
....(1351)

इस समीकरण को हल करने पर,

$$\overset{A}{Y} = (Y - b_1 \ \overline{X}_1 - b_2 \ \overline{X}_2 - \dots - b_K \overline{X}_K) + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_K X_K$$

$$\dots (13.51.1)$$

यहाँ

$$b_0 = \overline{Y} - (b_1 \overline{X}_1 + b_2 \overline{X}_2 + \dots + b_K \overline{X}_K)$$

समीकरण (13.44) भीर (13.51.1) एक समान हैं।

श्रांशिक समाध्यण गुणांक

परिभाषा: यह आधित चर Y मे अनुसानित परिवर्तन की सावा है जो कि स्वतन्त्र चर X का इचाई मान बढ़ाने से होता है जबकि प्रत्य स्वतन्त्र चरों से बोई परिवर्तन न किया गया हो । प्राय β_1 , β_2 आर्थ को $\beta_{Y_1, 23}$ ϵ , $\beta_{Y_2, 134}$ ϵ आर्थ के रूप में भी लिसते हैं। इस प्रचार का निरुपण स्वय बताता है कि किस पर X का Y के प्रति साधिक समाध्ययण शुणाक है। किन्तु लिसने से मुण्य न होने के कारण स्यावहारिक इंटिट से यह अच्छा निरुपण नहीं है। अत इन्हें केवल β_1 , β_2 ... आदि में ही निरुपण करते हैं और प्रत्य वातों को स्वय ही ध्यान में रक्षा जाता है।

समाध्यण से विचलन का माध्य वर्ग-योग

इस माध्य धर्म-थोग को S2 123 --- ह से निरुपित करते हैं शीर

$$S^{2}_{Y 123...K} = \frac{\sum_{i} (Y_{i} - \hat{Y}_{i})^{2}}{(n - K - 1)}$$
(13 52)

দান<u>া</u>কি,

$$\begin{aligned} y_i &= \left(\begin{array}{ccc} Y_i - \overleftarrow{Y} \end{array} \right) & \text{ शोर } & x_{j_i} &= \left(\begin{array}{ccc} X_{j_i} & - \overleftarrow{X}_i \end{array} \right) \\ \forall \xi^{\frac{1}{2}} & j &= 1, 2, 3,, K \end{aligned}$$

मोर 1=1, 2, 3, ..., a

यहाँ

$$\Sigma (Y_1 - Y_1)^2 = \Sigma y_1^2 - R^2 \Sigma y_1^2$$
(13 53)

है। जब वि R² X y₂ समाध्ययण बगे-योग है और गणितीय रूप से इसका मान इस प्रकार होता है:---

$$\begin{cases} & \in \mathbb{R}^2 \times y_1^2 = b_1 \times x_{1l} y_1 + b_2 \times x_{2l} y_1 + \dots + b_K \times x_{Kl} y_1 & \dots & (1354) \end{cases}$$

शतः (13.53) में Σy_1^2 व $R^2 \Sigma y_1^2$ के भानों का प्रतिस्थापन करने पर $\Sigma (Y_1 - \overset{A}{Y}_1)^2$ वर मान ज्ञान हो जाता है। $\Sigma (Y_1 - \overset{A}{Y}_1)^2$ का प्रयोग करके

(13 52) द्वारा S²Y 123 K ना मान ज्ञान हो जाता है।

यदि एक प्रागणित समाध्यण गुणाक b; की मानक त्रुटि जात करना हो तो

जबिन S^2_{Y} 123....K का मान शून (13 52) के धनुसार है धौर C_{jj} , प्रतिसोम प्राम्यूह में (j, j) कें नोस्टिका का धश है। s^2_{bj} का वर्षमूल सेवर मानक विषयत s_{bj} ज्ञान हो जाता है।

दो प्रांतिक समाध्यण गुणावों ने धन्तर (b_j-b_l) , जबकि $j\ne l$, की प्रांतक कृति s (b_j-b_l) जान करने ने लिए,

$$\epsilon^{2}(b) - bl) = S^{2}Y_{123...K} (C_{jj} + C_{il} - 2 C_{jl})...(1356)$$

$$= \pi_{ij}, j = 1, 2, 3,..., K$$

 ξ । मही मन्य सभी सकेतन पूर्व की जीति ξ । C_g , C_u , C_g के सन्त, अतिसोम मास्पूर्द के सनुनार प्रतिक्थापित कर दिये जाते ξ ।

भागणित धाभित चर \hat{Y} की मानक त्रुटि

माना वि $\stackrel{\wedge}{Y}$ वी सानक चृटि $^{\circ}_{y}$ है जबकि $\stackrel{\wedge}{Y}$, $^{\mu}_{\{Y/X_0\}}$ का सायधित सान है और X_0 का निक्कित सान

$$X_0 = (X_{01}, X_{02}, X_{03} ..., X_{0k})$$

$$\therefore S_{\hat{Y}}^{z} = S_{y}^{z} \underset{123 \dots K}{1.123 \dots K} \left\{ \frac{1}{n} + \sum_{j=1}^{k} C_{ij} (X_{0i} - \bar{X}_{j})^{s} + 2 \sum_{j=1}^{k} C_{ji} (X_{0i} - \bar{X}_{j}) \right\} \dots (13.57)$$

 $\mu_{(Y/X_0)}^{\mu}$ की 100 (1- α) श्रविकार विकास्यका सीमाएँ विभ्न सूत्र हारा ज्ञात की

वा तकती हैं .---

(जर् U प्रपरि मीमा व L-निम्न भीमा है)

 S_A का मान (13.57) डास प्राप्त S^a_A का वर्गभूत से तर शान हो जाना है। Y Y t_0 , (n-k-1) , a साक तक व $\{a-k-1\}$ स्व को के तिल् सारणीयंक्र मान है।

ग्रांशिक समाश्रवण गुर्णाकों व दो गुणांकों में ग्रन्तर की सार्थकता-परीक्षा

परिकल्पना $H_0:\beta_j{=}0$ की \dot{H}_1 $\beta_j{\neq}0$ के विरुद्ध परीक्षा, प्रतिदर्शन t द्वारा कर सकते हैं जो कि निम्न प्रकार है —

$$t_{n-k-1} = b_i/s_{bi}$$
 ..., (13 59)

जहाँ b,, B, का भागणक है और sol, b, का मानक विचलन है।

यदि $t>t_{\alpha,\;(n-k-1)}$ हो तो H_o को अस्त्वीकार कर दिया जाता है जिसका अर्थ है कि B_0 सार्थक है कोर इससे विकास स्वित से H_o को स्वीकार कर लिया जाता है

है कि β_1 सार्थक है मौर_इससे यिपरीत स्थिति में \mathbb{H}_0 को स्वीकार कर लिया जाता है स्वयांत् β_1 निर्पेक है। β_1 के सार्थक तिद्ध होने का प्रमिग्राय है कि चर X_1 का समीकरण में जोडा जाना लामप्रद हे और निर्यंक होने पर X_1 का स्नाध्यित चर-मर व्यावहारिक हिन्द से कोई प्रमाय नहीं है।

यदि पिकल्पना $\mathbf{H_0}$ $\boldsymbol{\beta_i} {=} \boldsymbol{\beta_i}$ की $\mathbf{H_1}$ $\boldsymbol{\beta_i} {\neq} \boldsymbol{\beta_i}$ के विरुद्ध परीक्षा करनी है तो प्रतिदर्शन,

$$t_{n-k-1} \approx \frac{b_i - b_1}{s_{\{b_j-b_1\}}}$$
(13.60)

यहाँ b_1 व b_1 गुणानो β_2 व β_1 के कमका झागणन हैं और (b_1-b_1) की मानन शुदि, सूत्र (12.56) द्वारा परिकलित नी जाती है। यहने नी मौति α मा \bullet स्त \bullet पर H_0 की परीक्षा करके समानता के प्रति निष्कर्ष निकाल लिए जाते हैं।

विश्वास्थता सीमाएँ

 β_{\parallel} व $(\beta_{\parallel} \sim \beta_{\parallel})$ की $100 \; (1-\alpha)$ प्रतिशत विश्वास्थता सीमाएँ क्रमशः निस्न भूत्रों की सहायका से शांत कर सकते हैं —

$$\begin{bmatrix} U \\ L \end{bmatrix} = b_1 \pm s_{b_1} t_{\sigma, (n-k-1)}$$
 (1361)

भौर

$$\begin{bmatrix} U \\ f_{-} \end{bmatrix} = (b_{f} - b_{i}) \pm s_{(b_{f} - b_{i})} \times t_{\alpha, (n-k-1)} \dots (1362)$$

इन सूत्रों में प्रयोगगत सनेतन सब पहले दिये जा चुने हैं।

रेखिक बह समाध्यमण की स्थिति में प्रसरण-विश्लेषण

यदि रेखिक बहुसमाश्रयण समीकरण में (k+1) प्राचन है अर्थात् चर y_k स्वतन्त्र चरो पर माश्रित है और β_1 , β_2 , β_3 , . . β_1 , k ब्राधिक समाश्रयण गुणाक है तो H_0 $\beta_1=0$, 1=1, 2, 3, ... k की, H_1 कम से कम एन β_1 श्रूष्य नही है के विरुद्ध परोक्षा, प्रसर्ण-विश्लेषण द्वारा निन्न प्रकार कर सकते हैं —

(सारची 13-3) प्रसरच विश्लेषच सारची

विभरण स्त्रोत	स्य= को=	य • य •	মা≎ ব≎ ব≎	F-मान
समाश्रयण के कारण	k	R2 X Y,1	R ² ∑ y _i ² /k	$\frac{\mathbb{R}^2 \sum y/k}{(1-\mathbb{R}^2) \sum y_i^2/}$
समाश्रयण से विचलन	(n-k-1)	Σy ₁ 2−R ² Σy ₁ 2 ι ι	(1-R ²) \(\times y_i^2\) 1 n-k-1	
कुस	(n-1)	∑ y₁2 1		

यदि F का परिश्वित मान, α सा॰ स्त॰ व $\{k, (\alpha-k-1)\}$ स्व॰ को॰ के लिए F के लारणीवढ मान में प्रधिक हो तो साधिय समाध्यम्य पुत्रांका की सूम्य होने के प्रति परिकल्पना H_0 को अस्तीकार कर दिया जाता है किया प्रधिमाय है कि बहुसमाध्यम्य का सेना उपित है। इसना अर्थ है कि बहुसमाध्यम्य हमा अर्थना उपित है। इसना अर्थ है कि बहुसमाध्यम्य हमा अर्थना उपित करती गयी है। यदि परिकलित हम हमा मान सारणीवढ F—मान से कम हो तो बहुसमाध्यम्य देशा का निया जाना जवित नहीं है।

चडाहरण 137 एक लक्षणिक सर्वेक्षण द्वारा पन्द्रहवर्ष की घासुके लक्की के गारीरिक भारतिया चार सुख्य भागुके मात्र निम्न प्रकार थे —

कम संदर्भ	धार (हिलोग्राम) (Y)	र्वशई (व∗ गी∗) (X ₂)	बैठन जैनाई (तें॰ मी॰) (X ₂)	डिर की परिवि (डें+ मी <i>+</i>) (X ₃)	হীব কা কাণ্ড (বঁও চীও) (Xg)
1	36 \$	1610	73 5	52 0	69 0
2.	40 5	1510	79 0	53 0	72 5
3	27 1	1430	68 0	52 \$	64 0
4	33 2	1440	650	52 0	67 0
5	36 D	155 5	73 0	54 0	68 0
6	28 5	133 0	670	510	630
7	38 0	1520	71 0	52 S	73 0
8	380	159 5	76 0	54 6	68 U
9	29 D	143 0	74 0	51.0	63 5

310	₹	गरियको के	सिद्धान्त मौ	र धनुप्रयोग	
10	34 0	152 0	72 0	53 0	68 D
11	39 0	1600	76 0	53 D	68 0
12	40 0	1555	770	54 0	71 0
13	41 0	149 5	750	52 0	70 D
14	29 0	1420	80 0	52 5	62 5
15	310	148 0	78 0	52 0	63 0
16.	36 D	158 0	78 D	53 0	660
17	48 0	163 0	76 0	54 5	77 0
18	300	139 D	70 0	53 0	64 0
19	32 0	147 0	700	52 0	67 D
20	42 5	164 0	74 0	54 5	70 0
योग	709 O	3020 0	1472 4	1056 1	1354 5
माध्य मान	35 46	151 00	73 62	52 80	67 78

सारणी में दिये गये न्यास के लिए,

(1) बहुसमाश्रयण रेखा समीकरण

$$Y\!\approx\!b_0\!+\!b_1\,X_1\,\dot{\vdash}\,b_2\,X_3\!+\!b_3\,X_2\!+\!b_4\,X_6$$
 का समजज,

 $\{n\}$

$$X_1=160, X_2=76, X_3=33, X_4=68,$$

 $X_1=160, X_2=76, X_3=33, X_4=68,$
 $X_1=160, X_2=76, X_3=33, X_4=68,$

- (ш) माशिर समाध्यम गुगाक β1 की सार्यकता-परीक्षा,
- (IV) परिकल्पना H₀ . β2=β3 की परीक्षा
- .(v) 84 के लिए विश्वस्थिता सीमाएँ,

उपर्युक्त समाश्रयण नेवा के लिए प्रसरण विश्लेषण, निम्न प्रकार कर सकते हैं --

बहसमाध्यम रेखा का समजन करने के लिए सबसे पहले निम्न सस्याधी की जात करना होता है । यहाँ छोटे बसर ४, у माध्य से विचलन को निरूपित करते हैं ।

$$\sum x_{2i}^2 = 141100,$$
 $\sum x_{2i} x_{2i} = 319'50$
 $\sum x_{2i}^2 = 32444,$ $\sum x_{1i} x_{2i} = 125'60$
 $\sum x_{2i}^2 = 2205,$ $\sum x_{1i} x_{2i} = 42700$

क्द न्याद हों। दो। चन्द्रश्ती हवा हों। ए। यूमा बेन, रवोग्द्र नाव टेरोर, बार्ज्यहान महादिष्टासम, दरपुर के शीकन्य से बाप्त हुवा।

$\sum x_{di}^2 = 281 24$	x x _{2i} x _{3i} = 30 7	14
$\Sigma x_{ii} y_i = 735 80,$	x x ₂₁ x ₄₁ = 99 9	4
$x_{2i} y_i = 17634$	X x ₃₁ x ₆₁ == 43 8	8
$\sum x_{3i} y_i = 7511$,	$x_i y_i^2 = 5851$	3
$x_{i1} y_{i} \approx 36971$		

परो x2, x2, x2 वे वर्गो तबा ्लना क योग द्वारा प्राप्त श्राय्यूह A निम्न है,

	1411 00	319 50	125 60	427-00]
A ==	319 50	324 44	30 74	99 94
	125 60	30 74	22 05	43 68
	427 00	99 94	43 68	281 24

	A দ্বা	ম তিভী	म् मकीस	कीय	म् घः	तन वि	ਬਿ (परि	शप्ट-।	7) 2	ारा वि	ाम १	41	₹ 8	ŧ -	-
141	1 00	319	50	125	60	4:	27 0	0		1	0		0		D	
31	9 50	324	44	30	74	!	99 9	4		0	1		Đ		0	
12	5 60	30	74	22	05	4	43 68	3		0	0		1		0	
42	7 00	99	94	43	60	21	B1 24	1		0	ō		ō		1	
1		2264		089	0		302	6	00	070	87	0		0	0	
0	252	1032	2	304	5	3	259	3	- 22	64		1		0	0	
ø	2	3042	10	871	6	5	673	4	F 08	90		0		1	0	
0	3	2672	5	677	0	152	029	8	- 30	26		0		0	1	
		ı	00	1914			012	93	- 00	0898	3	003	96	6	ā	0
		0	10-85	054		5	643	б	-080	59	-	009	13	8	1	ō
		n	5 64	71		151	986	6	-299	7	-	012	96		0	1

312	2		मास्यि	की के	নিত্র	न्त म	रि मनु	प्रयो
0	-	006709		0	0	0	006709	
09216	- 5204	- 003491		0	0	09216	~ 003491	

- 003489 .006709

-00349109398

~ 000035 ~ 000813

- 007113 - 001707

~ 000825

008176

-000842

~ 000898 003974

000912

2997

08693

- 001707

100800 -

.5201

31:	2		मास्यि	की के	নিত্র	न्त म	र मनुः	न्योग
0	-	006709		0	Đ	0	006700	٥
09216	- 5204	- 003491		0	0	09216	~ 003491	Ð

003966 ~ 000842 ~ 000035

~ 000898

01293

009141

0007087

3026

0830

2264

- 008205

- 2545

-00842

100800 -

·520f 149 0495 - 000053

- 001707

मीममीय गरितमों मी फिर से तिष्यम् उगरि भिष्युत्र के धभाँ मी सून्य मर (इया) धग प्रनार प्राप्त बाधी धीर ना बाब्यूह, A-1 नो जिल्लीन नरना है।

-		•	2997	00153	- 000827	- 008170	- 0003032
	-	•	0	- 000811	003974	- 0008135	- 0000548
•	0	-	0	- 007113	- 000813	\$65.60	- 003489
•	0	0	F	- 001101	- 000055	- 003491	602900
-		,	0	002041	- 000811	- 007124	- 001707
	-	0	•	- 000811	0008135	- 0008135	- 6000348
0	D	~	0	- 007113	- 000813	86660	- 003489
0	0	•		- 001107	- 000085	- 003491	604900
}		-				N-1	

दावी धोर का धाब्यूह A⁻¹ लगाग समित है बोडा जो धन्तर पीवर्वें दामलव में है वह परिकतन ने नारण है। यदि पाठक चाहें तो यह पुष्टि नर सनते हैं नि

मत A^{-1} का प्रयोग करके b_s ', s ने मान (13 50) को सहायदा से निम्न हैं — b_1 = (002041) (735 80) + (-000811) (176 34) + (-007124) (75 11) + (-001707) (369 71)

=1 5018 - 1430 - 5351 - 6311

=01926

b₂=(- 000811) (735 80)+(003974) (176 34)+(- 0008135) {7511}+(- 0000548) (396 71)

= 0227

इसी प्रकार

$$b_3 = -8984$$

यौर b₄= 9525

(13 50) के बनुसार, बहुसमाखयण रेखा समीकरण,

$$\mathring{Y}$$
=35 46+ 1926 (X₁-151 00) + 0227 (X₂-73 62)
- 8984 (X₃-52 80) + 9525 (X₄-67 78)

$$\dot{X} = -124187 + 1926 X_1 + 0227 X_2 - 8984 X_3 + 9525 X_4$$

(n) उपर्युक्त सागणित समीकरण मे $X_1 = 160, X_2 = 76, X_3 = 53, X_4 = 68$ रखने पर Y का भागणित मान $X_1 = 160, X_2 = 76, X_3 = 53, X_4 = 68$

=37 2773

महाँ यह बात घ्यान देने योग्य है कि प्रश्न म, 11 वें प्रेक्षण म दिये हुए X's के इन मानो के सिए Y का प्रेक्षित मान 39 0 है जो कि धार्मणित मान से धरिक मिन्न नहीं है।

(μ) सूत्र (13 53) की सहायता से $\sum_{i} (Y_{i} - \hat{Y}_{i})^{2}$ का मान ज्ञात करने के लिए (13 54) के स्रदूसार,

$$R^{2} \times Y_{i}^{2} \Rightarrow (1926) (73580) + (0227) (17634)$$

$$- (8984) (7511) + (9525) (39671)$$

$$= 299844$$

$$\times (Y_{i} - Y_{i})^{2} \Rightarrow 58513 - 299844$$

$$= 2852856$$

$$s^{2} y - 1234 = \frac{2852856}{(20 - 4 - 1)}$$

$$= 190190$$

$$\pi = (1355) \Rightarrow \pi_{3}\pi_{1} = s^{3} Y_{1234} \times C_{21}$$

$$= 190190 \times 002041$$

H₀ β₁=0

की H₁ · β₁≠0 के विश्व परीक्षा के लिए (13 59) के धनुगार, प्रतिदर्शन

== 038818 == 0 197

5 प्रतिज्ञत सार्वेचता स्तर भीर 15 स्व॰ को॰ के लिए सारणी (परि॰ च-3) शारा t=2 131 है।

को कि परिकासित । से प्रधित है बत H_0 को स्वीकार कर निया जाना है। इसका प्रभिन्नास है कि β_1 निर्देश है।

(iv) परितरमना $H_0: B_0 = B_0$ की $H_0: B_0 \neq B_0$ के विश्व मापनना परीक्षा मूत्र (13 60) के द्वारा कर सकते हैं। मूत्र (13 56) की महायना म,

(15 sb)
$$+ sta + (cora graph (15 sb) + sta gr$$

$$t = \frac{0.0227 - (-8984)}{1.376}$$

$$= 6738$$

सारणी (परि॰ प-3) द्वारा $t_{0515} = 2131$ है जोिंक t के परिकतित मान से प्रधिक है घत परिकल्पना H_0 को स्वीकार कर सिया जाता है प्रपीत् β_2 पीर β_3 में प्रन्तर सार्थक नहीं है।

(v) β को 95 प्रतिशत विश्वास्थता सीमाएँ ज्ञात करने के लिए,

$$s_{b4}^2 = s_y^2 \cdot s_{b4} \cdot C_{44}$$

= 19 0190 × 006709
= 127598
 $s_{b4} = 3572$

सूत्र (13 61) के धनुसार,

धतः है, की उपरि सीमा U=1 7137 और निम्न सीमा L= 1913 है।

(vi) रैकिक बहुसमाध्यम के लिए प्रसरण-विस्तेवण सारणी

दिवरव-स्रोत	स्य॰ को॰	द० य०	मा॰द॰य॰	F-बाव
समाध्ययण के कारण समाध्ययण से	4	299 844	74 96	74 96 19 02 =3 94
विचलन विचलन	15	285 286	19 02	
हुत	19	585 13		

उपर्युक्त विस्तिवन, सारणी (13.3) के धनुसार किया गया है।

α = 05 और (4, 15) स्व॰ को॰ पर F का सारणी (परि॰ फ-52) द्वारा मान 3 06 है जो कि परिकलित F से कम है। यत F-परीक्षा द्वारा बहुसमाध्रयण की सार्वकता सिद्ध होती है। यह इस बात की पुष्टि करता है कि प्राधित घर का इन स्वतन्त्र चरों द्वारा पर्याप्त सुद्ध भागन किया गया है।

वो स्वतन्त्र चर होने पर समाध्यण रेखा का समंजन

माना कि रैलिक बहुसमाध्यण समीकरण

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$
 (13 63)

यदि
$$x_{2i} \Rightarrow X_{2i} - \overline{X}_2$$
, $x_{2i} \Rightarrow X_{2i} - \overline{X}_2$ $v_i = Y_i - \overline{Y}$ मानतें क्षो,

$$b_0 = \overline{Y} \qquad ...(1364)$$

$$b_{1} = \frac{\left(\sum x_{21}^{2}\right)\left(\sum x_{21} y_{1}\right) - \left(\sum x_{11} x_{21}\right)\left(\sum x_{21} y_{1}\right)}{\left(\sum x_{21}^{2}\right)\left(\sum x_{21}^{2}\right) - \left(\sum x_{11} x_{21}\right)^{2}} ...(1365)$$

$$b_{2} = \frac{(\sum x_{1}^{2})(\sum x_{2}, y_{i}) - (\sum x_{1}, x_{2})(\sum x_{1}, y_{i})}{(\sum x_{1}^{2})(\sum x_{2}^{2}) - (\sum x_{1}, x_{2})^{2}} ... (13.66)$$

b_o, b₁, b₂ के परिकसित मानों को निम्न सम्मेक्टण (1367) म प्रनित्पापित करने पर मागणित समाध्यण रेक्षा,

$$\hat{Y} = \overline{Y} + b_1 (X_1 - \overline{X}_1) + b_2 (X_2 - \overline{X}_2)$$
 (13 67)

जात हो जाती है।

जबाहरम 13.8 वेहूँ की छ किस्मो की उपन तथा इसके दो सपटको सम्बन्धी स्यास निम्न सारणी ने दिया गया है —

वेहें की रिस्म	मेट्टे की क्लब (निरम प्रति क्षेत्रर) (Y)	नुषे को बाता (विकास प्रान हेरगा)	तूची (Spikes) बी प्रीय वर्त-मोहब संस्था
	(1)	(X ₁)	(X ₂)
ग ल्यान सोनारा	58 22	82 21	419
मोनातिका	58 71	79 50	402
एम+ 331	57 02	94 35	544
मू॰ पी॰ ∄0 ।	55 78	85 61	433
€• π• 222-1	35 62	78 05	589
एम • डी • 1941	63 68	79 09	519

इस न्याम में रैंकिक बहुसमाध्ययण समीकरण का समजन निम्न प्रकार कर सक्ते हैं — $\mathbb{Z} Y_1 = 329~03$, $\mathbb{Z} y_1^2 = 479~60$ $\mathbb{Z} X_{11} = 498~81$ $\mathbb{Z} x_{11}^2 = 188~20$

 $\Sigma X_{si} = 290600 \qquad \Sigma X_{si}^2 = 2939934$

2 X₂₁ = 2900 00 2 X₂₁ = 29399 34

 $x_{11} y_1 = 17155$, $x_{21} y_1 = -216287$ $x_{11} x_{01} = 22937$

 $\overline{Y} = 54 838$, $\overline{X}_1 = 83 135$, $\overline{X}_2 = 484 333$

सूत्रो (13 65) व (13 66) की सहायता से,

$$b_1 = \frac{(29399\ 34)(171\ 55) - (229\ 37)(-2162\ 87)}{(188\ 20)(29399\ 34) - (229\ 37)^2}$$

 $=\frac{55395542689}{54803451911}$

= 1011

$$b_2 = \frac{(18820)(-216287) - (22937)(17155)}{(18820)(2939934) - (22937)^2}$$

-446400 5575 5480345·1911

→ 0 08145

(13 67) के प्रमुसार रैखिक बहुसमाश्रयण समीकरण,

$$^{\Lambda}_{Y=54838+1011}(X_2-83135)-008145(X_3-484\cdot33)$$

 $\hat{Y} = 10238 + 1011 X_1 - 008145 X_2$

यदि $X_1 = 80$, $X_2 = 500$ के लिए Y के मान का भागणन करना है जो.

$$\mathring{Y} = 10\ 238 + (1\ 011)(80) - (0\ 08145)(500)$$

= 50\ 393

प्रश्नावली

- निम्न की परिभाषा दीजिय 🗝
 - (क) समाश्यण मुखाक
 - (ख) ब्राजिक समाध्यण मुणान

- एक सभाध्यण रेका का समजन किम निद्धान्त पर भाषारित है ? इस निद्धान्त का समक्ति वर्णन भी दीजिये।
- 3 कारण बताइय कि चर Y का X पर समाध्ययण वह क्यो नहीं होता है जो X भा चर Y पर होता है।
- 4 निम्न म्यास ने तिए सरल समाध्यम रेखाओं को जात की उर्व --

X ≕ 62 के मान के लिए Y का चागणन भी की जिये।

(बाई• ए॰ एन•, 1954)

5 समाध्यण से झाप वया समझने हैं? साधारणनवा दो समाध्यण देवाएँ क्या होती हैं? ये रेलाएँ कब सपाती (Coincident) होती हैं? एक धार्थिक ध्रध्ययन में समाध्यण समीकरण के प्रदोग का वर्णन कीजिये।

(एस॰ कॉम॰, बाबई, 1964)

6 एक प्रातु के प्रतिवस्तों की कठोरता (X) धरेर तनाव-सामर्थ्य (Y) कि ही
निविधत इकाइयों में निकन विधे हुए हैं —

х. 146 152 158 164 170 176 182 Y 75 78 77 79 82 8.5 86

Y की X पर समाध्यण रेला ज्ञात की जिये।

(माई॰ सी॰ बबल्यू॰ए॰, 1969)

[उत्तर \hat{Y} = 031 X+2946] 7. बस्बई के स्टॉक्स्य्वस्थेन्द पर 12 स्टॉक्स के एक निवन्त दिन के बद सून्य (X)

 सम्बद्ध क स्टाक-प्रमाणक पर १८ स्टावन पर निमन पर प्रमाणक पर १८ पर । इत प्रीत हजार केवरों से दिनी (Y) के अति निमन परिवस्त किये गये। इत परिक्तनों की सहायना से समायवण रेकाएँ जान कीविय ।

(बी॰ ए॰ (धॉनमें) दिन्दी, 1971

- श. यदि दो घर Y और X है जिनमें Y, घर X पर आश्रित है तो बताइये कि सम्बक्तीणीय बहुपद विधि द्वारा एक बहुपद समाश्रमण समीकरण का समंत्रन करने के क्या नाम है? यह बताइये कि निस्त स्थिति में सम्बक्तीणीय बहुपद विधि का अयोग करना सुगम है?
- एक प्रयोग में सर्व गेहूँ (dwarf wheat) की एक क्सिम, सोनास-64 (Sonara-64) की उपन नाइट्रोजन की विनिध्न मात्रामों पर निम्न प्रकार मी:---

नास्ट्रोजन की साखा (विक्री प्रति हेक्टर)	देई की उपस (विषटत ब्रीट हेस्टर)
 0	17 84
40	26.90
80	44.57
120	51-63
160	52-61
200	53-89

इस न्यास में एक धन पानीय बहुपद समीकरण का समजन कीजिये और रैसिक द्विपात के धनपात पद्रों की सार्यकता की विदेशा कीजिये।

10. एक प्रयोग में लिए गये मुख बखदों की आयु (X) तथा तबबुतार भार (Y) किम्म सारणी में दिये गये हैं जबकि इन बखदों को सदैव एक से मोजन पर ही रखा गया:—

बायु						
(महीनो मे):	0.5,	1-0,	1-5,	2.0,	2.5,	
	3 0,	3.5,	40,	4-5,	50	
	5.2	6-0				
भार						
(किलोधाम मे):	250,	29 0,	33 3,	38 7,	44.8	
	51-0	58-5,	66-7	76-3	86.7	
	948,	103-5				

- (ı) Y की X पर समाध्यण रेखा का समजन की जिये।
- (ii) समाध्यण द्वान नी सार्यनता-परीक्षा कीजिये।

- (iii) समाख्यम युगांक β₁₀₀ की 99 प्रतिगत विश्वास्थला सीमाई ज्ञात कीविये।
- (IV) समाध्यण रेला को बाफ पैपर पर बालैलिन की जिये :
- ग्राम्य प्रमान के अन्तर्गत K₂O की विभिन्न मात्राओं पर करद (Tuber) की उपन निस्ताप्रकार की —

K₂O की माता (दिनो॰ प्रति हैनटर)	कम्द की दशम (तिरतम गति हैक्टर)	
0	221	
25	251	
50	265	
75	275	
100	291	
125	262	
150	242	

- (।) इस न्यास से एवं डिमान समीवरण का समवद की विये।
 - (ii) रैक्टिक तथा डियान वदो की सार्थकता-परीक्षा कीजिये।
 - (iii) K₂O की 80 क्लोबाम प्रति हैक्टर मात्राके लिए उपन की प्रायुक्ति कीत्रिये।
- 12 चावल पर विमे गमे एक कीट नियन्त्रण प्रयोग के झम्तर्गत निम्न प्रेसगा प्राप्त हए —-

नावस सी उपव (विरदन प्रति हैग्टर) (Y)	5% बनहेरमा में बर्धक शोमियों की संक्रम (X1)	থবি বুলর নাহয ধাবাঁ থী নহয় (X ₂)	काडी वर बःदुशसा (X ₃)
3009	1269	1068	67
3882	:320	1181	39
3208	1295	1162	4 4
3616	1322	128 6	40
3430	1302	134-5	4.1
3843	1205	142 5	4 2

·(i) प्रनेकद्या समाध्ययण रेखा,

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3$$

का समंजन कीजिये।

- (ii) भौशिक समाध्यण गुणांकों की सार्यकता परीक्षा कीजिये ।
- (iii) परिकल्पना $H_0: \beta_{1:23} {=} \beta_{2:13}$ की $H_1: \beta_{1:23} {\neq} \beta_{2:13}$ के विरुद्ध परीक्षा कीजिये।
- (iv) समाध्यपण विश्लेषण कीजिये और बहुसमाध्यप रेला के झौचित्य पर टिप्पणी कीजिये ।
- चरों X₁, X₂, X₃ के माध्य से विचलन के वर्ग-योगों तथा गुणनफलनों के आव्युद्ध का प्रतिकोम साध्युद्ध निम्न हैं:—

$$(C_{ij}) \ = \ \begin{bmatrix} \cdot 10 & -15 & -\cdot 20 \\ & \cdot 12 & -\cdot 05 \\ & & \cdot 17 \end{bmatrix}$$

मीर x_{i} x_{j} Y_{i} =15, x_{i} x_{2i} Y_{i} =25, x_{3i} y_{i} =20, x_{3i} y_{i} =10

योशिक समाध्यण गुणाकों का परिकलन कीजिये ।

14. तिल की विभिन्न किस्मों पर प्रयोग में निम्न प्रेक्षण प्राप्त हुए :---

	•		
प्रति थोते की उपव (शम में) (Y)	प्रति पोपे में काखाएँ (X ₁)	রবি समुद्र (Capsule) ধীসাঁ কী सভযা (X ₂)	
5.4	5-1	70.6	
5.5	5.2	58.4	
6.0	1.3	75.6	
6.6	4.6	79.5	
1.7	3.0	63.2	
4.6	1.6	66.2	
3.9	2.7	72.2	
8.0	4.1	69.8	
6.6	3.6	108.5	
0.6	4-2	59.3	
	(शम व) (Y) 5-4 5-5 6-0 6-6 1-7 4-6 3-9 8-0 6-6	(भाग में) भाषाएँ (Y) (X ₁) 5·4 5·1 5·5 5·2 6·0 1·3 6·6 4·6 1·7 3·0 4·6 1·6 3·9 2·7 8·0 4·1 6·6 3·6	

उपर्युक्त न्यास द्वारा समाध्यण रेखा

$$\hat{\mathbf{Y}} = b_0 + b_1 \mathbf{X}_1 + b_2 \mathbf{X}_2$$

का समंजन कीजिये भीर X₁==5 व X₂==80 के लिए Y का झागणन कीजिये।

पिछने मध्याव मे हम देख चुके हैं कि बाद Y का X पर समाध्यक्ष सरन रेगीय हो तो माध्य पूर्वि वर्ष बोव,

$$\begin{split} \sigma_{\mathbf{v}}^{1} &= \sigma_{\mathbf{v}}^{1} - \frac{\sigma_{\mathbf{v}}^{1}}{\sigma_{\mathbf{v}}^{2}} \\ &= \sigma_{\mathbf{v}}^{1} \quad \left[1 - \frac{\sigma_{\mathbf{v}}^{2}}{\sigma_{\mathbf{v}}^{1}} \sigma_{\mathbf{v}}^{1}\right] \end{split}$$

होता है। यद $\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_{X}\sigma_{Y}}$ =0 हो तो समायवन के उपयोग से कुछ साम नहीं होता है प्रयाद X के ज्ञान में Y के बात वा धतुवात समाने में कोई सहायता नहीं मितनी है। $\sigma_{XY}^{A}/\sigma_{X}^{A}$ σ_{Y}^{A} के मान जिनना खीधर हो उतनी ही जूटि रम होनी है। इसिन्द इसमें Y धीर X के बीच रेनिक सहमायन्य का बोटि साप माना जा मनता है। इसिन्दे ρ^{A} से मूचित करते हैं। ρ इसवा खंग्रुल है जिससा मान धतायस्य या ज्ञाग्यस्य, σ_{XY} के साप के धतुतार होता है। ρ को X धीर Y का सहस्यस्य गुवार करते हैं। ρ के धाकल की। ही निरुचित विधा नाता है।

परिभावा सहसम्बन्ध नुवाक विन्ही दो चरो ने रैलिंग माहनमें (Linear association) भी कोटि का माप है।

ध्यवहार में प्रधिवत्तर प्रतिदर्शका प्रशोग किया जना है। धन यहां सब मूज ा के लिए दिये गये हैं। P का मान, इन्हीं मूको के समय के समन्त मानों को रसकर नान कर सकते हैं।

साता कि एक n परिमाण ने प्रतिदर्श एनको पर चरो 🗴 धौर Y के लिए युग्मिन प्रेक्षण निम्न हैं '---

सहसम्बन्ध गुर्लाकः 🗈 का सूत्र,

$$f_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \qquad \dots (141)$$

† 1

सदि cov $(X, Y) = s_{XY}$, $v(X) = s_X^2$ स्रोत $v(Y) = s_Y^2$, शूत्र (141)

में रखदें तो।

$$r = \frac{s_{XY}^*}{s_{Y} s_{Y}}$$
 (14.1.1)

है। इस सूत्र को निम्न रूप में मुगमता से दिया जा सकता है:--

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \overline{X}) (Y_{i} - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (X_{i} - \overline{X})^{2} \sum_{i=1}^{n} (Y_{i} - \overline{Y})^{2}}} \dots (14.1.2)$$

$$= \frac{\sum_{i} X_{i} Y_{i} - \frac{\left(\sum_{i} X_{i}\right) \left(\sum_{i} Y_{i}\right)}{n}}{\sqrt{\left(\sum_{i} X_{i}^{2} - \frac{\left(\sum_{i} X_{i}\right)^{2}}{n}\right) \left\{\sum_{i} Y_{i}^{2} - \frac{\left(\sum_{i} Y_{i}\right)^{2}}{n}\right\}}} \dots (14.1.3)$$

यदि सूत्र (14.1.2) में $(X_i - \overline{X}) = x_i, Y_i - \overline{Y} = y_i$ रखदें तो

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} y_i^2}}$$

स्वाजे प्रसमिका (Schwarz inequality),

Cov
$$(X, Y) < \sqrt{V(X)V(Y)}$$

के अनुसार P (या r) का मान कभी 1 से प्रधिक नहीं हो मकता है। यदि चरों में सहस्रसरण का मान फ्लाएक हो तो P का मान -1 से कम नहीं हो सनता है नयों कि सूत्र में हर (denominator) कदापि फ्लाएसक में हो हो सकता है। यदि यो चर स्वतन्त्र हों तो उनमें सहसम्बन्ध गुणांक सर्देव शून्य होता है। इसका कारण यह है कि इस स्थित में सहस्रसम्बन्ध गुणांक सर्देव शून्य होता है। इसका कारण यह है कि इस स्थित में सहस्रसम्बन्ध गुणांक सर्देव शून्य होता है। इसका कारण यह है कि इस स्थित में सहस्रसम्बन्ध गुणांक सर्देव शून्य को निम्म प्रकार सिद्ध कर सकते हैं:—

माना
$$E(X_i) = E(\overline{X}) = \mu_X$$

भीर $E(Y_i) = E(\overline{Y}) = \mu_Y$
 $Cov(X, Y) = E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$
 $= E(X - \mu_X)E(Y - \mu_Y)$
 $= (\mu_X - \mu_X)(\mu_Y - \mu_Y)$
 $= 0$

किन्तु यदि r=0 हो तो इसका यह तात्पर्य नही है कि, X भौर Y स्वतन्त्र हैं।

सहसम्बन्य गुपान के लिए कार दिये मुत्रों में से निभी एक ना परिनतन में मुनिधा के प्रदुत्तार उपयोग नर सनते हैं। र ना मान धनात्मन हो तो धनात्मक सहसम्बन्य प्रीर ऋणात्मक हो तो ऋणात्मन सहसम्बन्ध नहलाता है।

उदाहरण 141 उदाहरण (131) में दिये गये 12 मुनल प्रेश्नमों के लिए, खरपतनारों नी सस्या तथा मक्का की उन्ज में सहसम्बन्ध गुणाक जिन्न प्रकार झाउ कर सकते हैं ---

वहाँ दिये गये परिकलनो का गहाँ सीवा प्रयोग किया गया है।

सूत्र (13 1 2) के द्वारा,

$$= \frac{-523}{\sqrt{2232 \times 318}}$$
$$= \frac{-523}{84248} = -0.62$$

र ना मान — 062 है जो कि उच्च कम ना क्यारमक सहसम्बन्ध है। मता यह नह सनते हैं कि जब सरपतवार की सब्या बढ़ती है तो उपच घटती है। तार्यक होने पर ही दिया गया तर्व देश है। र नी सार्यकता-परीक्षा अधिवर्षक र द्वारा की काली है जिसका विवरण माने वासे सण्ड मे मूज (14131) द्वारा दिया यया है।

सहसम्बन्ध गुणांक और समाश्रवण गुणांकों में सम्बन्ध

हम जानते हैं कि,

$$b_{YX} = \frac{\text{cov }(X, Y)}{\text{v }(X)} = \frac{s_{XY}}{s_X^2} \qquad \dots (142)$$

$$b_{XY} = \frac{\text{cov }(X, Y)}{\text{v }(Y)} = \frac{s_{XY}}{s_Y^2} \qquad(14.3)$$

घौर

$$t_{XY} = t_{YX} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{v(X) v(X)}} \qquad \dots (14.4)$$

$$r^{2} = \frac{s_{XY}^{2}}{s_{X}^{2} s_{Y}^{2}}$$

$$= b_{ex} b_{XY}$$

$$\pi \tau = \sqrt{b_{YX} \cdot b_{XY}} \qquad(14.5)$$

मत सम्बन्ध (145) हारा स्पष्ट है कि सहसम्बन्ध यूजाक दोनों समाध्ययण गुणाकों के गुणीसर माध्य के समान होता है। साथ ही यह बात ध्यान देने योग्य है कि b_{YX} , b_{XY} , s_{XY} भौर r का चिह्न सदेव एक मा होता है क्योंकि s_X व s_Y सर्वदा धनारमक होते हैं। भ्रतः r का चिह्न वहीं नेना होता है जो कि b_{YX} या b_{XY} का है।

निर्धारण गुणांक

सूत्र (14 1 4) की सहायता से,

संस्था
$$(\Sigma x_i y_i)^2 / \Sigma x_i^2 = r^2 \Sigma y_i^2$$
 . (146)

$$q\tau \quad r^2 = \left(\sum_i x_i \ y_i\right)^2 \sum_i x_i^2 \ \sum_i y_i^2 \tag{14.7}$$

$$r^{2} = r^{2} \sum_{i} y_{i}^{2} / \sum_{i} y_{i}^{2} \qquad (148)$$

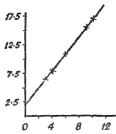
सम्बन्ध (148) से स्पाट है कि I^2 समाध्यम के कारण वर्ष योग मीर कुल वर्ण याग के प्रमुपात के समान होता है। इस सस्या I^2 को निर्धारण गुणाक कहते हैं इसी प्रकार सस्या (1 – I^2) धनिर्धारण गुणाक कहताती है। सस्या $\sqrt{1 - I^2}$ को सकामण गुणाक (Coefficient of alenation) कहते हैं।

सहसम्बन्ध गुणांक का ज्यामितीय निरूपण

इस घष्ट्याय के धारम्भ मे ही कहा जा बुका है कि बर X और Y मे सम्बन्ध रेखीय होता है। इस रेखा की बतुवाँव (quadrant) मे दिखति, ह के सान पर निर्भर करती है। उदाहरण के जिए कुछ मान लेकर रेखा की दिखति को चित्रों डारा प्रवींचत निया गया है। किसी भी दिखति में सामान्य रेखा सभीकरण को Y-mX+c के रूप म दिया जा सकता है।

(i) यदि r=1 हो तो सुत्र (1412) से Y के स्थान पर mX+c रख देने पर r=1 मा जाता है सत्त r=1 होना m व c पर निर्मेर नहीं है, इसका मीनप्राय है कि X भीर Y में परिपूर्ण सहसन्वन्ध होने पर जितना परिवर्तन एक विषयसान में होता है उससे समानुपाती परिवर्तन प्रम्य वर्त ते वहनुसार आन में होता है। इस स्थिति में सब मुगत प्रेहण रेखा पर स्थिति होते है। जैसा नि चित्र (141) में दिखाया गया है। निम्म प्रेसणों के लिए r=1 है।

x	Y
3	6.5
4	8 0
6	110
9	15 5
10	170



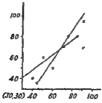
चित्र 14-1 ा=1 प्रयांत् चरा म परिपूर्ण महमस्यन्य का सामेली प्रदर्शन

(2) तिस्त बैक्षणा ने लिए सहत्रम्थण जुणाच उ= 903 दै सर्थात् चर X और Y में सम्बाध उच्च स्तरीय है।

X . 45, 70, 65, 30, 90, 40, 50, 75, 85, 60

Y 35, 90, 70, 40, 95, 40, 60, 80, 80, 50

हम स्थिति से सब युगन प्रेक्षण रेमा पर स्थित नहीं होते हैं। विन्तु रेमा पर सहियत विष्टु इसके ममीप म श्री होते हैं जैना कि किम (14~2) से स्पट्ट है।



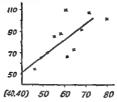
चित्र 14-2 := 903 वी स्विति में यानेनी तिवरण

(3) निस्न युगल प्रेशमा स सहसम्बन्ध गुणीप र∞=452 है। यहाँ प्रेशमा मे महत्तस्थम सस्प है।

X 40, 46, 49, 61, 64, 52, 55, 58, 68, 77, 70, 60

Y : 51, 55, 65, 67, 73, 70, 85, 88, 92, 102, 106, 110

इस स्थित में कुछ ही प्रेक्षण रेखा पर स्थित होते हैं। इसके घाँतरिक्त महाँ मस्थित बिन्दुयों को रेखा से दूरी उच्च स्तरीय सहमानकाय की प्रथेक्षा मधिक होती है जैसा कि चित्र (14-3) में दिखाया गया है।



वित्र 14-3 ा= 452 की स्थित ये रेखा वित्र

(4) निम्न युगल प्रेक्षणा म सहसम्बन्ध गुणाक := - 1 है नहीं सहसम्बन्ध परिपूर्ण एव ऋणाश्मक है ।

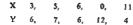
X 2, 1, 5, 3, 6, 10, 12 Y 50, 55, 3.5, 45, 30, 10, 11

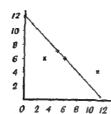
इस सहसम्बन्ध गुणान ने तिए रेला मुज-प्रक्ष से 90° से घषिक का नोग बनाठी है। सब गुणन प्रेक्षण रेला पर स्थित होते हैं। भत यदि एन विवर का मान बडना है ता भन्य का मान एक निश्चित तमानुपात में घटता है। इस रेल' को उपर्युक्त प्रेक्षणों के तिए वित्र (14-4) में दिलाया गया है।



चित्र 14-4 r == - 1 मर्बात् ऋषात्मक परिपूर्ण सहसम्बन्ध का रेक्षीय निरूपण

(5) निम्न सुगत प्रेक्षणो में सहसम्बन्ध गुपाक r= - °153 है।

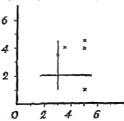




चित्र 14-5 := - 153 की स्थित म शहियत विन्दू एव रेखा

इस स्थिति से भी रेखा X-यस से 90° से स्थिव वा बोल बनानी है। यहाँ सब सुगल प्रेशाणों से एक चर के सबुधार दूसरे म परिवर्तन समानुभाविक नहीं होगा है। इसके स्रितिरक्त रेखा पर बुछ ही सालेग्नित बिन्दु स्थित होते हैं। जितना का मान कम होता है उतनी ही बिन्दुयों नी रेखा से दूरी स्थिक होनी है जैसा कि (बिज 14-5) से स्पर्ट है।

(6) निम्न युगल प्रेक्षणो से सहसम्बन्ध मुनार कृत्य ने समान है प्रपत् र ≈0 है।



वित्र 14-6 r=0 की स्थिति ये अवीर्णन चारेण

क्रों में सहसम्बन्ध न होते की स्थिति में वित्र एक प्रवीय धारेण (Scatter diagram) होता है। कर X ग्रीर ¥ स्वतन्त्र होते के कारण, धार्मीतन वित्रु तरेल

(collinear) नहीं होते हैं। अतः इस रेखा पर दो से अधिक बिन्दु स्थित नहीं होते हैं भीर एक दूसरे से दूरी भी अधिक होती है।

इन चित्रों की मौति, r के विसी भी बन्य मान को निरूपित करती हुई रेखा दिखाई जासकती है।

युगल प्रेक्षणों की परिवर्ती बारम्बारता की स्थित में सहसम्बन्ध

पूर्व में दिये । के लिए सूत्रो में यह कल्पना की गई थी कि प्रत्येक प्रेक्षण एक बार या समान बारम्बारता सहित घटित है। यदि यह कल्पना सत्य न हो मर्पात् युगल प्रेक्षणो की बारम्बारता भिन्न-भिन्न हो तो । के परिकलन में बारम्बारता को भी सम्मिलित करना माबश्यक है। माना कि युगल प्रेक्षण भीर उनकी तदनुसार बारम्बारता इस प्रकार है:—

чτ (X)	97 (Y)	बारम्बारता (1)	
X ₁	Yı	f ₁	
x_2	Y ₂	f_2	
X ₃	Y ₃	f ₃	
į	1	8 0 0	
Xĸ	$\mathbf{Y}_{\mathbf{K}}$	r _K	

$$K$$

माना $\sum_{i=1}^{K} f_i = n$ (प्रनिदर्श परिमाण)

पर X ग्रीर Y में सहसम्बन्ध गुणाका की निम्न सूत्र की सहायता से मात कर सकते हैं:—

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{K} f_{i}(X_{i} - \overline{X}) (Y_{i} - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{K} f_{i}(X_{i} - \overline{X})^{2} \times \sum_{i=1}^{K} f_{i}(Y_{i} - \overline{Y})^{2}}} \dots (149)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{K} f_{i}(X_{i} - \overline{X}) \times \sum_{i=1}^{K} f_{i}(Y_{i} - \overline{Y}) = y_{i} \text{ terf \tilde{c} di},}{\sqrt{(\sum_{i} f_{i} x_{i}^{2})(\sum_{i} f_{i} y_{i}^{2})}} \dots (149.1)$$

यदि प्रेसणों का माध्य से विचलन जात करने में रिटनाई या प्रणुद्धि हो तो उपर्युक्त सूत्र को निम्न रूप में प्रयोग कर सनते हैं। इसमें प्रेसणों का माध्य से विचलन जात नहीं करना होता है:—

$$r = \frac{\sum\limits_{i}^{1} f_{i} X_{i} Y_{i} - \frac{\left(\sum\limits_{i}^{1} f_{i} X_{i}\right) \left(\sum\limits_{i}^{1} f_{i} Y_{i}\right)}{n}}{\sqrt{\sum\limits_{i}^{1} f_{i} X_{i}^{2} - \frac{\left(\sum\limits_{i}^{1} f_{i} X_{i}\right)^{2}}{n}} \sqrt{\sum\limits_{i}^{1} f_{i} Y_{i}^{2} - \frac{\left(\sum\limits_{i}^{1} f_{i} Y_{i}\right)^{2}}{n}}(1492)}{\arg \xi^{1} \sum\limits_{i}^{1} f_{i} = n}$$

उदाहरण 14,2: एक वसा के विद्यापियों की उपस्थिति, इनके द्वारा प्राप्त सकी के वर्ग ग्रन्तराल तथा विद्याचियों की सक्या निम्न सारकों में दी गई है।

वर्ट्डों के वर्ग अन्तराण X	হণ-ি•বি Υু	विधारियों की सक्या हैं	
20 — 30	26	1	
30 - 40	33	2	
40 50	34	6	
50 60	35	4	
60 — 70	40	5	
70 — 80	42	2	

विद्यार्थियों के झकों व उपस्थिति से सहसम्बन्ध सृणार निम्न प्रकार झान कर सकते हैं ---

वर्गों के मध्य-मान यहाँ वर X के मानों के रूप निये जाते हैं।

चरा X ॥ Y मे सहमम्बन्ध गुणाक निम्न सारणी बनावर झात करना मुगम है।

महां
$$\sum_{i} f_{i} X_{i} = 1060$$
 थोर $\sum_{i} f_{i} = 20$ $\therefore X = \frac{1060}{20} = 53$

$$\Sigma f_1 Y_1 = 720$$
 : $\overline{Y} = \frac{720}{20} = 36$

माना X. – X ≠×। with $Y_i - \overline{Y} = y_i$

परिकलन ने लिए सारपी --

х	Y	f	X _i	3 _i	x _i ²	y _i ²	x,y,	fx,2	fy,2	fx,
25	26	1	-28	-10	784	100	280	784	100	280
35	33	2	-18	- 3	324	9	54	648	18	100
45	34	6	- 8	- 2	64	4	16	384	24	96
55	35	4	2	- 1	4	1	- 2	16	4	- 8
65	40	5	12	+4	144	16	48	720	80	240
75	42	2	22	+6	484	36	132	968	72	264
यो	ग							3520	298	980

सूत्र (1491) द्वारा,

$$r = \frac{980}{\sqrt{298 \times 3520}} = \frac{980}{\sqrt{1048960}} = \frac{980}{1024 \text{ l 3}} = 0.956$$

है। यत विद्यारियों के प्राप्त सकी तथा तपस्थिति में उच्च क्रम का सहसम्बन्ध है। सहसम्बन्ध-गुणांक का प्राधिकता धनत्व फसन

यह प्रध्याय (10) में दिश जा चुना है कि एन प्रतामान्य चर X, जिसका माध्य मु, भीर मानक विचलन 🖋 है, का पनत्व एसन

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{1}{2\,\sigma_x^2}\,(x-\mu_x)^2}$$

होता है। X के दो मानों के बीच प्रेक्षणों की प्रायिकता, इन पर कोटियों के बीच के क्षेत्र के समान होती है इसी प्रकार दो चर X और Y जिनके बटन जनसां N (μ_x , σ_x) और N (μ_y , σ_y) है, समतन पर मानों का एक युगन प्रदिश्त करते हैं। प्रमामान्य दिचर बंदन की स्थिति में मनस्य फलन I (x, y) निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right\}} - \dots (14 \ 10)$$

धनत्व फलत को द्विचर के सम्बन्ध में एक वक से नहीं बल्कि एक पृष्ठ से दशति हैं।

जहाँ P परों X भीर Y में समग्र सहसम्बन्ध-गुणांक है। इस स्थिति में प्रापिकता, मायतन द्वारा ज्ञात की जाती है भीर प्रमाशान्य द्विचर बारम्बारता बटन का रूप नुदि-त्रिकोण (Cocked hat) जैसा होता है। इसको चित्र (14-7) में दिखाया गया है।



बित्र 14-7 प्रटि-विकोग (Cocked hat)

भूसामान्य द्विचर बटन के लिए कोबित वर्ग योग s.º. ६.º घौर सहमम्बन्ध गुगोक का सम्मितित बटन इस प्रकार का होता है -

$$C = \frac{1}{2(1-\beta^2)} \left(\frac{s_x^2}{\sigma_x^2} - 2 \beta t, \frac{s_x s_y}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{s_y^2}{\sigma_y^2} \right) \times (s_x s_y)^{n-2} (1-t^2)^{\frac{n-4}{2}} \frac{a_y}{s_x} ds_x ds_y dr.$$
.... (14.11)

ध्यञ्जल (14.11) में,

$$s_x^2 := \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2, \ s_y^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2$$

धौर C एक समर है।

मदि P = 0 हो बर्मात प्रनिदर्श का स्थल बसहमान्यन्थल द्वितर प्रसामान्य समय में विया गया हो तो इस स्थिति मे बटन (14 11) निम्न हो जाना है -

(14.11 1) से स्वय्ट है कि इ का बदन कू व कु के बदन से मुक्त है घन

$$dP = C(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} dr \qquad(14 11.2)$$
where $C = \frac{1}{\beta(\frac{1}{2}, \frac{n-2}{2})}$ where $r < 1 < r < 1$

यदि पसन (14.11.2) में,

$$r = \frac{t}{\sqrt{t^2 + n - 2}}$$

का प्रतिस्थापन करदें तो dP, t–घटन, जिसकी स्व∘ को∘ (n − 2) है, के तुल्य हो जाता है ग्रत:

$$t = \frac{r \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \qquad(14.11.3)$$

सम्बन्ध (14.11.3) से स्पष्ट है कि r का बटन स्टूब्न्ट t होता है। यदि $\rho \neq 0$ हो प्रधांत समय सहसम्बन्ध गुणाक कृत्य नहीं हो तो रूपान्तरण का प्रयोग करना होता है जो कि इस प्रकार है :—

$$\xi = \frac{S_x S_y}{\sigma_x \sigma_y}, \quad z = \log \frac{\sigma_y S_x}{\sigma_x S_y}, \quad r = r$$

दै व ट ना प्रवकलन करके : वा बटन जात कर सकते हैं जो कि निम्न प्रकार है ·─

$$dP = C' (1 - r^2) \frac{n-4}{2} \qquad d \frac{n-2}{(r\rho)^{n-2}} \left\{ \frac{\cos^{-1} (-\rho r)}{\sqrt{1 - \rho^2 r^2}} \right\} \dots (14.12)$$

$$\operatorname{qgt} C' = \frac{(1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi\sqrt{n-2}} + \xi$$

रैंखिक रूपान्तरण (संकेतीकरण) का सहसम्बन्ध गुणांक पर प्रभाव

यदि चर X और Y पर दिये गये धुगल प्रेक्षणों के समुख्य से चर X पर लिए गये प्रत्येक प्रेक्षण में में कोई स्वेच्छ प्रचर 'a' वटा वें और किसी स्वेच्छ प्रचर 'c' से माग कर वें और चर Y पर प्रेक्षणों में से एक स्वेच्छ प्रचर 'b' वटा वें और 'd' से माग कर वें तो महसस्वन्य-गुणाक पर सवेती करण कोई प्रभाव नहीं पड़ता है सर्पात् सकेतित प्रेक्षणों हारा परिकलित का का मान वहीं होता है जो कि मूल प्रेक्षणों द्वारा परिकलित करने पर प्राप्त होता है। यही नियम किसी स्वेच्छ प्रचर की जोडने या गुणा करने के लिए भी सास है।

सकेतीकरण का विशेष लाग यह है कि यदि परिकलन बिना यणना यन्त्र के करना हो तो इसकी सहायदा से 1 का परिकलन सुगमता से किया जा सकता है।

उपर्यक्त कथन को इस प्रकार सिद्ध कर सकते हैं ---

माना कि

$$v_i = \frac{X_i - a}{c}; \quad v_i = \frac{Y_i - b}{d}$$

$$X_i = a + cu_i, \quad Y_i = b + dv_i$$

$$\overline{X} = a + c\overline{u}, \quad \overline{Y} = b + d\overline{v}$$

पूत्र (1412) में X_k Y_k और X_k Y के मानी की, u = v के दशों में प्रतिकारित करते पर यदि $x_{s_k} = x_{s_k}$ प्राप्त हो जाने नो दलका सबै है कि संकेलकरण का कर्म मन्त्र समानित पर कोई प्रभाव नहीं दक्षा है सर्वत् प्रतिकारत के बाद संकेलिकरण में निर्ण गय सबसे का स्वयं निरमत हो जाता है -

$$\begin{aligned} & \tau_{XY} = \frac{1}{\sqrt{2}(X_{i} - X)^{2}} \frac{\chi(Y_{i} - Y)}{\chi(X_{i} - X)^{2}} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}(X_{i} - X)^{2}} \frac{\chi(Y_{i} - Y)^{2}}{\chi(x_{i} + c v_{i}) - (x_{i} + c \overline{v}_{i})^{2}} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\{(x + c v_{i}) - (x_{i} + c \overline{v}_{i})^{2}\} \left[\{(b + dv_{i}) - (b + d\overline{v})^{2}\}\right]}{\sqrt{2} \frac{1}{2} \left[(v_{i} - \overline{v}) \left(v_{i} - \overline{v}\right)^{2}\right]} \\ & = \frac{c d}{\sqrt{c^{2}} \frac{1}{2}} \frac{\chi(v_{i} - \overline{v})^{2} d^{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}(v_{i} - \overline{v})^{2}} \frac{1}{2} \left[(v_{i} - \overline{v})^{2}\right]} \\ & = \frac{c d}{\sqrt{c^{2}} d^{2}} \frac{\chi(v_{i} - \overline{v})^{2} d^{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}(v_{i} - \overline{v})^{2}} \frac{1}{2} \left[(v_{i} - \overline{v})^{2}\right]^{2}} \end{aligned}$$

उत्तुत्त विवरण में यह निष्टण कि नाम है जि क्यों ने निष्य मेंबरी (Scate) बदनने का महमायन्य मुत्रक र पण कार्ड बस्यक नहीं परणा है। स्वस्थ परी 2, b, c, d हे मान एक ममान भी हा मकते हैं।

= t,,

दबाहरण 14.3 कर विद्यारण में नेवी कला के विद्यादियों की बैटन क्रेंबाई चौर खनी की परिश्चितिस्त भीं ─

यहाँ विद्यापियों की जैनाई तथा छाती की परिश्चित स सहसम्बाध-पुण्यन संवेगीकरण की सहायका से सुरक्षण से परिकारित किया जर सक्षण है।

X के प्रापेश काल के 130 बराबर भीर Y के प्रापेश मात में 80 बराबर, संवित्तर केला तथा परिचाल बारपी निम्न प्रकार है —

(X-130) =X'	(Y-60) =Y'	X²	Y ²	X'Y'
5	2	25 00	4 00	-10 00
5	5	25 00	25 00	25 00
0	-3	0 00	9 00	0 0 0
0	3 5	0 00	12 25	0 0 0
11-5	3	132 25	9 00	34 50
2 5	D	6 25	0 00	0 00
3 0	-1	9 00	1 00	-3 00
45,	-2	20 25	4 00	-9 00
21 5	7 5	217 75	64 25	37 50

सूत्र (14 1 3) हारा,

$$r = \frac{37.5 - \frac{21.5 \times 7.5}{8}}{\sqrt{\left[217.75 - \frac{(21.5)^2}{8}\right] \left[64.25 - \frac{(7.5)^2}{8}\right]}}$$

$$= \frac{17.35}{\sqrt{159.97 \times 57.22}} = \frac{17.35}{95.67}$$

$$= 0.181$$

सहसम्बन्ध-गुणाक की सार्थकता-परीक्षा

प्रतिद्वां के n स्वतन्त्र मुगल प्रेक्षणों द्वारा परिकलित सहसम्बन्ध-गुणाक का मान कुछ भी हो बहुषा द्विचर प्रसामान्य समग्र म दोनों चरों के स्वतन्त्र होने की सम्मावना रहती है या सहसम्बन्ध-गुणाक का कोई विजेष मान होने की साधा 'की वाती है। इसका कारण यह है कि सम्प्रवतः प्रतिदक्षं में ऐसे एकको का चवन हो गया हो बिन पर प्रेसणों द्वारा प्राप्त सहसम्बन्ध-गुणाक का मान, समग्र में सहसम्बन्ध-गुणाक से सर्वाधिक मिन्न हो। इसके प्रतिरिक्त का बटन प्रतिदक्षं परिमाण n पर भी निर्मर रहता है धत सहसम्बन्ध-गुणाक के मान पर में निर्मर की मान होने या न होने का पती च का वाती है। सहसम्बन्ध-गुणाक के मुन्य होने को परिसल्वना की परीक्षा निन्न रूप में की आर्थी है। सहसम्बन्ध-गुणाक के मून्य होने को परिसल्वना की परीक्षा निन्न रूप में की आर्थी है। यहाँ

 H_0 $\rho = 0$, की H_1 $\rho \neq 0$ में विरद्ध परीक्षा भी जाती है

माना नि प्रतिदर्श में 🗈 युगल प्रेसच

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), ..., (X_n, Y_n)$$

हैं और इनमें प्राप्त सहसम्बन्ध नृथाक का काना है। H₀ की परीक्षा प्रतिदर्शन । द्वारा की जाती है। यहीं प्रतिदर्शन

$$t_{n-2} = \frac{r}{s_r}$$
 (14.13)

जबिरियहाँ ५, ४ का मानक विचनन है

$$\pi = \rho = 0 \text{ हो तो } s_1^2 = \frac{1 - r^3}{n - 2}$$

$$\therefore t_{n,2} = \frac{\tau \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\tau^2}} \qquad(14131)$$

परिविध्य के सान को, α मान स्तन्त का $\{a-2\}$ स्वन्न को वर सारणीबद्ध के मान से तुलना करके परिकल्पना H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है। यदि परिविध्य $\sum_{\alpha, n-2}$ हो तो H_0 को प्रस्तीकार कर दिया जाता है। जिसका समिप्राय है कि परी X सौर Y से सार्थन सम्बन्ध है। यदि X हो तो X को स्वीकार कर निर्णाजाता है। जिसका समिप्राय है कि परी X सौर X से सार्थन सम्बन्ध है। यदि X हो तो X को स्वीकार कर निर्णाजाता है जिसका समिप्राय है कि पर व्यवस्त हैं।

उदाहरण 14.4 ा वा परिवालित मान उदाहरण (14.1) के प्रमुक्तर \sim 62 है ग्रीर प्रतिरंग परिवाल 12 है। परिवारना H_0 ρ =0 वी H_1 . $\rho \neq$ 0 वे विश्व परीक्षा प्रतिरंग (14.13.1) द्वारा इस प्रवार कर सकते हैं \sim

$$t = \frac{-62 \times \sqrt{12-2}}{\sqrt{1 - (-62)^3}}$$

$$= \frac{-62 \times 3162}{\sqrt{1 - 03844}}$$

$$= \frac{-1960}{784}$$

=-25

नारणी (परि॰ ध-3) द्वारा 5% ना॰ स्त॰ घोर 10 व्य० को॰ के लिए का मान 2 228 है। यह मान को परिकलित सान से सम है, धन Ho को सस्वीकार कर दिया जाता है। इससे यह निकर्ष निकलता है कि कारणतवारों की सध्या धौर उपने में नार्थक कारासक महमक्तरस है।

(स) यदि निमी विभिन्द जाननारी ने धनुसार किसी वो वयो से एक निर्मित्र सहसम्मन्त गुन्नोन होने की सामा हो तो परिकस्पना H_0 $ho \simeq
ho_0$ की H_1 . $ho \neq
ho_0$

के विरुद्ध परीक्षा की जाती है। यहाँ ho_0 वह झवर मान है जिसके होने की घाषा की गई है। इस परिनल्पना की परीक्षा (14.131) में दिये गये प्रतिदर्धज से नहीं की जा सकती है क्योंकि $(rho_0)/s$, का बटन स्टूडेन्ट-। नहीं होता है जब तक कि ho_0 का मान 0 न हो। प्रतः H_0 की परीक्षा करने से पूर्व फिजर-Z स्थान्तरण (Fisher's-Z transformation) का प्रयोग करना होता है जो कि इस प्रकार है —

$$Z_{r} = \frac{1}{2} \log_{e} \frac{(1+r)}{(1-r)} = \text{Tan h}^{-1} r \qquad(14 14)$$

$$= \frac{1}{4} \{ \log_{e} (1+r) - \log_{e} (1-r) \}$$

$$= \frac{1}{4} \log_{e} 10 \{ \log_{10} (1+r) - \log_{10} (1-r) \}$$

$$= 1.1513 \{ \log_{10} (1+r) - \log_{10} (1-r) \}$$

इसी प्रकार.

$$Z_{\rho_0} = \frac{1}{2} \log_0 \frac{(1+\rho_0)}{1-\rho_0} = \operatorname{Tan} h^{-1} \rho_0 \qquad \dots (14141)$$

$$= 1 \cdot 1513 \left\{ \log_{10} (1+\rho_0) - \log_{10} (1-\rho_0) \right\}$$

Z से r में स्पान्तरण के लिए दी गई सारणी (यरि० प-16) पी सहायता से Z, व $2\rho_{\rm II}$ के मानी को जात वर सकते हैं। फिशर ने बताया कि Z, लगभग एक प्रसामान्य स्प है जिसका माध्य $Z\rho_{\rm II}$ और प्रसरण $\frac{1}{n-3}$ के सिप्तकट होता है। उन्होंने इन और भी ध्यान मार्कावत किया कि Z, वा माध्य, n लगु होने की स्थित से, दुख मिनत है। इसके लिए सगोधन पद $\frac{\rho_{\rm II}}{2(n-1)}$ वा प्रयोग करने का सुभाव दिया। इसका

क्ष्यें है कि a सबु होने की स्थिति में $\{Z_n-Z_{m{
ho}_0}\}$ का माध्य $\frac{m{
ho}_0}{2\;(n-1)}$ होता है। यदि a बृहत् हो तो प्रसामान्य विचर,

$$Z = \frac{Z_{r} - Z_{\rho_{0}}}{1/\sqrt{n-3}} \qquad(14.15)$$

$$=(Z_r-Z_{\rho_0})\sqrt{n-3}$$
(14.151)

यदि n बृहत् न हो तो,

$$Z_{\rho_0} = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1 + \rho_0}{1 - \rho_0} \right) + \frac{\rho_0}{2 (n - 1)} \qquad \dots (14.16)$$

के हैं। परिकल्पना H₀ दो परीक्षा के लिए n के मान के अनुसार Z के मान का परिकलन. मूत्र (14 15) या (14 |6) द्वारा कर लिया जाता है। इसके पश्चात् असामान्य वक र शंद बानी मान्यों द्वान घरनीकृति नेत्र की प्राधिवता ज्ञात कर की बाती है या α मा॰ रन के निए उस मारणी द्वारा Z का कात ज्ञात कर दिया जाता है। यदि प्राप्त घरश्रीकृति क्षेत्र पूर्व निर्धालि मा॰ रन व कम हो तो H_0 की घरनीकार कर दिया जाता है प्रयांत् H_1 क्षीकृत है।

र्याद परिस्तिन Z से मान से मारणीबद्ध Z ने मान Z_{μ} में तुनना से मां हो हो $Z > Z_{\alpha}$ होने से स्थित में परिस्ताना H_0 का धम्बीसाद सर दिया जाता है धोर $Z < Z_{\alpha}$ होन पर H_0 सा म्बीसार सर निया जाता है।

समग्र सहसम्बन्ध-गुणांक 🛭 की विश्वास्पता सीमाए

ho की विश्वास्थल भीमाएँ भूत (99) के समस्य निम्न भूत द्वारा जात कर सकते हैं ho साक स्नक पर ho को उत्तरि व निम्न सीमार्घों के निए भूत्र निम्न हैं —

$$=2_{r}\pm Z_{(1-\alpha/2)}\frac{1}{\sqrt{n-3}} \qquad(14171)$$

2 री उपरि मीमा नवा निम्न मीमा नो, जसत दीव वा (+) द (-) विक् सेनप, ब्रान कर निमा जाना है। जिर मारणी द्वारा Z-यानों ने द्वरनुमार के मान बाद कर निए जाने हैं सा वि P की उपरिक्षण निम्म नीमायों को निम्मिश करते हैं।

द्भवाहरण १4.5 प्रवामितीय निरुपण शाग (3) में ा⇒ 452 है भीर बुगल बेहानों की मन्या ॥ ⇒ 12 है।

माना कि बना X और Y म दिनी पूर्व जानकारी के बाधार वर सहमन्त्रमान्या 0.5 होने की बाधार है। तो वह जानने के लिए, कि उन मुक्त बेसणों के महस्मन्त्रमान्या कि प्रदेश के महस्मन्त्रमान्या कि प्रदेश के महस्मन्त्रमान्या कि प्रदेश के स्वाप्त कि प्रदेश कि प्रदेश

इस परिकल्पना की परिका करन ने निर्णातिकार वे 2-क्पान्तरण का प्रयोग करना सावायक है। सन नारणी (परिकृष-16) की सहायना मे

$$t = 452$$
 ক বিণ
7, $= 487$
 $\rho_{\sigma} = 0.5$ ক বিড়,

मूत्र (148) हाय.

$$2\rho_0 = 549 + \frac{.5}{2 \times 11} = 572$$

यतः सूत्र (14·15.1) द्वारा प्रांतदर्शन,

$$Z = (.452 - 572) \sqrt{(12 - 3)}$$

= -0.120 \times 3 = -0.36

 $\alpha = 05$ सा• स्त॰ के लिए Z का मान 1.96 है जो कि Z के परिकलिन मान .36 से स्राधिक है। स्रतः परिकल्पना H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

इसी निर्णय की संधय अन्तरास का क्षेत्र ज्ञात करके भी लिया जा सकता है।

0 ने '36 का क्षेत्र '1406 है। Z परकोटि से बाहर वा क्षेत्र≔ ('5 – 1406) = 0 3594 है जो कि '025 से मधिक है मतः H₀को स्वीकार कर लिया जाता है।

वो द्विचर प्रसामान्य समग्रों के सहसम्बन्ध-गुणांकों की समानता की परीक्षा

यहाँ परिकरपना H_0 $P_1 = P_2$ को H_1 $P_1 \neq P_2$ के विरुद्ध परीक्षा करनी है। माना कि दो प्रतिदर्शों का चयन दोनों समग्रों से स्वतन्त्र रूप में किया गया है और इनके परिमाण क्रमश्च P_2 और P_2 हैं। इन प्रतिदर्शों द्वारा परिकालत सहसम्बन्ध-गुणाक क्रमशः P_2 हैं। इन प्राणित सहसम्बन्ध-गुणाक क्रमशः P_2 हैं। इन प्राणित सहसम्बन्ध गुणाकों के आधार पर H_0 की परीक्षा करनी है।

इस परिकल्पना की परीक्षा के लिए भी फिश्चर के Z-स्पान्तरण का प्रयोग करना होता है। माना कि

$$Z_1 = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+r_1}{1-r_2} \right) = Tan h^{-1} r_1$$
(14.18)

$$Z_2 = \frac{1}{2} \log_6 \left(\frac{1+r_2}{1-r_2} \right) = \text{Tan } h^{-1} r_2$$
 ... (14.19)

(Z1 - Z2) का बेंटन प्रसामान्य होता है जिसका माध्य

$$\left\{\frac{\rho}{2(n_1-1)} - \frac{\rho}{2(n_2-1)}\right\}$$

है (जहाँ β सामान्य सहसम्बन्ध गुणांक है) और प्रसरण,

$$\left\{ \frac{1}{(n_1-3)} + \frac{1}{(n_2-3)} \right\}$$

है ।

गदि प्रतिदर्श परिमाण समुन हो भौर n, व n, के मान में अन्तर भिधक न हो तो,

$$Z = \frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}} \qquad \dots (14.20)$$

एक मानक प्रसामान्य विचर N (0,1) होता है।

िष्ठले सरक में दिये विवरण की मीनि प्रतामान्य करू के क्षेत्र काली सारणी (परिक म-2) डारा प्राविकता ज्ञात करके या a साक्स्तक के सिए सारणी डारा Z(1-a/2) का

मान ज्ञात र रहे Ho से विषय में निर्णय कर लिया जाता है।

चराहरण 146 एव स्टूस में सोसद वर्ष ने "2 वश्यों को ऊँवाई सेंटीमीटर में धीर भार नियोधान में नागे गये। इन भंडरों तथा ऊँवाई में पश्चित सहसम्बन्ध गुणांव 1₃ == 776 है।

इसी प्रवार तमह वर्ष ने 30 बच्चा ने भाद तथा ऊँचाई म सहसम्बन्ध-गुनांक रु= 534 है।

का परिनद्शास की परीक्षा करनी है कि बोजह वर्ष की वासुने व सबह वर्ष की प्राप्त के स्वत्य के आदि तथा जैनाई से सहसक्त स्व वही रहना है प्रयोप्त H_0 $\rho_1 = \rho_2$ की H_1 $\rho_1 \not\sim \rho_2$ के विरुद्ध परीक्षा करनी है।

 $r_1 = 776$ व $r_2 = 534$ के लिए सारणी (परि॰ च~16) प्रारा प्राप्त Z के मारण $Z_1 = 1\,035$ घीर $Z_2 = 596$ हैं।

सूत्र (14 20) द्वारा,

$$Z = \frac{1035 - .596}{\sqrt{\frac{1}{29} + \frac{1}{27}}}$$

$$= (439)/\sqrt{0315}$$

$$= \frac{439}{.2265}$$

$$= 1.038$$

a = 05 के सिए सारणीयळ Z=196 है जा कि 1938 से घधित है। यज H₀ का स्वीकार कर सिया जाता है। इससे जिल्क्यों विकलता है कि गोलह घोर सबह वर्ष की प्राप् के कच्चों की ऊँबाई के भार संगयान सहस्रकार है।

M समय सहसन्बन्ध गुनांकों को सञातोयता की परीक्षा जब कि X>3

वहां परिकल्पना H_0 $\rho_1 = \rho_2 = \rho_2 = \rho_2 = 1$, H_1 नम मे नम नोई दा सहसन्त्राध मुनान समान मही है, ने निल्ड परीका नरती है।

माना कि K समझो से K रमनान प्रतिवासी का स्थम किया गया है जिनके परिवास समझ 11, 12 12, 12 है। किस्ही रो सरा X और Y से इन प्रतिवसी द्वारा परिकर्तनन सहरास्त्राप्त प्रुणोक समझ 1, 13 13 18 है। यदि यभिन्नति सचु है और दशकी परेशा को जा सक्ती है सो सहरास्त्रम्य गुनांको की समानीयना की परीक्षा, Z साना की समानता के पुस्त होती है। इस परिकराना की परीक्षा स भी जिल्का Z-स्वान्यक का प्रयोग करता

होता है भौर यहाँ H₀ की X³-मरीक्षा की जाती है। प्रतिदर्शन X² का परिकलन निम्न सारणी क्लाकर मुख्यता में कर सकते हैं —

प्रतिदर्श संबदा	श्रतिदर्श परिमाण	सहस्य गा गुणांक	Tanh~1 r=Z	श्रवरण के ब्युतका (n-3)	1 1541 (n-3) Z	संद्या (a-3) Z²
ı	n ₁	r ₁	Z ₁	(n ₁ -3)	(n ₁ -3) Z ₁	$(n_1-3) Z_1^2$
2	n_{g}	I.	Z_2	(n_2-3)	(n_2-3) Z_2	$(n_2-3) Z_2^2$
3	ng	$\Gamma_{\boldsymbol{g}}$	Z_3	(n ₃ -3)	$(n_3-3) Z_3$	(n ₃ -3) Z ₃ 2
i	ŧ	•	Ē			•
k	n_k	r_{μ}	Zk	$(n_k - 3)$	(n _k −3) ∠,	$(n_k-3) Z_k^2$
योग				∑ (n ₁ -3)	∑ (n ₁ -3) Z,	∑ (n _i -3) Z _i ²

उपर्युक्त सारणी से परिवालत सरुवायों वा प्रयाग वरके प्रतिदर्शव 🗴 वा मान निकत सुत्र की सहायता से शांत वर सकते हैं —

$$X_{k-1}^{2} = \sum_{i=1}^{k} (n_{i} - 3) Z_{i}^{2} - \frac{\left\{\sum_{j=1}^{k} (n_{j} - 3) Z_{j}\right\}^{2}}{\sum_{j=1}^{k} (n_{j} - 3)} \dots (1421)$$

सारणी द्वारा α सा॰ स्त॰ घीर (k-1) स्व॰ नो॰ के लिए सारणीबद्ध x^2 का मान ज्ञात कर लिया जाता है धीर यदि परिकलित $x^2 > x^2_{k-1}$ हो तो H_0 को घरवीकार कर दिया जाता है धर्मीयु सहामकाथ गुणाको में सजातीयता नहीं है या H_1 स्वीकृत है। इसी प्रकार यदि $x^2 < x^2_{m}$ हो तो H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है धर्मीयु

सहसम्बन्ध गुणाक P1, P2. P2 ..., Pk सजातीय हैं प्रधांत् H1 प्रस्वीहत है।

दिष्पती - यदि प्रभिनति के लिए संगोधन करना हो तो । P का मर्नोत्तम प्रागणक P ज्ञात कर लिया जाता है। इस स्थिति में प्रोतदशक,

$$\chi_{K1}^{2} = \underset{i=1}{\overset{k}{\sum}} (n_{i} - 3) \left\{ Z_{i} - \frac{1}{4} \log_{e} \left(\frac{1 + \hat{\rho}}{1 - \hat{\rho}} \right) - \frac{\hat{\rho}}{2(n_{i} - 1)} \right\}^{3} \dots (14.22)$$

होता है। यहांभी परिकल्पना Ho के विषय में निर्णय अंतर नी मॉनि ही कर लिया जाता है। उदाहरण 147 एव सेवीय साराणिक सर्वेदाण वे यानार्यत विभिन्न प्राप्तु के बच्चो के भार (क्लियाया) और ऊँचाई (मेन्टीमीटर) में सहसम्बन्ध गुणाक परिकलित किये गये । बच्चों की प्राप्तु, प्रतिदर्भ परिसाण और महलम्बन्ध गुणोक निम्न प्रवार वे —

बोरह बयं :
$$a_1 \approx 30$$
, $r_1 \approx 878$
सोतह बयं $n_2 \approx 32$, $r_2 \approx 776$
समह बयं $n_3 \approx 30$, $r_3 \approx 534$
प्रठारह बयं $n_4 \approx 14$, $r_4 \approx 763$

तो परिवल्पना H_0 $P_1 \simeq P_2 \simeq P_3 \simeq P_4$ वी H_1 वस से वस कोई हो P समान नहीं है वे विरुद्ध परीक्षा निस्न सारणी बनावर प्रतिदेशन X^2 हारा इस प्रवार कर सबसे हैं —

n	r	z	(n - 3)	(n-3) Z	$(n-3) Z^2$
30	876	1 37	27	36 99	50 68
32	716	1 03	29	29 87	30 78
30	534	0 60	27	16 20	9 72
14	763	1 00	11	11 00	11 00
			94	94 06	102 18

माना वि मित्रनित उपेक्षणीय है। यत प्रतिदर्शन,

$$x_8^2 = 102 18 - \frac{(94.06)^2}{94}$$

= 102 18 - 94 12
= 8.06

मारणी (परि+ ध~4) द्वारा x² os. 3 ≈ 7 815

परिकत्तिम $x^2>x^2$ 05 3 भाउ H_0 को धारभीकार कर दिया । जिसका चापित्राय है

कि सरा समय सहसम्बन्ध गुवान नवान नहीं हैं। इस स्थिति व Hg स्वीहत है।

कोटि सहसम्बन्ध

माना दि प्रनिदर्भ, ॥ यूनिटा का समूद है जिन्हें ! से क तक प्रतित कर दिया जाता है पोर इस तमूदा ने भयो को कि ही दो लक्षणा के अनुवार कोटिक्त कर दिया गया है। इन दोड़ा लगाणा प सामाध्य की माना जानने के लिए कोटि सहसम्बद्ध-पूर्णांक जान करना हाता है। माना कि समूह के n सबो की कीटियाँ सक्षण A वे सनुसार प्रकृत. X_1 , X_2 , X_3 ... X_n हैं भीर लक्षण B वे सनुसार प्रमण. Y_1 , Y_2 , Y_3 ... Y_n है 1 यह कीटियाँ केवत पूर्ण-सक्षया हो मक्ती हैं जो कि 1 से 1 त तक ही मक्ती हैं 1 इसके साथ यह भी करपना करती जाती है कि किन्ही दो सबी को किटि समान नही है 1 इस स्थित में कीटि सम्सक्ष्मण गुणाक्ष 1_a को निम्न मूत्र से जात कर सकते हैं 1 इसका आविष्कार स्थियर्पत (Speaman) ने किया या स्वतः इसे स्थियर्पन का कोटि सहस्मक्ष्मण-गुणाक्ष भी कहते हैं 1 का सनुस्तर 1, स्थियर्पन के नाम के प्रथम सक्षर का प्रतीक है 1

माना कि वें एक व की कोटियों का सन्तर d, है सर्यात

$$X_i - Y_i = d_i$$

कोटि सहसम्बन्ध-गुणान

$$\tau_{s}=1$$
 $\frac{\begin{array}{c} n \\ 6 \text{ x} \\ -1 \end{array}}{n\left(n^{2}-1\right)}$ (14 23)

इस सूत्र को व्यवक (1414) की सहायता से सुगमता से निम्न प्रकार ध्युतप्र किया वा सकता है।

ब्युत्वसि :--

$$\begin{array}{c}
 \stackrel{n}{\underset{\stackrel{\times}{\longrightarrow}}} X_1 = \stackrel{n}{\underset{\stackrel{\times}{\longrightarrow}}} Y_1 = (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\
 = \frac{n}{1} \frac{(n+1)}{2} \\
 \overline{X} = \overline{Y} \left(\stackrel{\times}{\longrightarrow} X_1 = X_1 Y_1 \right)
\end{array}$$

माना कि $X_i - \widetilde{X} = x_i, Y_i - \widetilde{Y} = y_i$

with $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$

यह जात है कि

$$\sum_{i} X_{i}^{2} = \sum_{i} Y_{i}^{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

d; को निम्न रूप में लिखा जा सक्ता है।

$$d_{i} = \{(X_{i} - \overline{X}) - (Y_{i} - \overline{Y})\}$$

$$\therefore \quad \underset{i}{\times} d_{i}^{2} = \underset{i}{\times} \{(X_{i} - \overline{X}) - (Y_{i} - \overline{Y})\}^{2}$$

$$= \sum_{i} (x_{i} - y_{i})^{2}$$

$$= \sum_{i} x_{i}^{2} + \sum_{i} y_{i}^{2} - 2 \sum_{i} x_{i} y_{i}$$

$$= \sum_{i} x_{i} y_{i} = \frac{1}{3} (\sum_{i} x_{i}^{2} + \sum_{i} y_{i}^{2} - \sum_{i} d_{i}^{2})$$

$$= \frac{1}{3} (\frac{n^{3} - n}{6} - \sum_{i} d_{i}^{2})$$

$$= \frac{1}{3} (\frac{n^{3} - n}{6} - \sum_{i} d_{i}^{2})$$

$$\therefore r_{0} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\frac{n^{3} - n}{6} - \sum_{i} d_{i}^{2})$$

$$\therefore r_{0} = \frac{1}{\sqrt{2}} (n^{3} - n)$$

 $r_{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(n^{3} - n\right)$ $6 \le d^{2}$

$$\approx 1 - \frac{6 \times d_i^2}{n^3 - n}$$

 r_a का परिसर -1 स +1। तन है। बढि r_a =1 हो तो इसका सिम्प्राय: है कि दानो तक्षणों की कोटियों स पूर्ण सहसति है वा कोई घन्तर नहीं है। r_a का सान -1 वोटियों से पूर्ण सबहसति सनाना है।

re की सार्यकता-परीक्षा

धीर

स्पियरमैन सहसम्बन्ध गुणाक र, की सार्थकता-परीक्षा इन प्रकार कर सकते हैं। यदि n>20 हो सो र, वा बटन प्रमाधान्य होना है। चतः र, वे सार्थक होने की Z-परीक्षा की जा सबसी है।

यदि n का मान 10 से 20 हो तो $\epsilon_s \sqrt{\frac{n-2}{1-\epsilon_s^2}}$ का बटन समाभन स्टूईस्ट $-\epsilon$ होना है जिसकी स्व॰ को॰ (n-2) है। यह परीधा उसी प्रकार कर सनने है जैना कि H_0 , $\rho=0$ की परीक्षा में किया गया है।

परि n<10 हो तो इस स्थिति में गुल्वे बटन ना ब्युल्प्स करता होता है। इस स्थिति में परीक्षा का बर्गन इस यूतन के स्तर ने बाहर है।

इदाहरण 148: एक मुस्दरता प्रतियोधिता ने भाग सेने वासी 10 मुद्दियो कर हो निर्णायको द्वारा निम्न कम में कोटियाँ प्रदान की गई ।

प्रथम निर्णायक: 1 6 5 MU 3 4 2 9 7 8 जिनेस निर्णायक: 6 4 9 8 2 3 1 10 5 7

 यह परीक्षा के हेतु. पुलाइ "Rank Correlation methods" by M. G. Kendall की गाँछ । यह जानने के लिए कि दोनों निर्णायकों में सुन्दरता के प्रति कितनी एक सी प्रमिक्ति है. कोटि महसम्बन्ध द्वारा निम्न प्रकार जात कर सकते हैं :---

श्यम निर्मायक द्वारा कोटि (X)	डितीय निर्धाय क हारा को बि (Y)	नोट बल । (X–Y) = d	ď²	
1	6	- 5	25	
6	4	+2	4	
5	9	- 4	16	
10	8	+2	4	
3	2	+1	1	
4	3	+1	ı	
2	1	+1	İ	
9	10	- 1	1	
7	5	+2	4	
8	7	+1	1	
योग		0	58	

उपर्युक्त स्वास के लिए, $n=10, \ \Sigma d_i=0, \ \Sigma d_i^2=58$

द्यतः सूत्र (14.23) द्वारा कोटि सहसम्बन्ध-गुणार,

$$r_{8}=1 - \frac{6 \times 58}{10(10^{2} - 1)}$$

$$=1 - \frac{348}{10 \times 99}$$

$$=1 - 0.35$$

$$=0.65$$

rs की सार्यकता-परीक्षा के निए प्रतिदर्शन,

$$t_{n-2} = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}}$$

$$= \frac{.65 \times \sqrt{8}}{\sqrt{1-(.65)^2}}$$

= 2 42

व = 05 ता = स्त० व 8 स्व० चा० चील ए। का माहणीबद्ध मात्र (वीर० च-3) द्वारा प्राप्त 2 306 है जा कि । के परिकतित मान क कम है। धन १८ की साधेक्ता सिद्ध होती है। धन यह कह मकते हैं कि निर्णायका द्वारा की यह कारियों में उक्त कम का सहसम्बन्ध है। इसका प्राप्तियाय है कि निर्णायका म मुस्त्रका के प्रति पर्याप्त एक सी प्राप्तियाय है कि निर्णायका म मुस्त्रका के प्रति पर्याप्त एक सी प्राप्तियाय है कि निर्णायका म मुस्त्रका के प्रति पर्याप्त एक सी

सामंजस्य गुणांक

निभी-निभी ऐसी स्थिति भी उत्पन्न होती है जि त जुनना नो नोटि p निवायका द्वारा स्वतन्त्र कर में निश्चित नी बाती है इस स्थिति से यह जानना सावस्थन हो जाता है नि एन ही एवन नी नोटियो सत्तास में या नहीं प्रदार निवायकों से साम स्था नहीं। इस जाननारी नो प्राप्त करने ने लिए ने स्वाय तोर स्थित (Kendal and Smith) में एन साप स्था ना प्राप्त करने ने लिए ने स्वाय स्था नहीं। स्था प्रदार निवाय नहीं है। माता नि भी ना साम स्था नुवाय नहते है। माता नि भी ना सामा स्था निवाय वाता है.—

$$w = \frac{12S}{p^2 (n^3 - n)} \dots (14.24)$$

उपर्युक्त सूत्र में S प्रत्येक निर्मायन द्वारा निर्मारित कोटियों ने योगा ना p(n+1)/2 से विचलन का वर्ग-योग है। यहाँ p (n+1)/2 नोटियों ने योग ना नास्य है।

W का मान 0 में 1 तक दिवरण कर नवता है। यदि W≔0 हो, नो इससे यह निष्मर्द निकलता है कि निर्माणकों से लक्षणों ने प्रति एक-मी घषिक्षि नहीं है। यदि W≔1 हो तो इसका धर्य है कि जनसे पूर्णत्या एक-सी घषिक्षि है।

परिकल्पना H_0 W=0 की H_1 : $W\neq 0$ के विकट परीक्षा, χ^2 हारा की जाती है। यहाँ n का मान 7 से प्रधिक होना धावण्यक है सर्थान् n>7 हाना चाहिये।

यहाँ प्रतिवर्शन,

$$\chi_{n-1}^2 = p (n-1) w$$
 (14.25)

के है। यह बटन समयग X⁸ होता है चीर X⁸ वो व्य० वो० (n - l) है.1-८ मा० व्य० यर, निवसानुसार श्र0 के विषय में निर्णय कर निवा जाना है 1

बाद W सार्थन हो हो व बस्तुयो नी नाग्तीनन नोट ना यागणन नजना चाहिय प्राथमा नहीं नप्ता चाहिये । नवीनि W सार्थन न होने नी दिवनि से यह नहना कटिन है कि चारतिन नोटियो ना प्रस्तित है वा नहीं ।

यदि p=2 हो तो कोटि सहमायन्य-गुनाक का प्रयोग गरना ही उपित है।

उराहरण 14.9 : एक पद ने निए, तीन विदेशको ने नी सम्परियो का साक्षात्कार किया और निम्न सारणी में दिये हुए कम ने सम्मदियों को कोटिकत किया :—

मंद्रि स्का	विरेक्त द्वारा कीरियाँ			
	*	च	•	कीर
1	2	1	2	5
2	4	3	4	11
3	8	6	5	19
4	9	9	7	25
5	3	2	1	6
б	5	8	6	19
7	7	5	9	21
8	1	4	3	8
9	6	7	8	21

प्रव यह जात करने के लिए कि विधेपक्षों से नाधात्वार के परवान् प्रस्यविमों की कोटियों के प्रति सहमति है या नहीं, सामबस्य गुनाक का प्रयोग करना उवित है। साथ हो इस गुनाक की सार्यकता-परीक्षा सी की गई है।

यहाँ p=3, n=9 चत कोटियों के योग ना माध्य,

$$\frac{p \times (n+1)}{1} = \frac{3 \times 10}{2} = 15$$

मीर मन्दर्वियों की नोटियों के योग ना शह्य से विवलन के वर्षों का याग,

$$S = (5-15)^{2} + (11-15)^{2} + (19-15)^{2} + (25-15)^{2} + (6-15)^{2} + (19-15)^{2} + (21-15)^{2} + (8-15)^{2} + (21-15)^{2}$$

==450

सून (14.24) डारा,

$$w = \frac{12 \times 450}{9 \times (729-9)} = \frac{5}{6} = -833$$

 $H_0: W \Rightarrow 0$ की $H_1: W \neq 0$ के विरुद्ध सार्यकता परीक्षा सूत्र (14.25) के द्वारा कर सकते हैं।

$$\chi^2 = 3(9-1) \times \frac{5}{8} = 2000$$

माना कि पूर्व निर्धारित सा० स्त० $a = 0.5 \, \xi$ । (पिर० ध-4) द्वारा $a \approx 0.5 \, a$ $a \approx 0.5 \, a$ कम है। यत $a \approx 0.5 \, a$ कम है। यत $a \approx 0.5 \, a$ सामजस्य है। इसका धिश्राय है कि विशेषज्ञों द्वारा थी गई बोटियों में सामजस्य है।

सहसम्बन्ध धनुपात

माना हि दो मतत बहित चर X स्त्रीन Y हैं भीर इनस्र कतनीय सम्बन्ध $Y = \phi(X)$ है। सदि चर Y का X पर समाध्यप्प रैंतिक हो तो सहसम्बन्ध युगांक P ज्ञात करना उचित है। किन्तु चरा X क Y संसमाध्यप्प रैंतिक न होने की स्थिति से सहसम्बन्ध सनुपात P^2 ज्ञात करना उचित है।

चरी X द Y से सहसन्बन्ध प्रतुचात η^2 निश्न प्रवार ज्ञात कर सकते हैं । सहसन्बन्ध स्रतुचार ज्ञात करने ने सिए यह प्रावस्यक नहीं है कि X के एक मान के सगत Y का एक ही मान हो । प्रत यहाँ η^2 के प्रावसक E^2 के लिए भूज, X के एक मान के सगत चर Y के कि मान लेकर दिया गया है । याजा कि X_1 के सगत याज Y_4 है खहाँ । = 1, 2, 3, ..., I प्रीर j = 1, 2, 3, ..., I

गहसम्बन्ध अनुपात

समूही में बर्गों का योशक्स
$$= \underset{i=1}{\overset{I}{\sum}} f_i \left(\overleftarrow{Y}_i - \overleftarrow{Y} \right)^2$$

$$\forall \textbf{x fr} \quad \overline{Y}_i = \sum_{t=1}^{f_i} Y_{ij} f_i \text{ wit } \overline{Y} = \sum_{t=1}^{l} \sum_{j=1}^{f_i} Y_{ij} \int_{t=1}^{l} f_i$$

$$\begin{array}{c}
 f_1 \\
 \chi \\
 j=1
 \end{array}
 Y_i = f_i \quad Y_i = G_i \quad (बान निया)$$

$$\sum_{i=1}^{l} f_i \left(\bar{Y}_i - \bar{Y} \right)^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{\left(\sum_{x=Y_i}^{f_i} \right)^2}{f_i} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{x} Y_i \right)^2}{\sum_{i=1}^{l} f_i}$$

भौर
$$\Sigma X_{ij} = G$$
 (बान सिया)
 $i=1, j=1$

े.
$$\sum_{i=1}^{I} f_i (\overline{Y}_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{I} \frac{G_i^2}{f_i} - \frac{G^2}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} f_i = n$$

$$= \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} f_i = n$$

$$= \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} y_0^2 - \frac{G^2}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} y_0^2 - \frac{G^2}{n}$$

$$\therefore F^2 = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{I} f_j - \frac{G^2}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{I} \frac{G_i^2}{f_i} - \frac{G^2}{n}$$

 E^2 के सिए व्यञ्जक से स्पट्ट है कि इसका मान समूही के परिमाण पर मस्यधिक निर्मर है। E^2 का परिस्ट D से 1 है। यदि प्रत्येक समूह में एक प्रेक्षण हो तो $E^2 = 1$ भीर सब प्रेक्षण एक ही समूह में हो तो $E^2 = 0$ यत प्रेक्षणों के समूहोकरण में विशेष सावधानी वर्तनी नाहिए।

प्रस्तरवर्गं सहसम्बन्ध

प्राय वर्ष या समूह में विश्वमान प्रेक्षणों में साहण्यं की मात्रा बात करन की मात्रायकता होती है। इस साहज्यं मात्रा को धन्तरवर्ग सहसम्बन्ध गुणाक कहते हैं। मुख लेखनों ने इसे समक्षिक सहसम्बन्ध गुणाक (homotypuc correlation coefficient) के लाम से भी लिखा है। इस गुणाक की मात्रायकता जीव विज्ञान में क्मी-कभी नाई गई है। जैसे भाइयों के केंचाई में सहसम्बन्ध या भागों में सहसम्बन्ध जात करना हो तो गृज को चर X धीर धन्य को आधु के धनुसार या सबसे बड़े धीर सबसे छोटे क धनुसार Y मानने से सहसम्बन्ध में मिध्यापन (Spunous clement) धा जाता है बयोकि घट्टो हमार उद्देश्य एक ही परिवार के उन सब सहस्था में सहसम्बन्ध जात करना है जिनका एक सा स्थान हो। यह धनुसद विवार के सहस्था सम्बन्धी

प्रेराणों से पनात्मक सहसम्बन्ध होता है कुछ क्रियेण नियनि में यह सम्बन्ध ऋणात्मक भी हो सकता है। किन्तु उन स्वितियों की यहाँ उनेशा की गई है।

माना रि X_i , । वें वर्ष में । वा प्रेक्षण है य वर्गी की सक्या $I \not \equiv 1.2$ वर्ग म माना कि प्रेक्षणों की सक्या $n_i \not \equiv 1.2,3,...,n_i$ घोर $j = 1.2,3,...,n_i$

माना कि प्रत्येक X_q ना माध्य ह और प्रसरण σ^2 है। एक ही वर्ग के दो सदस्यों में महसम्बन्ध यूर्णांक P_q है और इसका बाकलवा, है। तो

$$r_{1} = i \frac{\prod_{j=1}^{l} n_{j}^{2} \{ \overline{X}_{1} - \overline{X} \}^{2} - \sum_{j=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_{j}} (X_{ij} - \overline{X})^{2}}{\prod_{j=1}^{l} (n_{i-1}) \sum_{j=1}^{n_{i}} (X_{ij} - \overline{X})^{2}} \dots (1427)$$

पदि $n_1 = n_3 = n_3 = ... = n_I = n$ हो, तो

$$r_{t} = \frac{\prod_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} (|\vec{X}_{i} - \overline{X}|)^{2} - \sum_{j=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} (|X_{j} - \overline{X}|)^{2}}{\prod_{j=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} (|X_{j} - \overline{X}|)^{2}} \dots (1427.1)$$

$$= \frac{S_0^2 - S_w^2}{S_0^2 + (n-1)S_w^2} \qquad(14272)$$

उपर्युक्त स्पन्न में S_s^2 विभिन्न सबुहाने वर्गों का योगचल है और S_s^2 समूहों के प्रत्यर वर्गों का योगचल है। S_s^2 वा प्रत्योक्ता सान $\{1 + (n-1)\rho_1\}$ θ^2 और S_s^2 वा प्रत्योक्ति मान $(1-\rho_1)$ θ^2 है।

यदि ho_1 ना मान ऋणारमन हो तो भी $-\frac{1}{(n-1)}$ से कम नहीं हो ननता है

क्वोंकि $P_1 < -\frac{1}{n-1}$ हो तो S_p^2 का प्रत्याचित यान ऋगात्वक तो जायेगा जो कि

प्रसम्भव है। यदि $ho_1 = -rac{1}{n-1}$ हो तो $S_p{}^2 = 0$ हो जाता है जिसका प्रदे है

रिसपूर् माध्यों ने कोई धन्तर नहीं है।

दो सहसम्बन्धित घरों के प्रसरणों की तुलना

माता कि दो चरो X_1 व X_2 के प्रसरण असता σ_1^2 व σ_2^2 है छोर प्रतमें महतान्त्रण गुणांक P है तथा इतके शावसक समय s_1^2 , s_2^2 व t हैं ।

माना कि $X_1 - X_2 = D$ धौर $X_1 + X_2 = S$ है।

तरो D व 🛚 में सहप्रसरण.

$$\begin{aligned} \sigma_{05} &= \text{Cov} \left\{ (X_1 - X_2) \left(X_1 + X_2 \right) \right\} \\ &= \text{E} \left\{ (X_1^2 - X_2^2) - \left(\overline{X}_1^2 - \overline{X}_2^2 \right) \right\} \\ &= \text{E} \left(X_1^2 - \overline{X}_1^2 \right) - \text{E} \left(X_2^2 - \overline{X}_2^2 \right) \\ &= \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \qquad \dots (14.28) \end{aligned}$$

यदि योगों व सन्तरों को प्रतिदर्भ प्रेक्षणों ने लिए क्रात किया गया हो तो 🕬 का फाक्लक,

$$s_{DS} = s_1^2 - s_2^2$$
 (14.28 1)

है। यह मुगमता से सिद्ध किया जा सकता है कि,

$$\sigma^2_{X_1 + X_2} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho \sigma_1 \sigma_2$$
 ... (14 29)

भौर इसका ग्राकलक,

$$s_{X_1+X_2}^2 = s_1^2 + s_2^2 + \pm r \ s_1 s_2$$
 (14.29 1)

इसी प्रकार,

$$\sigma_{X_1-X_2}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\beta \sigma_1 \sigma_2$$
 (14 30)

घौर इसका घाकलक.

$$s_{X_1-X_2}^2 = s_1^2 + s_2^2 - 2r s_1 s_2$$
(14 30.1)

परित्रदेषना $H_0: rac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ की $H_1: rac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}
eq 1$ के विरद्ध परीक्षा इस

प्रकार की जाती है। माना कि D व S में सहसम्बन्ध गुणाक $ho_{
m DS}$ है और इसका ध्रावलक $ho_{
m DS}$ है।

मूत्र (14 1.1) के धनुसार

$$r_{05} \approx \frac{s_1^2 - s_2^2}{\sqrt{(s_1^2 + s_2^2 + 2r s_1 s_2)(s_1^2 + s_2^2 - 2r s_1 s_2)}} \dots (1431)$$

$$\approx \frac{(s_1^2 - s_2^2)}{\sqrt{(s_1^2 + s_2^2)^2 - 4r^2 s_1^2 s_2^2}}$$

$$\approx \frac{(s_1^2 - s_2^2)}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2 + s_2^2 + 1}{s_2^2 + 1}\right)^2 - 4r^2 \frac{s_1^2}{s_2^2}}} \dots (1431.1)$$

$$q = \frac{s_1^2}{s_2^2} = F \ \text{th} \tilde{q},$$

$$\vec{a} \ \ \, \vec{r}_{DS} = \frac{F-1}{\sqrt{(F+1)^2-4r^2\,F}} \qquad ... \, (14\,32)$$

निरानरणीय परिवरपना के भन्तर्गत sps == 0

यदि $s_1^2 > s_2^2$ हो तो r_{DS} का मान धनात्मार होना है धौर $s_1^2 < s_2^2$ हो तो r_{DS} का मान ऋणात्मक होता है ।

os वा धनारमव व सार्थेट मान $\sigma_1{}^2 > \sigma_2{}^2$ वी सार्थवना को भिद्ध करता है प्रणीत् H_1 स्थोहन है ।

देशी प्रकार $_{108}$ बा ऋणात्मव व सार्थव मान $\sigma_1^{\,2} < \sigma_2^{\,2}$ की सार्थवता मिद्र करना 2 प्रथीप्त H_1 एतीकृत है। यदि $_{108}$ वा मान सार्थक व हो हो H_0 एतीकृत होता है, जिसका प्रयं है कि $\sigma_1^{\,2} \simeq \sigma_2^{\,2}$

मिष्या या निरर्थक सहसम्बन्ध

बह सहसम्बन्ध

बहु समाभयन समीतरण से मन्तियन प्रसाण विश्तेषण वे धानगंत एक सन्ता R² का वर्गन दिया गया है। यह मस्ता R² सरस रेखीस गमाध्यण से व्हे के मुन्य है धर्मन् R² समाध्यण द्वारा जनित वर्ग सेंग्र घीर दुन वर्ग सेंग व धरुतन वे समान होता है। R² को निर्मारण गुणाव (Coefficient of determination) करने हैं। इसने धर्मितर प्रमाण विन्तेषण सारमी से दिया गया है हि समाध्यण से विवक्त वर्ग सोग, (1-R²) 25,² रै समान है। ग्रत. R^2 वा पराम 0 मे 1 नर हो सबता है धर्धात् $0 < R^2 < 1$. वयोकि (R^2) ऋषात्मव करापि नहीं हो सबता है। इसी सन्दर्भ मे सन्या R जिसे बहु सहस्रव्यथ-गुणाव कहते हैं, को इस प्रकार समक्ष सकते हैं।

बहु महसन्वर्ध गुणाव R', $\stackrel{\Lambda}{Y}$ चीर $\stackrel{\Lambda}{Y}$ में रैपिक साहतर्थ की मात्रा है। इसकी इस प्रकार भी कह सकते हैं कि वहु महमध्वन्ध गुणाक, R, समस्त चा म समुक्त रैविक माहचर्य की मात्रा है यदि K चर X_1 , X_2 , X_3 , ..., X_K है जो कि न्वतत्त्र या गरनत्त्र कैसे भी हो। मात्रा कि इन चरो पर यादिष्ठक प्रेक्षण $(X_11, X_2, Y_3, ..., X_K)$ है, तो मामाग्य रूप में चर X_1 की चरों X_1 , X_2 , X_1 , X_{1+1} , ..., X_K में सहसम्बन्ध की सात्रा को R_{112} ..., Ω_{11} , Ω_{12} ..., Ω_{13} मात्रा को Ω_{11} ..., Ω_{14} , Ω_{15} ..., Ω_{15} मात्रा की Ω_{11} ..., Ω_{15} मात्रा की Ω_{15} ..., Ω_{15} मात्रा की ै। हम किसते हैं। इस स्थित के खनुत्रक को इसके साथ स्वयं ती सात्र विद्या जाता है। Ω_{15} का तरात्र है। Ω_{15} को तात्र है। Ω_{15} सात्रा विद्या जाता है। Ω_{15} का तरात्र है। Ω_{15} की तात्र ह

K परो $X_1, X_2, X_3, ..., X_K$ के लिए युगल बरो में सरत सहसम्बन्ध-गुणार साम्बूह निम्न होता है :—

यह एन समिन ब्राप्त्र है जिसके विवर्ण ने ब्रग सदैव है होने हैं है ह के ब्रनुनम यह बनाने हैं कि किन चरों में गहमम्बन्ध ज्ञान किया गया है ।

R के मान का परिकारन निम्न सूत्र की महायता से कर सकते हैं '--

$$R_{j 123 ...(j-1), (j+1)...K} = \left(1 - \frac{|P|}{P_{ji}}\right)^{\frac{1}{3}}(1434)$$

जबिक $\mid P \mid$ सरल नहसम्बन्ध-गुणाक ग्राच्युह के मार्गणक (determinant) पा मान है और P_{jj} सहसम्बन्ध गुणाक Γ_{jj} के सहस्थड (cofactor) का मान है । यह विदिन हो कि मृत्र (14 34) में $\mid P \mid$ व P_{jj} मानों का चिह्न गर्दव एव-सा होना है प्रत्यथा R_{jj} 123 ...(j-1), $\{j+1\}$...K का मान एक में श्रीवक हो जायेगा जोकि प्रसम्भव मान है। साथ ही $\mid P \mid \ < P_{jj}$ होता है धन्यथा बहु महन्मक्वन्य गुणाक का मान कान्पनिक हो अयेगा

यदि तीन पर X_1 , X_2 , X_3 हों तो

$$R_{1:23} = \left(1 - \frac{|P|}{P_{11}}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad \dots (14.35)$$

$$R_{2^{*}13} = \left(1 - \frac{|P|}{P_{22}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \dots (14.36)$$

$$R_{3 \text{ lit}} = \left(1 - \frac{|P|}{P_{33}}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad(1437)$$

जबकि

और $R_{1\,23}$ पर X_1 वा घरों X_2 व X_3 छे बहुतहसम्बन्ध है। इस प्रवार सन्य दो वी स्थास्याची जासन्ती है।

यदि बहुतहरू स्वाध-पूर्णाव का मान ! हो तो इसका सर्थ है कि किसी एक कर का साग करों ने सादके कह सहस्रकार है । यही बहुत्त है कि वह समायवण रेगा के समजन से R का मान जिल्ला स्राधक होना है जनता ही दैनिक समीकरण के सरकार को उपयुक्त निया गुढ समाना आता है।

यदि R_{j} 12,3...j-1, j+1...X=0 हो तो इसका प्रश्नियद है कि चर X_{j} का प्राय परो में कोई सम्बन्ध नहीं है।

यदि भीन बसी X_1 , X_2 , X_3 में X_1 का X_2 , X_3 बर, X_4 बर X_2 , X_3 पर तथा X_4 वा X_1 , X_2 पर गमाधरण ज्ञान किया गया हो जो जीन गमाध्यस्य-गमानो के मंगानी होने में किए प्रायम्बन नवा प्रयोध्य अनिवस्य,

$$r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{12}r_{23} = 1$$

है। उदाहरण 14.10 चारा चरा X_1, X_2, X_3, X_4 , जो हि उदाहरण (13.7) में होना गये है, पर दिये गये प्रेराण को नेकर कर X_1 का X_2, X_3 , में चत्र नाग्याकरण गुणांक विकास प्रकार आग कर करते हैं:—

उदाहरण (137) के बात किये गढ़े भरों ने बर्गों के बोर प्रीट पुनवन्ती ने बोर्गे को प्रधीय करने सुक्

$$\mathbf{r}_{ij} = \frac{\mathbf{x} \, \mathbf{x}_i \, \mathbf{x}_i}{\sqrt{2 \mathbf{x}_i^2 \, \mathbf{x}_i^2}}$$

वहाँ i, i=1, 2, 3, 4,

की सहायता से सरल सहसम्बन्ध-पुणाक ज्ञात वर निष्, जो कि निम्न हैं '--

$$r_{18} = \frac{319 50}{\sqrt{14110 \times 324 \cdot 4}} = .47$$

$$r_{18} = \frac{125 \cdot 60}{\sqrt{14110 \times 205}} = .71$$

$$r_{28} = \frac{427 \cdot 00}{\sqrt{14110 \times 28124}} = .88$$

$$r_{29} = \frac{30.74}{\sqrt{324 \cdot 44 \times 2205}} = .36$$

$$r_{20} = \frac{99.94}{\sqrt{324 \cdot 44 \times 281 \cdot 24}} = .33$$

$$r_{34} = \frac{43.68}{\sqrt{22.05 \times 28124}} = .55$$

इन परिकृतित सहसम्बन्ध-गुमाकों की सहायता से विकृत सहसम्बन्ध-गुमाक प्राब्युह प्राप्त होता है।

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot 47 & \cdot 71 & \cdot 68 \\ \cdot 47 & 1 & \cdot 36 & \cdot 33 \\ \cdot 71 & \cdot 36 & 1 & \cdot 55 \\ \cdot 68 & \cdot 33 & \cdot 55 & 1 \end{bmatrix}$$

सूत्र (14.34) के भनुसार, बहु सहसम्बन्ध गुणांक

$$R_{1\cdot23i} = \left(1 - \frac{|P|}{P_{11}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

म्रतः उत्पर दिये माष्यूह का सार्रायक | P | तथा सहस्रष्ट P₃₁ ज्ञात करने हैं। तथाज (1:grange's) विधि का प्रयोग करके सार्रायक का मान ज्ञात किया।

$$|P| \approx \begin{vmatrix} 1 & 47 & .71 & 68 \\ .47 & 1 & .36 & .33 \\ .71 & .36 & 1 & .55 \\ 68 & 33 & .55 & 1 \end{vmatrix}$$

पहले स्तम्भ के बाबों के पदों में विस्तार करवा,

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & -36 & 5 & -47 & -47 & 71 & 68 \\ 36 & 1 & 55 & -36 & 1 & -55 \\ 33 & 55 & 1 & -33 & 55 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ 71 \begin{vmatrix} -47 & -71 & -68 & -68 & -47 & 71 & 68 \\ 1 & -36 & 33 & 1 & 36 & -33 \\ 33 & 55 & 1 & 36 & 1 & 55 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \left\{ 1 \left(6975 \right) - 36 \left(-9785 \right) + -33 \left(-97320 \right) \right\}$$

$$- 47 \left\{ -47 \left(8185 \right) - -36 \left(3360 \right) + -33 \left(-9457 \right) \right\}$$

$$+ 71 \left\{ 47 \left(1785 \right) - 1 \left(3360 \right) + -33 \left(-9105 \right) \right\}$$

$$- 68 \left\{ 47 \left(-1320 \right) - 1 \left(-2892 \right) + -36 \left(-9105 \right) \right\}$$

$$= \left\{ 589680 \right\} - 47 \left(116654 \right) - 71 \left(2556 \right) - 68 \left(22338 \right)$$

— 589680 - 054827 - 181476 - 151898

== 201479 जबकि सहसम्बद्ध,

$$\therefore R_{123i} = \left(1 - \frac{201497}{589680}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(1 - 3417\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt{6583}$$

$$= 811$$

पर X_1 का चरो X_2 X_3 व X_4 से उच्च कम का बहु सहसम्बन्ध है।

प्राशिक सहसम्बन्ध-गुणाक

यह बहुवर बटन में विन्ही दो चरों में सहसम्बन्ध की मात्रा है जब कि प्रत्य बरों के रैतिक प्रभाव का इन दाना बरा में निरमन कर दिया गया हा। यदि त्रिवर बटन में बर X_1 , X_2 X_3 हैं ता X_1 व X_2 म सहमन्द्रक्ष जानि X_1 व X_2 स तीसरे वर के रैतिक प्रभाव का निरसन कर निया गया हा, ग्रांशिक सहसन्ध्य कहवाता है। इसे $\rho_{12/3}$ हारा निरुप्त किया जाता है और $\rho_{23/3}$ के प्रवित्त किया जाता है और $\rho_{23/3}$ के प्रवित्त किया जाता है और $\rho_{23/3}$ के प्रवित्त करते हैं।

यदि निचर बटन म चर x_1 , x_2 , x_3 यपन-धपने माध्य से विचलित चर हैं तो x_1 व x_2 म भाशित सहसम्बन्ध न हतु x_1 व x_2 क प्रत्यत्त भाग में में x_3 का बह मान घटा हैं और x_1 व x_2 को भ्रभाविन बचना है। भागा नय चर $x_{1:3}$ व $x_{2:3}$ हैं एता निर्माव किया है। x_1 व x_2 म आशित सहसम्बन्ध-मुणात ही X_1 व X_2 म आशित सहसम्बन्ध-मुणात कहताता है। $x_{1:3}$ व $x_{2:3}$ म शनिम्बन्ध मुणात ही किया सकत है —

$$x_{13} = x_1 - r_{13} \frac{b_1}{s_3} x_3$$

where $x_{23} = x_2 - r_{23} \frac{s_2}{s_3} x_3$

यहाँ $\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}$ $\mathbf{s_3}$ कमल X_1, X_2 व X_3 के ब्राकृतित मानक विषतन हैं। सरल सहसम्बन्ध गुणाव कात करें ता

$$r_{123} = \frac{r_{12} - r_{13} r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13})(1 - r_{23})}} \qquad (14.38)$$

है : इसी प्रकार यदि चर X_1 X_3 X_3 द X_4 ह ता X_1 , व X_2 म आशिव सहसम्बन्ध जबकि X_1 व X_2 से चरा X_3 व X_4 क रैसिन प्रभाव का निरसन कर दिया गया हा, $\mathbf{r}_{12.24}$ द्वारा निरूपित किया जाता है और $\mathbf{r}_{12.34}$ के लिए सुत्र निम्न होता है :—

$$r_{1231} = \frac{r_{123} - r_{143} r_{243}}{\sqrt{(1 - r_{143})(1 - r_{243}^2)}}$$
(1439)

सूत्र (1439) स्र $_{123}$ का मान मूत्र (1438) डारा तथा r_{143} व r_{243} के मान (1438) के समस्प सूत्री

$$r_{143} = \frac{r_{14} - r_{13} r_{43}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{43}^2)}}$$

$$r_{243} = \frac{r_{24} - r_{23} r_{43}}{\sqrt{(1 - r_{2m}^2)(1 - r_{2m}^2)}}$$

हाराक्षात करने प्रतिस्थापित कर दिये जाते हैं भीर 1_{58 34} का मान परिकासत कर लिया जाता है।

यदि चरा को सक्या चार स व्यक्ति हा तो व्यक्ति सहसानगा-गुणांत के लिए पूज प्रस्मेल जरिल हा जाता है। किन्तु इसका बाल सहस्यका मुजान चाम्यूह की सहायता ॥ इसत करता मुनान है। वामा कि 11 चर X3, X3, X3, ..., X4, है चौर महामका प्रमान प्रमान होता है। वामा कि 11 चर्मान होता है तो किसी दो चरा X, व X, म वांगिक सहमाना , मुजांव 11,133 ... K जबकि 1,35 मीर धानुकान 1,2,3, ... k मे 3 व / मरिपानन नही है निम्न मुन द्वारा साम निया जा सकता है ...

$$r_{jl} = \frac{P_{jl}}{123 \text{ s.i.k}} = \frac{P_{jl}}{(P_{jl} P_{jl})_{\frac{1}{2}}}$$
 . (14.40)

जहां P_{μ} , P_{μ} क P_{μ} गहसम्बन्ध-पुणार कान्यूह र गार्राजर मध्यम v_{i} v_{i} , v_{μ} र सहराजर है v_{i}

माणिक महमञ्दरप्र-गुलाक का पराश - 1 व ने 1 हाता है प्रवाद

िष्पणी यह व्यान रहे वि बहु तथा यांतिय सहसम्बन्ध-मुनाव ने लिए जो त्रत्र संग्रं से ये हे वे समय प्राथमी ने यानमन है। प्राथमी ने नियति म बहु सहस्रवन्ध गुनाव ना $R_{j,12,...,j} = j, j+1,...$ व मानित न रहस्यय गुनाव नो $P_{j,123,...}$ हारा निरुचित न रहे है। इनके यानसन् ना बात बदन न निए प्रायन चर $X_1, X_2 \ldots X_K$ पर त सान प्रेशण प्रनिदर्श म निए गान है जिनके हारा नमन

का परिकालन किया जाता है।

माशिक सहसम्बन्ध-गुर्णाक की सार्थकता-परोद्या

यदि परिवस्त्रतः

के किस्त परीक्षा नरनी हो था। ~पीक्षा का प्रयोग करने हैं। यह परिशा H_g, P ≕ 0 की परीक्षा के प्रमुख्य है। यदि प्रतिदर्श में दे परो गर् ॥ स्वरूप मेदल लिए गरे हुं। ही प्रतिदर्शक,

$$t_{n_{-}k} = \frac{r_{123}...k}{\sqrt{1 - r_{1/123}^2...k}} \dots (14.41)$$

यदि t मा परिकतिन मान पूर्वनिधारित a सा॰ स्त॰ a (a-k) स्व॰ को ॰ ने लिए सारणेबद्ध मान से प्रधिक हो तो H_0 को पस्त्रीकार कर दिया जाना है जिनका प्रप्ते हैं कि प्राधिक सहस्रक्वन्न-पुणाक का मान नार्यक है। उनके विषयीन स्पिति से H_0 को न्दीकार कर सिया जाता है जिनका प्रमिन्नाय है कि H_0 निर्द्यक है।

खबाहरण 14 11 जहाहरण (14 10) में निर् गरे बसे X_1, X_2, X_3, X_4 में सत्त्व सहमम्बन्ध-गुणावों को प्रयोग करने धारिक नहमम्बन्ध-गुणाव $\eta_{2:23}$ का परिकलन तथा इसकी सार्धनता परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं —

सरत महलम्बन्ध-गुणान है,

$$r_{12} = 47$$
, $r_{13} = 71$, $r_{14} = 68$
 $r_{23} = 36$, $r_{24} = 33$, $r_{34} = 55 \le n = 20$

भूत्र (14 38) व समरप भूत्रो डाया गृ_{टि व}र गृ_{हित्र} व गृ_{हर} के मान जान जेरते भूत्र (14 39) में रखते पर गृ_{ट वर्ष} का मान जान कर विचा गया है।

$$\begin{split} \mathbf{r}_{12:3} &= \frac{4^{\circ} - (71) (36)}{\sqrt{(1-71^{\circ})(1-36^{\circ})}} \\ &= \frac{2144}{\sqrt{4959 \times 8704}} \\ &= 3263 \\ \mathbf{r}_{14:2} &= \frac{-68 - (\cdot71) (\cdot55)}{\sqrt{(1-71^{\circ})(1-\cdot55^{\circ})}} \\ &= \frac{\cdot2895}{\sqrt{\cdot4959 \times 6975}} \\ &= \frac{\cdot33 - (36) (55)}{\sqrt{(1-36^{\circ})(1-\cdot55^{\circ})}} \\ &= \frac{\cdot1320}{\sqrt{\cdot8704 \times 6975}} \\ &= \cdot1694 \\ &= 3263 - (4923) (1694) \end{split}$$

$$r_{12:34} = \frac{3263 - (4923)(1694)}{\sqrt{(1 - 4923^2)(1 - 1694^2)}}$$

$$= \frac{2429}{\sqrt{(7576)(9713)}}$$
$$= 283$$

परिकल्पना.

$$H_0: \rho_{1231} = 0 \iff H_1 \quad \rho_{1231} \neq 0$$

के विरुद्ध परीक्षा प्रतिदर्शन (1441) हे द्वारा इस प्रकार कर सकते हैं 🛥

$$1 - \frac{283\sqrt{20-4}}{\sqrt{1-283^2}}$$

$$= \frac{283\times4}{959}$$

=118

गारणी (गरि॰ च-3) हारा a= 05 बोर 16 स्व॰ को॰ के तिए t=2120 जा नि परिकतित । ने मान से बाँधर है। यत 11₀ स्वीहन है।

रतवा मभिन्नाय है नि राहु हा निर्धेत हे आवित सर्गान्तन्य गुणार राहु हा वा परिवासन मृत्र (1440) वी सहायता सा निस्त प्रकार रह सरते हैं। यहा

$$r_{22\,11} = \frac{P_{13}}{(P_{22}\,P_{32})^{\frac{1}{3}}}$$

उदाहरण (1410) में किये परिकलना की सहायता से,

二十 116654

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 36 & 33 \\ 36 & 1 & 55 \\ 33 & 55 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{22} = \begin{vmatrix} 1 & .71 & .68 \\ .71 & 1 & .55 \\ .68 & .55 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 (.6975) - .71 (.3360) + .68 (~.2895)$$

$$= .6975 - .238560 - .196860$$

$$= .262080$$

$$F_{12:33} = \frac{.116654}{(.589680 \times 262080)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{.116654}{(.154543)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{.116654}{(.154543)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{.116654}{.3934}$$

यह बात व्यान देने योग्य है कि 13234 का मान दोनो सूची द्वारा नहीं है जो बोडाना। प्रत्तर है वह संत्याक्षों के निकटन के कारण है।

= 296

कुछ सम्बन्ध

माशिक सहसम्बन्ध-गुणाक तथा याशिक समाध्यण गुणाको मे निम्न सम्बन्ध होता है.

$$\vec{r}^2$$
jf 12....k = $\vec{b}_{j,l,12....k}$ $\vec{b}_{lj,12....k}$ (14.42 याद केवल तीन घर X_1, X_2, X_3 हों ती

$$r^2_{123} = b_{123} b_{213} \dots (14.42.1)$$

यदि k चर X₁, X₂, X₃, X_K हैं और चर X₁ का X₂, X₃, X₃, X_K से बहु सहसम्बन्ध-गुणाक R1 23 ···· है हो इसका अन्य आशिक सहसम्बन्ध-गुणाको से सम्बन्ध निम्न होता है :---

$$1 - R^2_{123...K} = (1-r^2_{12})(1-r^2_{122})....(1-r^2_{1K-23...K-1})....(14.43)$$

प्राताबली

- क्या सहसम्बन्ब-गुणाक एक से अधिक हो सकता है? अपने उत्तर की तथ्यो द्वारा 1. पृष्टि कीजिये ।
- यदि «x2 और «y2 दो स्वतन्त्र चरा X व Y के प्रसरण हैं तो मिद्र कीजिये कि 2. (aX+BY) 本 知初で (a2 ax2+B2 ax2) (1

- निय्न सहस्यन्य-गुणांनो का ज्यामितीय निक्पण कीश्रिये :—
 - (i) r=068° (ii) r=-50 (iii) r=02 (iv) r=1
- उ मदि दो चरो X व Y में सहमस्त्रन्थ धनास्त्रन है हो बताइये कि चरो X घोष - Y में सहसम्बन्ध धनास्त्रन होगा या ऋणास्त्रन ?
- (प) यदि प्रधीर , दी चर हैं जिनके माध्य मृत्य है क समान प्रमरण हैं है
 भीर इनमें महसम्बन्ध भी मृत्य है तो सिद्ध वीजिये कि

u=x cos a+y sin a

सीर y==x sin a − y cos a

का समान प्रसरण 🕫 है भीर महसम्बन्ध शुन्य है।

(वा॰ ए॰, देहती 1952)

- सिद्ध की जिमे दि सहसम्बन्ध मूल बिन्दु मोर रेशनी से परिवर्तन के प्रभाव से मुक्त है।
 (थाड० सी० ए० डस्पू, 1964)
- 7. सहसम्बन्ध के बर्च तथा सार्थवता की सवरवना को स्पट कांत्रिय ।

(चैं।= राय=, बाइसीर, 1966)

- 8 निम्न प्रेक्षणो ने लिए कार्ल विकासन सहमान्यन्थान का विकासन कीजिय ।
 - X 22 35 23 19 33 58 31 22 29
 - Y: 27 34 32 24 33 48 29 25 29

(केरल, 1969) (उत्तर :=0 953)

 युक पूल प्रवर्तनी में तीन निर्मायकों ने एक प्रशर के 80 मुख्य कूमी मो निरम कोदियाँ प्रशास की :---

বিশ্ববিদ বিশ্ববিদ					4					_
	A	В	С	D	E	F	G	Ħ	ſ	1
P	8	7	5	3	6	2	9	10	1	4
Q	9	16	3	ı	5	4	7	6	2	8
R	10	5	4	2	7	3	R	9	1	6

उपर्युक्त कोटियां द्वारा सामजस्य गुणाव जानं वीजिय यौर इसवी मार्यवसः वी वरीक्षा वीजिये है

 एक सम्बद्ध सहसम्बद्ध नुपार का परिचलक करने वर निम्म समर सान प्राप्त हुए,

कुछ समय पश्चात् जाँच करने पर पता चला कि उसने दो यूगल

ये । सहसम्बन्ध-गुणाक का गुद्ध मान ज्ञात कीजिये ।

 तिम्न सारणी में बुध वर्षों में बैको वे चयन खाते में जमा धन (करोड डालर) भीर ताला बन्दी व हबतालो की सख्या (हजारों में) दी गई है। सहसम्बन्ध-पूगाक ना परिकलन की जिये भीर इस पर टिप्पणी लिखिए।

12. विभिन्न चरों में सहसम्बन्ध ग्राब्यूह निम्न दिया गया है।

सनाक की उपन	प्रति पुत्र (Clump) प्रभागी दीवियों की सक्या	मेर्चो (Spikes) की सबया	प्रतिस्पाद्कतेट कर्नेतीं की सक्या
(X ₁)	(X ₂)	(X ₃)	(X4)
X ₁ 1.00	0.712	•789 .	.714
X ₂	1 00	-789	.730
X_3		1.00	.791
X ₃ _ X ₄			1 00

- (ा) वह सहसम्बन्ध-मुणाक R_{1 234} का परिकलन कीजिये।
- (॥) प्राधिक सहसम्बन्ध-गुणाक 13323 का परिकलन वीजिये ग्रीर इसर सार्यकता-परीक्षा वीजिये जबकि प्रतिदर्श में चरो पर 15 सगत प्रेक्षण थे।
- 13. नायों पर नियं गये एक प्रयोग में 127 गांव मूली तथा 35 गांव हुए देने वाली भी। इन मूली तथा हुए देने वाली गांयों के मूत्र पीटासियम तथा पवनशील पोटासियम से सहसंबन्ध-गुणाक त्रमण 0-832 और 0972 थे। परीक्षा की जिसे कि मूली तथा हुए देने वाली गांयों के माल में मूत्र पीटामियम तथा पवनीय पीटासियम में सहसंबन्ध-गुणाक समान है।

14. निस्त सारणी में मायो को सक्या, अन्तर्युं हीत सोडियम तथा पदनीय सोडियम सम्बन्धी प्रेक्षण दिये गये हैं जो नि विभिन्न रूपो में दिये गये थे ।

गार्थों की शब्दा	शन्तर्गृ होत सीहियम	पचनीय सोडियम
5	8.5	61
4	12 5	9 5
1	42	3 1
6	60	1.5
3	23 0	8.5
3	23 0	68
1	5 1	4 1

- (1) प्रत्यहुँ हीत साडियम यथा पश्नीय शाडियम म सहसम्ब ध मुणार ज्ञान कीतिके ।
 - (2) पहिलालित सहसम्बन्ध गुणांव की नार्यकता-गरीक्षा की विषे ।
- (3) इस लगत डाया सहसम्बन्ध गुणान P नी 99 प्रतिचत विस्थान्यना सीमाऐ सात होनिये।
- 15 12 गोधनी ने घालगंत उर्वर दोजियो (fertie tilfers) नी मध्या घीर घनुर्वेर दोजियो (aterile tilfers) नी सच्या निम्न प्रनार है ---

লাঘৰ খৰাক	उदर दीवियों की मंदरा	व्यनुर्देश शेषियों की संक्रम
1	378	818
2	598	943
3	382	1135
4	377	1171
5	388	727
6	611	1660
7	242	884
8	442	1274
9	409	862
10	368	1030
11	583	834
12	330	1029

उदंर दोत्रियों की संस्था व धनुकंर दोवियों की मन्त्रा मे महमम्बन्ध-गुणाक जात कीजिये ।

- 16. 6 मुसरो पर प्रयोग झारा शारीरिक भार (शाम) X और कैन्सियम की माना (शाम) Y मे परिकत्तित सहसम्बन्ध-गुणाक 0-98 है। परिकल्पना शारीरिक मार और कैल्सियम की मात्रा मे परिपूर्ण सहसम्बन्ध है, की परीक्षा कीनिया।
- 17. चूहो पर पाँच विभिन्न परोक्षणो के बन्तर्गत कुल भार वृद्धि और कुल लाईसीन की मान्ना में सहमम्बन्ध-गुगाव और चूहो की सहसा निम्न प्रकार थी .—

पुद्दों पी संस्था प्रति बीचन (n)	तहबमन्द्र-दुवांच (१)
5	0 975
6	0 990
5	0-925
s	0.865
6	0 891

समग्र मे इत महसम्बन्ध-गुणाकों की भवानुगयता की परीक्षा की विमे ।

 18. 16 विद्यार्थियो की गणित नथा भौतिक विज्ञान के झाखार पर कोटियाँ निम्न पासी गयी '---

_									
	गणितः	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
		9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,
	শীবিশ বিলা	1,	10,	3,	4	s,	7,	2,	6,
		8,	11,	15,	9,	14.	12,	16,	13.

गणित तथा भौतिक विज्ञान में कुणलता के प्रति इस समूह का कोटि सहसम्बन्ध-गुणाक ज्ञान कीजिये ।

- (धानरा, 1952) यदि नर Y की चर X पर और X की Y पर समाध्यम रेखाएँ क्रमणः

19. यदि नर Y को चर X पर और X नी Y पर समाध्यम पेताएँ कनमः $Y = a_0 + a_1 X$ भौर $X = b_0 + b_1 Y$ है तो सिद्ध की विषे कि $a_1b_1 = r^2$.

(बी• ए•, सदास, 1967)

- 20. शब्याय 12 की प्रश्तावारी के प्रश्त 12 में दिये गये न्यास के लिए,
 - (i) चर Y का परो X1, X2, X3 से बहु महसम्बन्ध-पुणाव शात की विमे ।
 - (ii) भ्राधित सहसम्बन्ध-मुकांत द्वा ३३ का परितासन कीनिये भीर इसकी सार्थकता-परीक्षा कीनिये ।

टिप्पणी: प्रशासनी में विश्वविद्यालया ने दिये गये प्रश्न मूल न्य म मांग्य भाषा में पे जिनका बही हिन्दी कनुवाद दिया गया है।



सुषनान वह सस्या है जो एन घर ने निए निसी समय, स्थान या स्थित में परिमाम और प्रत्य समय, स्थान या स्थिति में परिमाम के प्रतुपान नो निरुप्ति करती है। मूचनाक के द्वारा समय-समय पर या एन स्थान से दूसरे स्थान में प्रापंतिक परिवर्तन ज्ञात किये जाते हैं। वैमे-वावस्थन क्स्तुयों ने वर्तमान मूस्यों और पिछले किसी प्रत्य वर्ष के मूस्यों में के सनुपात को मूचनान ने रूप में ज्ञान करते हैं या दिल्ली के बहु पर निर्माण के स्वत्या के स्थान करतुयों ने, मूस्यों में प्रतुपात को मूचनान ने रूप में ज्ञात करते हैं जिससे कि यह पता चलता है कि दिल्ली की प्रतेशा क्ष्मवर्ष में जनन-सहन ने व्यव में विनना प्रन्तर परता है। इस माप का प्रयोग सरकार द्वारा मून्य एवं बेनन निर्माण नाम्बन्धी नियम बनाने के हेनू भी विधा जाना है। मित्रों के मार्गिक भी वर्मनार्थिया ने बेनन रहन-मन्त के सर्वों के प्राप्तार पर निर्धाणित करते हैं भीर जो समय-समय पर मूल्यों में परिवर्तन होते हैं उनके प्रतुपाद देवनों में भी परिवर्तन कर दिये जाते हैं। इसके धनिरिक्त सुषवाक द्वारा स्थीति (Inflation) या प्रपस्तिति (deflation) को स्थिति का जो जान होता है। सर्वप्रसम मूचवाक का प्रयोग स्थूट (Dulot) ने मन् 1938 में दो निम्न समयों पर मूख्यों के दोन की तुनना करते किया था।

बीसबी शताबरी में मूच्य भूजवान के मितिरत्त वस्तुमों ने उत्पादन या उपभीग मानामों में समय या स्थान ने धनुभार परिवर्तन जानना भी भरपधिन प्रचलिन है। धनः मूचनान द्वारा सदैव दो स्थितियों की नुनना की जानी है चाहे वह दो विभिन्न समय हीं या दो विभिन्न स्थान।

तुनना वे हेतु विसी एक निश्चित समय पर विन्ही बस्तुमो वे मून्यों व मात्रामों के मिन सोवंद सवाय हो। या मन्य विसी खोन से समुहीत करने होते हैं 1 इस समय को स्वायत करता (मिन्न १०००) नहते हैं। प्रत्य समय पर प्रवास पर प्रवास पर प्रवास करता हो, उन्हों वस्तुमो के मून्य व मात्रामों सम्बन्धों सोवंद एक सिम प्रयास पर प्रवास जलका हो, उन्हों वस्तुमों के मून्य व मात्रामों सम्बन्ध सामय समय समय की नदनुमान बस्तुमों के मून्य व मात्रामों के गुणनरून के सीन वा मात्राम परित्यत कर विद्या जाता है। विदिष्ट समय की सस्या की माम्य राम स्वाम की सम्या है। विदिष्ट समय की सस्या की माम्य राम प्रवास करता है। विदिष्ट समय की सस्या की माम्य राम प्रवास की सम्या है सम्या प्रवास की साम है। विद्या ना स्वास है सम्या प्रवास की स्वास की साम प्रवास की सम्या प्रवास की सम्या है स्वास स्वास की साम स्वास की सम्या प्रवास की सम्या है। व्यवस माम्य स्वास की साम स्वास की सम्या स्वास की सम्या है। स्वास ने स्वास की साम स्वास की सम्या है। स्वास माम्य है स्वास माम्य है। स्वास समय है स्वास प्रवास की साम साम स्वास की साम साम स्वास की साम समय है सीर इसने द्वारा हम मान स्वास (Value ratio) ज्ञान कर सम्वत है।

जबिक P – V में कुल मूल्य प्रभाव का भाष है।

Q- V में बुल मात्रा प्रभाव का माप है।

गूत्र (151) का प्रयोग साधार के रूप में ही किया जायेगा।

सूचवां के जात वरने की विधियों एक सूत्रा को जानने से पहले धारत पद्धति को समझना लासप्रद होया जो कि निस्त प्रकार है —

I₀₁ यह समय 1 (निर्दिग्ट वाल) के निगर समय 0 (प्राधार वात) की धरोक्षा सूचवांक है।

Pot वैवत मूल्य के लिए 0 बार की धरोद्धा बाल 1 का मुखरार है।

Qoi नेवल मात्रा ने लिए 0 बाल नी अपेक्षा काप ! का मूचकार है।

No मनय 0 (माधार कान) पर पदार्थी की सम्या है।

N. समय ! (निरिध्ट शाल) पर पदावाँ की मन्या है।

Not जन यहायों की संस्था है जो दोनों समयों में सार्व (Common) है। इन पदायों को द्विवर्णी पदार्थ (binary commodities) बहुते हैं।

सत में पदार्थ को नेक्य एन नाउँ से वार्य जाते हैं ब्रिडिनीय परार्थ सहनाते हैं नयोंकि हुए नये पदार्थों नी उत्पत्ति हो जाती हैं ब्रीट हुए परार्थों ना उत्पादन समाया हो जाता है। इनने मितिस्ति सनुधों ना प्रयोग मामाजिन परिवर्तनों, वंतानिन पादित्तरों सार्दि ने नारण बदलता रहना है धर्मान् हुए वस्तुर्गे यो चान से हैं हुए बयों नाद उत्पादित नहीं में जाती हैं नयोंनि उनना स्थान नई यन्तुर्गे प्रदूष नर तिती हैं। मंत्रन ने सनुगार भी माक्यसनतार्थं बदलती रहती हैं तह अदितीय पदायों ने मन्या

$$= (N_0 - N_{01}) + (N_1 - N_{01})$$

= $(N_0 + N_1 - 2 N_{01})$ (152)

ŧ1

द्वती प्रवार प्रतिदर्श के निए मभी गवेननो की छोटे सक्षरी द्वारा निर्मात करते हैं। जैने सिंदतीय प्रशाबी की गृन्या को कास 0 थ 1 में n_0 क n_1 तथा दिवर्षी पदाची की सन्या को n_{01} द्वारा निर्मात करते हैं। 0, 1, 2 सादि समयों में γ -यों को p_0 , p_1 , p_2 सादि द्वारा और सामाया को q_0 , q_1 , q_2 द्वारा निर्माण करते हैं। इन समयों पर प्रतिदर्श के लिए क्ष्म पुष्य समय निर्मा होने हैं —

o₀ n, n₁ n₂ \$ p₀ q₀, \$ p₁ q₁, \$ p₂ q₂ इमी प्रसार द्विवर्गी पदार्थों ने कुत बूल्य हैं,

π₀₁ π₀₁ π₀₂ Σ p₁ q₁, Σ p₂ q₂

गुचकांक रचना की विधियाँ

मूपनोन मात करते को घोषो विधियों है। गर्दन ही मूपनोन बाद करने समय नर्द प्रकार को कठिनाइसी सामने बादों है। किर भी बुछ विधियों प्रधिकतर उपयुक्त वाई, जाती है। ऐसी ही बुख विधियों का वर्षन यहाँ दिया गया है। किसी भी विधि द्वारा सूचवाव ज्ञान वरने में आधार वर्ष ने मान वा 100 के नुस्य मान लिया जाना है और अन्य वर्ष ने मान वो 100 वो नुनना में दिया जाना है प्रचान् विधि द्वारा जो मान प्राप्त होता है जमें 100 में युका वर दिया जाना है। इसी प्रकार प्राप्त सन्या वो सुचवाव वृहते हैं।

मूल्यों के योग के अनुपात द्वारा

मानाकि प्रतिदर्शमे तपदार्थों के मुख्यों का वर्षों । व 0 के लिए जात किया गया है। वर्षे 1 में वर्षे 0 की घपेला मूल्य मूचकाक है।

$$P_{\theta l} = \frac{\sum_{i} p_{li}}{\sum_{i} p_{0i}} \qquad (153)$$

यह विधि सबसे सुगम है। विन्तु इसमें यह दाय है कि विभिन्न पदार्यों की समान महत्त्व दिया गया है जो वि ज्यावहारिक इंग्टिस उचित्र नहीं है।

उदाहरण 15.1 तुम्य वितरण योजना, इपि महात्रियालय, उदयपुर से दूध स्रीर इप के पदायों के भाव सन 1965 व 1972 स निम्न थे—

दूध और दूध के पदार्थ	1965 मुस्य रु० प्रति रिसो	1972 মূল্য হ৹ মরি বিলী
दूध	0.80	. 1.20
षी	8 25	11.00
मक्लन	8 00	12.00
ग्राईसत्रीम	8.00	9 60
দীন (40% चर्बी)	9 00	13.00
कुल	34 05	46°R0

वर्ष 1965 में घ्रमेशा 1972 के लिए सूत्य स्वकार निस्न प्रकार कात कर सकते हैं— सुप (153) ी सहायना से सूत्य सुवकाक,

$$P_{01} = \frac{4680}{3405} \times 100$$

=1374

मत: तर्प 1972 के लिए मूल्य सूचकाक 137-4 है।

सापेक्ष मूल्यों के माध्य द्वारा

यदि n पदार्थों के लिए समय 0 तथा 1 पर कमश मूल्य poi व pi हो तो.

$$P_{01} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{p_{1i}}{p_{0i}} ...(15.4)$$

हम मूत्र का प्रयोग सर्वप्रयम कार्ली (Carli) ने मन् 1764 में किया। निर्मु मन् 1863 में वेबीस (Jevons) ने बनावा हि समानर साध्य की योशा गुणोशन माध्य द्वारो चिपन उत्तम मुक्कीक तान किये जा सकते हैं।

$$P_{01} = \pi \sqrt{\frac{n}{|||}} \frac{p_{01}}{||||} \dots (15.5)$$

देगी प्रकार के मूत्र जमक साज-मूलकोन आव करने के हेतु दिये जा सबने हैं। इस दियनि में मूत्रों में p ने स्थान यर युका जयोग करना होता है। इस विधि का गया लाभ यह है कि मूबक्-मूबक् प्रदायों के मूक्तरोक भी आन हो जाने हैं।

उवाहरण 152 पून व दूध ने पराची गन्नन्थी उदाहरण 151 में हिने स्नात ने लिए वर्ष 1965 की घपेक्षा वर्ष 1972 ने मून्य गूचकांक मानेक्ष मून्या ने माध्य द्वारा निम्नो प्रचाद क्रांत कर सबते हैं—

गूत्र (154) हारा मुक्तांच.

$$P_{01} = \frac{1}{5} \left(\frac{1 \cdot 20}{0.80} + \frac{11.0}{8.25} + \frac{12 \cdot 00}{8.00} + \frac{4.80}{4.00} + \frac{13.00}{9.00} \right) \times 100$$

$$= \frac{1}{6} \left(1 \cdot 50 + 1 \cdot 33 + 1 \cdot 50 + 1 \cdot 20 + 1.44 \right) \times 100$$

= 139 4

गूप (155) हास नुबर्गनः

$$P_{\rm eff} = \left(\frac{1\cdot20}{0.80} \times \frac{11\cdot00}{8\cdot25} \times \frac{12\cdot00}{8\cdot90} \times \frac{4.80}{4.00} \times \frac{13.00}{9.00}\right)^{6/5}$$

$$= (1.50 \times 1.33 \times 1.50 \times 1.20 \times 1.44)^{1/6}$$

:,
$$log_{10} P_{01} = 1$$
 { $log_{10} 150 + log_{10} 133 + log_{10} 150 + log_{10} 1.20 + log_{10} 1.44$ }

={ (·7137) =:1427

100 में मूजा करों पर मूजकांक विकास 186 श

भारित सापेक हारा बुल्य सुचकांक

उपर्युक्त विभिन्नों में एक सबसे बड़ा दोग यह है कि प्रापेक गदार्थ को समान महरद दिया गया है। किन्तु यह उदित नहीं है क्योंकि उपमोन्ता सब बन्त्यों का प्रयोग समान साथा में नहीं करता है यौर सही उनकी प्रावत्यकता समान क्यों है। जैने प्रशाहन्त (151) में दूध व सक्तत को समान सहस्व की साथा गया है, जबति वास्तीकता पर है कि दूध एक ब्रावस्थन पदार्थ है और इसका प्रयोग सगमग सभी परिवारों में होता है और इसके विपरोन मक्खन का प्रयोग केवल कुछ ही परिवार करते हैं। सर्वविदित है कि दूध का उपभोग मक्खन की ब्रपेसा कही अधिक होता है। अनः उपभोग की सामा से पदार्थों के मुख्यों को आरित करना अययन आवस्थन हो वाता है।

मूत्यों नो, उपभोग नो माता द्वारा भारित न वरन के दुष्परिपामों का इस रूप में सममा जा सकता है। यदि सूत्रवात नो दियर रचन क हतु यदि दूध के मूल्यों को बढाते जाँग प्रीर मत्तन ने मूल्य नो ष्टाते जाँग ना श्रिधकार क्यक्तिया पर दूध के मूल्य का प्रभाव पहेगा भीर उनना व्यय वढ जायगा जबकि मक्तन के श्वत घटने का बुछ परिवारों को ही लाभ होगा। किन्तु मून्या को मात्रा में भारित करन पर इस प्रकार का विश्रम सम्भव नहीं है।

मूल्यों को मात्रा द्वारा मारित करक काल 0 (बाधार) की बपक्षा खन्य काल 1 का मूल्य मूककाक निम्न मूल द्वारा ज्ञात कर सकते हैं—

$$P_{01} = \frac{\sum_{j}^{\infty} p_{1j} q_{1j}}{\sum_{j}^{\infty} p_{0j} q_{0j}} \qquad (15.6)$$

जबरि :==1, 2, 3,..., n

(156) द्वारा प्राप्त भूषकात का मोई सर्थ नही है क्यों कि इसके द्वारा सह जानना सगमग प्रसम्भव है कि यह भूषकात भूल्यों में पत्रिवर्तन के कारण है या उपमोग धन्नुमाँ को माना में परिवर्तन के कारण है। मृत अब यह प्रश्न उठता है कि भार सन्याक्या होनी चाहिए? इस मार सस्या को इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। यदि दिये हुए वर्ष में माधार वर्ष 1 के सायक्ष परिवर्तन $\sum p_1/p_0$ है और इसे सन्या p_0/q_0 सर्वीद् साधार

वर्ष ने कुल मान ने भारित कर दें तो दिये हुए वर्ष में आरिन मान निम्न होगा-

$$\sum \frac{p_{1i}}{p_{0i}} \times p_0 \ q_{0i} = \sum_{i} p_{2i} \ q_0$$

इस सम्याना माधार वर्ष के भारित मात प्र p_0 , q_0 से प्रतुपान सेने पर सूचनान P_{01}

ज्ञान हो जाता है।

$$P_{01} = \sum_{i} p_{1i} q_{0i} / \sum_{i} p_{0i} q_{0i}$$
 (15.7)

मात्रा मूचकाक के लिए इसी प्रकार का सूत्र निम्न रूप में दिया जा सकता है।

$$Q_{01} = \sum_{i} q_{i} p_{0i}$$
 (158)

(157) द्वारा दिया यया ्चनाक मृह्द एवं विश्वसनीय है ययोकि इसके द्वारा नात ने मन्तर के कारण मृत्य परिल्नेन उन्नी पदार्थी नी समान मात्रा ने लिए जात निया गया है। इसी बात नो इस प्रनार समझ सनते हैं। इस सूचनाक द्वारा यह पदा चतता है नि वर्षी में बाधार वर्ष (0) वी प्रौक्षा उन्हीं वस्तुमों वी उननी सात्रा प्राप्त वर्षने वे भिए विद्यान प्रधिक सावस्य धन समानक प्रदेशा।

सूत्र (157) को सेगयीरित (Laspeyres) सूत्र भी कहते हैं धीर इंग L द्वारा निर्मापन करने हैं। इस गुत्र क्षारा उपकोशा में निष् व्याधार वर्ष की धरोता सूत्र कृति का श्रीक धावकत होता है।

उपर्युग दाय को दूर करने यदि दिवं हुए यर्प (1) की मात्रामी हारा भारित कर निया जाता है मीर इस प्रकार मुख्य गुक्कांक में लिए मुख,

$$P_{01} = \sum_{i} p_{1i} q_{1i} \sum_{i} p_{0i} q_{1i}$$
 (15.9)

मूत्र (159) डारापना चलना है हि दिवे हुए वर्ष न परावों की भाता ने लिए भाधार वर्ष ने फरशा उन्हीं बन्तुमा नी उननी ही मात्रा ने निए दिन्ता भीधार या कम भन क्वय करना होना है। मूत्र (159) वा पात (Faasche) ना मूत्र वरने हैं। इन मूत्र डारा उपभाक्ता ने निए भूत्य भ परिवर्तन वा स्तुन भावतन होना है।

देनी प्रशास आहित मात्रा नागश नूबशांव की जिल्ल मूत्र हारा बात कर तकते है-

$$Q_{01} = \sum_{i} q_{1i} p_{1i} / \sum_{i} q_{01} p_{2i}$$
 (15.10)

मुन्द मुनदांत के लिए दिवे गये सूत्र (159) को 17 द्वारा निरुपित करते हैं।

मूत्रों L व P ने द्वारा जाल मूचनान का जबना व्यक्ति व्यक्ति चाहता होने के कारण को निम्न प्रवार समान गक हैं — बातुला दि मूच्या में परिवर्तन के कारण प्रतिकात परिवर्तन का मान प्रदर्शित करना है। यह अतिकात भाग व्यक्ति है व्यक्ति स्वयन्त्र बातार को स्वित से कोई भी व्यक्ति विकर्तनाम यह Σρι απ है व्यक्ती वसीर को इस हरना

करेगा विजिने जनने दियान सुधर जाये। इनका ययं है विजित्ती भीक के भाव बहु जाने पर जाभीता जन भीक को आधारणनया कम प्रयोग करता है यौर इसने ह्यान पर सन्द वस्तुयो का प्रयोग करना आरम्भ कर देता है। विन्तु L से जननी ही मात्रा पृत् का प्रयोग करने से [6] का बात काहायिक मान से यायक हो जाना है। इसी अकार का स्वयंत्रकाल p हारा सुन याकार के लिए दे सकते हैं।

L व P द्वारा प्रधित व शून प्रावक्ता होना प्रावक्ता नहीं है। ऐसी भी स्विति हो शनाहि है कि जिनमें L वा मान P में क्या हो इसके अनिश्ति इन मुखे द्वारा मुख नुष्काल ज्ञान न होन का कारण यह भी है कि इनये में कोई भी नुष पूर्ण ग्यास का प्रयोग नहीं करता है। मां दन दोगा मुख्य वा नमन्त्रय कर देश ने एक प्रयार्थ मुक्तान ज्ञात होते की माना की जानी है।

र् कृष्ट का सम्पन्न करने की एक गरम व धर्मा विशिध दिशासाम्पर माध्य सेक्ट मूक्कोक मान करना है। धन ,

$$\frac{1}{2}(L+P)) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\frac{x}{2} p_{11} q_{01}}{\frac{x}{2} p_{01} q_{0}} + \frac{x}{2} \frac{p_{11} q_{11}}{p_{01} q_{0}} \right\}(15.11)$$

समान्तर माध्य द्वरा सूचनान का परिच्तन सरल है। किन्तु गुणोत्तर माध्य भी प्राय उचित सूचकान बताता है। इसना नाम मुणोत्तर ऋस (Geometric cross) फिन्नर ने सन् 1920 में दिया।

$$\sqrt{\text{L.P}} = \sqrt{\frac{\sum_{i} p_{i1} q_{0i}}{\sum_{i} p_{0i} q_{0i}}} \times \frac{\sum_{i} p_{i1} q_{1i}}{\sum_{i} p_{0i} q_{1i}} \qquad ...(15.12)$$

गुनोस्तर कास को फिसर का बादसं भूत (Fisher's ideal formula) भी कहते हैं। इसका कारण यह है कि उनका विचार था कि यह सम्भव है कि किसी काल में भूत्यों में परिवर्तन का पूर्ण यथायंता से साथ किया जा सकता है। इस बात को सिद्ध करन के हतु उन्होंने बताया कि उनका भूत, भूत-भूति से मुक्त है। भूत कियार के दो भूत बृदियों की परीक्षायों का वर्षन किया और यह सिद्ध किया कि भूत (1512) इत बृदियों से मुक्त है। ये दो परीक्षायों निम्म कार्य के स्वार्ट के स्वार्ट के स्वर्ट के स्वर

(1) कालोरश्रमण परीक्षा

यदि

पिशरन विवार ध्यक्त निया कि मूल्य सूत्रकार के लिए दिया शया काई मूत्र तब परिगुद्ध कहा जायेगा जबकि यह काल सामजन्य को बनाय रक्ते प्रयांत् निस्त सम्बन्ध का सामुद्ध करे—

$$P_{01} P_{10} = I$$
(1513)

यदि यह सूत्र सल्पुट नहीं हो नो फिलार ने इसे सम्मितित तुटि बनाया बयोदि इस सूत्र तुटि को P_{01} या P_{10} में से किमी एक ने माथ सम्बद्ध नहीं किया जा सकता है। सन, सम्मितित तृटि

$$E_1 = P_{01} \quad P_{10} - 1 \quad \dots (15131)$$

 $P_{01} = 80, P_{10} - 125$

$$P_{01} \times P_{10} = -\frac{80}{100} \times \frac{125}{100}$$

=1

भीर E₁ ≠ 0

सम्बन्ध (1513) को निम्न प्रकार से भी सिद्ध कर सकते हैं---

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum_{i} p_{1i} q_{0i}}{\sum_{i} p_{0i} q_{0i}}} \times \frac{\sum_{i} p_{1i} q_{1i}}{\sum_{i} p_{0i} q_{1}}$$

$$P_{10} \!\!=\! \sqrt{\frac{\sum\limits_{i}^{} p_{0i} \; q_{1i}}{\sum\limits_{i}^{} p_{1i} \; q_{1i}}} \times \frac{\sum\limits_{i}^{} p_{0i} \; q_{0i}}{\sum\limits_{i}^{} p_{1i} \; q_{0i}}$$

तिम्त मुत्रों में प्रक्षर । को प्रनुत्तम्त के रूप में स्वय समग्र तिया गया है ।

$$P_{01} \times P_{10} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{p_0 q_1}{q_1} \times \frac{x}{2} \frac{p_0 q_0}{p_0 q_0} \times \frac{x}{2} \frac{p_1 q_0}{p_0 q_0} \times \frac{x}{2} \frac{p_1 q_1}{p_0 q_1}$$

$$= \sqrt{1}$$

(2) उपादान-उरक्रमण परीका

इस परीक्षा की जल्पित फिलर न इस विकार को ब्यान में एसते हुए की कि एक सूत्र जा बदायों के मूरवों के लिए सत्य है उने पदायों की माजा के लिए भी सत्य होना चाहिये। सत्

$$P_{02} Q_{02} = V_{01}$$
(15 14)

था

$$\frac{P_{01} Q_{01}}{V_{01}} = 1 \qquad (15.14.1)$$

जबकि Vet निविषत पदार्थी के मूल्य अनुपात को निरूपित करता है अर्थात्,

$$V_{01} = \frac{x_{p_1} q_{11}}{x_{p_0} q_{01}}$$
 (15.142)

यदि बाई भूव सम्बन्ध (15 14) को सन्तुष्ट नहीं करता है तो उस सूत्र से सम्मितित पुढ़ि विद्यान समग्री जानी है। यहाँ इस मुद्दि का कम्मितिन मुद्दि इस कारण वृद्दा गया है कि पट कहना सम्भव नहीं है कि पुढ़ि मून्य घटक से सम्बद्ध दे या साथा घटक से सम्बद्ध है, प्रत सम्मितिन मूर्टि, जा कि धनास्त्रक या च्हणस्त्रक प्रतिशत कृदि के रूप से दी गई है, निसन मुक्तर है--

$$E_9 = \frac{P_{01} Q_{01}}{V_{01}} - 1$$
 (1515)

कितार न कहा कि वह शुक्र को इन पृष्टियों से मुक्त है। बाय पृष्टियों यश्यनत पृक्ष्य हो तो मूक्त्रोक के निए शुक्र वा यन्य वी घरेला उत्तय सबका जाता है। रिनार वा सूव उपाक्षक-उत्क्रमण परीक्षा म सन्य होता है। इसे निष्ण प्रवार निक्क विषय का सवता है ---

$$P_{o1} = \sqrt{\frac{\sum_{i} p_{i} q_{o}}{\sum_{i} p_{o} q_{o}}} \times \frac{\sum_{i} p_{i} q_{i}}{\sum_{i} p_{o} q_{i}}$$

$$Q_{o1} = \sqrt{\frac{\sum_{i} q_{i} p_{o}}{\sum_{i} q_{o} p_{i}}} \times \frac{\sum_{i} q_{i} p_{i}}{\sum_{i} q_{o} p_{i}}$$

इन सुत्रों में बनुतरन । को प्रत्येक ब्रक्षर के नाथ स्वय समक लिया गया है ।

$$\begin{split} P_{01} \cdot Q_{01} &= \sqrt{\frac{\frac{x}{1} p_1 q_0}{\frac{x}{2} p_0 q_0}} \times \frac{\frac{x}{2} p_1 q_1}{\frac{x}{2} p_0 q_1} \times \frac{\frac{x}{2} q_1 p_0}{\frac{x}{2} q_0 p_1} \times \frac{\frac{x}{2} q_1 p_1}{\frac{x}{2} q_0 p_1} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\frac{x}{2} p_1 q_1}{\frac{x}{2} p_0 q_0}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{x}{2} p_1 q_1}{\frac{x}{2} p_0 q_0} \end{split}$$

=V_m

इन गुणों के प्रनिरिक्त फिशर न गुणालर-कास मूत्र को इल प्राधार पर भी प्रवर (Superior) बताया नियह सूत्य तथा मात्रा स परिवर्तन का साप करने स दो कालो (प्राधार कंपन्य काल) के सम्पूर्ण स्थास को प्रयोग में लाता है।

कुछ प्रतुष्धानकर्षाणं न इस मूत्र व धादणं होन का ध्रतुमोदन क्यि। इनमे मुख्यतया पोगू (Pigou) भीर बाउल (Bowle)) हैं। किन्तु बुछ प्रत्य व्यक्तियों ने गुणोत्तर-कास को धादलं मूत्र मानने से असहमिन व्यक्त की, क्यांकि फिजर का मूत्र बुत्तीय परीक्षा (नीचंदी गर्दे हैं) में पूरा नहीं उतरहा है। फिर भी धावकल गुणोत्तर-कास का धादलें मूत्र के रूप में प्रयोग किया जाता है।

व्सीय परीक्षा

इस परीक्षा के अन्तर्गत सूचका क एक कान को आधार मानकर उत्तमे अगले काल के लिए जात करते हैं। यह कम तब तक चलना रहता है जब तक कि मिन्स सूचका के प्रारम्भिक वर्ष के लिए, मिन्सम काल को आधार मानकर ज्ञात न हो जाय। यन K वर्षों के लिए वृक्षीय परीक्षा निम्म प्रकार है—

$$P_{01} P_{12} P_{23} ... P_{(k-1)k} P_{k0=1} ... (15.16)$$

मूत्र (15.16) इस प्रकार भी लिख सकते है-

$$P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{23} \dots P_{(k-1)k} = P_{0k}$$
 (15 16.1)

मूत्र (15.16.1) में स्पष्ट है कि कात 0 से K तक के श्रृ खितक सूचकानों का गुणनफल, सूचकाक P_{OK} के समान होता है। इस सूत्र को समले पृष्ठ में श्रृ खला सूचकाक की प्रत्यांत सिद्ध भी किया गया है।

नृतीय परीक्षामं कैवल एक यादो सुन ही पूरे उतरते हैं और ये वे सुन हैं जो बहुत कम प्रयोग में माते हैं क्योंनि ये सैदान्तिक रूप से अब्छे नहीं हैं। यही कारण है कि फिबर ने नृतीय परीक्षाको दोषपूर्ण कहा है और साथ हो यह भी मिद्ध क्यि। कि कोई भी उच्च मेणी का सुन नृतीय परीक्षा के हेतु दिये गये प्रनिबन्ध को सन्तुष्ट नहीं करता है।

L व P में सामंजस्य

L र P मे सामजस्य संन्या D इस प्रशार है,

यदि $D \le 2$ हो तो L = P दोनो सतोपजनन मान जाते हैं चौर यदि D > 2 हो तो यह समक्षा जाता है वि दानो मुचनान-मानो में से नोई भी सानोपजनन नहीं है।

समान्तर भार संकरित सूत्र

समान्तर भार सर्वरित सूत्र य मुख्या p_{11} व p_{01} का बाल 0 व 1 की मात्रायों के यास स भारित करते हैं। इस सूत्र द्वारा एवा बक्छा मुख्य सूचवांक शात हा जाता है।

$$P_{01} = \frac{\frac{2}{1} (q_{11} + q_{01}) p_{11}}{\frac{2}{1} (q_{11} + q_{01}) p_{01}} \dots (1510)$$

पुणोत्तर भाग सर्गरत गुत्र (Geometric-crossed weight formula)

यह मूत्र निम्न होता है ---

$$\hat{\Gamma}_{02} = \frac{\frac{\pi}{2} \sqrt{p_{11} q_{11} q_{01}}}{\frac{\pi}{2} \sqrt{p_{01} q_{11} q_{01}}} \dots (15.19)$$

नुपालर भार समस्ति सूबकान परिवलन से कठिन है। सन तब तब इसना गणना करी की सावक्यकता लाय्ट न हो, तब तक इसना प्रयोग नहीं करना वाहिये।

(डिप्पकी मात्राकम्बन्धीः मुचनांकसूत्र pकत्यानं परवृक्षीर q पंस्तानं पर p नाप्रयोगन्यके प्राप्त हो जात है।)

मिलार (Mischell) ने थोग पून्यों ने मुख्यान ने लिए पून्या को साधार वर्ष ते दिव हुए वर्ष के बीच गरीरी हुई या वेथी हुई बस्तुपी की माशा ने साध्य प्रहारा आस्ति करन का सुकाब रक्ता सीर हमने लिए निम्न गुज दिया ---

$$P_{01} = \sum_{i} p_{1i} q_i / \sum_{i} p_{0i} q_i$$
(1520)

हत मूत्र की विभिन्न कोणों ने स्वीकार किया किन्तु सनेक वर्गों की नारोद का किसे सन्बन्धी स्वीकृत करना सर्विधक समुविधाननक होता के कारण यह सूत्र प्रथमन से नहीं है।

िसो भी स्विति से मुनवार शाल करने में भार एन प्रमुख सहस्व रहते है। वर्षाण प्रतुमधान करने के बाद भी एक निश्चित भार को सर्वोत्तय भार कहना कीठन है क्यारि यह भार, कात बाउस काल की विशिद्धालया एक योकडे या उपलब्ध हो उस पर बहुत निभेर करने है। यह भारों का बबन कार्यक्षी के सनुभव एक बुधनना पर निभेर रहता है। चबाहरण 153: निम्न सारणी में 10 पदार्थी ने लिए पूरोपियन प्रार्थित समुदाय (European economic community) द्वारा नियं गर्थ प्रायात सम्बन्धी पनिष्ठे बचे 1961 न 1967 ने जिल्ला स्वयंत्री से नियं गर्थ हैं

			यं हैं —	
पदार्थे	(सा	का भाव (p ₀) ध दासर प्रनि (भीडपी टन)	नरं 1961	पदार्थ की जाता (q ₀) (हजार मीटरी टन)
1		1.875		3 152·5
दूध व जीम		0.902		
मक्सन				65 4
गहेँ		0.788		5026-9
বাৰদ		1 406		356-4
मनरा		0 562		6683 4
मेबा		3 000		173 5
शक्व र		1-605		468.6
तम्बाबू		11-625		273-2
पौनट (हरा)		1-964		787 5
कच्ची क्पास		6-551		920 5
		बर्च 1957		
	_	-		
	पदार्थे का बाव (p ₁) (साख दानर प्रीत			ানবা (q ₁) মাত্ৰী হৰ)
	(हाख रानर प्रक्ति हमार मोटरी दन)		(ह्यार	माटरी हन)
	(हाख दानर प्रति हनार मीटरी दन) 4		(ह्यार	मोटरी टन) 5
	(हाख बानर प्रीत हमार मोटरी दन) 4 2.551	<u></u>	(ह्वार	मोटरी दम) 5 532 7
	(बाब बानर प्रक्षि हमार मीटरी टन) 4 2.551 1.013		(ह् बार 4	मांडरी हम) 5 532 7 70 5
	(লাজ বাদ্য মন্ত্ৰি হৰ্ম্য মাহণ্ড হল) 4 2-551 1-013 0 822		(ह्वार 4	र्याटरी हम) 5 532 7 70 5 483 6
	(तांव बानर प्रीत हमार मीटरी टंग) 4 2:551 1:013 0 822 1:763		(ह्वार 4 :	र्वाटरी हम) 5 532 7 70 5 483 6 335 7
	(6) a नागर प्रके हमार मीटरो टम) 4 2-551 1-013 0 822 1-763 0 659		(ह्वार 4 : 9:	र्वाटरी हम) 5 532 7 70 5 483 6 335 7
	(6) 8 वानर प्रीत हमार मीटरी टन) 4 2:551 1:013 0 822 1:763 0 659 3 633		(ह्वार 4 9	ड 5 532 7 70 5 483 6 335 7 797 1
	(878 सानर प्रीत स्वार मीटरी ट्या 2-551 1-013 0 822 1-763 0 659 3 633 1-323		(ह्बार 4 9: 1	ड 5 532 7 70 5 483 6 335 7 797 1 48-1 335-9

- (१) यूरोवियन माधिन समुदाय हारा निथे गये व्यावान सम्बन्धी 1967 वा 1961 के साधार पर मुन्द मुखनोक (न) विसाधिरण शृत्र हारा (ल) थांन सूत्र हारा, निम्न प्रकार बात कर सकते हैं।
 - (n) फिशर के भादर्श मूत्र द्वारा मूक्य सूचवान ज्ञान वरक दिखाया गया है।
- (มा) किशर वे बादसँ सूत्र द्वारा मूल्य मूचवाव की वालोन्त्रमण परीक्षा निम्न प्रवार की जाली है।
- (av) समान्तर ऋस पारित सूत्र द्वारा मूल्य सूत्रवाद तिश्व प्रकार ज्ञात कर सकते है।
- मूच (157) द्वारा मूचकान निम्न प्रकार ज्ञान कर सकते हैं । यहां पदायों की मस्या 10 है । प्रत पहले निम्न सस्या का परिकलन किया ।

10

$$\sum_{i=1}^{n} P_{i} \cdot q_{0i} \left(2.551 \times 152.5 + 1.013 \times 65.4 + + 1.973 \times 787.5 + 6.136 \times 920.5 \right)$$
=21515 9781

10 $S_{1 = 1}$ $p_{01} q_{00} = (1875 \times 152 \cdot 50902 \times 654 + + 1964 \times 787 \cdot 51 + 6.551 \times 9205)$

⇒20588 6932

धन लेशपिरित्र सूत्र द्वारा सूचवार,

$$P_{01} = \frac{215159781}{205886932} \times 100$$
= 10450

पासे—-सूत्र (15.9) द्वारा स्वयंकाक बातः करन कैलिए निस्न सन्ध्याका परिकलन किया।

TO IT

मीर

$$\begin{array}{c} \Sigma \quad \mathbf{F}_{01} \, \mathbf{q}_{11} = (1\,875\times532\,7 + 0\,902\times70\,5 + \\ \quad + 1\cdot964\times842\,4 + 6\,551\times961\cdot2) \\ \quad = 23328\,2840 \end{array}$$

$$P_{01} = \frac{237651078}{23323 \cdot 2840}$$

== 106-15

सूत्र (15 12) द्वारा, सूत्रकार
$$P_{01} = \sqrt{LP}$$

$$= \sqrt{104 50 \times 106 15}$$

$$= \sqrt{11092 6750}$$

$$= 105 32$$

(111) वालोरकमण परीक्षा वे लिए मूचकाव P10 वो और ज्ञान वरना होगा।

$$\begin{split} P_{10} &= \sqrt{\frac{\sum\limits_{i}^{5} p_{0i} \ q_{1i}}{\sum\limits_{i}^{5} p_{1i} \ q_{1i}}} \times \frac{\sum\limits_{i}^{5} p_{0i} \ q_{0}}{\sum\limits_{i}^{5} p_{1i} \ q_{0i}} \\ &= \sqrt{\frac{23328 \ 2840}{24765 \ 1878}} \times \frac{20588 \ 6932}{21515 \ 9781} \\ &= \sqrt{\frac{1}{106 \ 15}} \times \frac{1}{104 \ 50} \\ P_{10} \times P_{01} &= \sqrt{\frac{106 \ 15 \times 104 \ 50}{106 \ 15 \times 104 \ 50}} \end{split}$$

हिप्पणी उपयुक्त परिणामों में एक विशेष बात सामने घातों है कि L<P इसका कारण यह दिया जा सबता है कि घायात में निर्यात की मात्रा में वृद्धि घष्टिक हुई घोर बस्तुषों के मूल्यों में कम वृद्धि हुई है। L>P का नियम मुख्यतया उपभोक्ता द्वारा सी गई मात्राचा के लिए सगनग सर्वव साथ रहता है।

(1V) सूत्र (15.18) के द्वारा समान्तर भार सकरित मूल्य मूलकाक ज्ञात कर सकते है। इस मूलकान का निम्न सारणी'बनाकर सुगमता से, परिकलन कर सकते है:—

$p_{1i} (q_{1i} + q_{0i})$	$P_{01}(q_{1}+q_{01})$
1747 9452	1284.7500
137 6667	122 5818
7817 6310	7494 2740
1220 1723	973 0926
10860 6495	9262 0410
1168 3728	964 8000
1328 9535	1612 2225
7237-7910	6675 0750
3215 7927	3201 1236
11546 1112	12327 0167
46281 0859	43916 9772
	1747 9452 137 6667 7817 6310 1220 1723 10860 6495 1168 3728 1328 9535 7237-7910 3215 7927 11546 1112

यत मूल्य सूचकान,

$$P_{01} = \frac{46281\ 0859}{43916\ 9772} \times 100$$

=10538

यह बात द्यान देने योज्य है नि फिशर के धादमें मूत्र नथा समान्तर त्राप्त भारित सूत्र द्वारा मूल्य मुचकाक संगमग समान हैं।

जराहरण 15.4 जातर प्रदेश में खावल व गेहूँ वे जस्पादन तथा योग भाद सम्बन्धी स्नोकटे सन् 1953 कोर 1960 के लिए इस प्रवार हैं —

14	योड (2.5 × 1			
44	त्रति दश ः शास्त्र	ताब टन वेहूँ	वसास (दर बाहर	वाय टन) नेहूँ
1953	22 14	18 60	19	2 9
1960	20 47	16 12	2 5	3 3

p*→सारणी में दिये हुए मान को निरुपित केरता है।

सेसपिरीज के मुद्र (158) द्वारा 1960 के लिए 1953 की बरेला, मात्रा मुक्काक,

$$Q_{01} = \frac{25 \times 2214 + 33 \times 1860}{19 \times 2214 + 29 \times 1860} \times 100$$

$$= \frac{116730}{96006} \times 100 = 12158$$

सुचकांक की रचना में शृटियाँ

मृत्यो ने या मात्राचो के प्रति मूचकांत्र, जो कि दिवर्षी वदार्यों वर प्राचारित है, की रवता करते समय प्रायः ठीन प्रकार की बृटि होने की सम्प्रावना रहती है।

(1) सूत्र बृटि

किसी भी एक मूत्र को किसी पदार्थी के लिए मूल्य या मात्रा मुक्बाक जान करने के लिए सर्वोत्तम क्लान किन है क्योंकि प्रायेक मूत्र के दाय एव गुल दोना ही क्यान है। सद एक उपमुक्त मूत्र का क्यान, स्थान के स्वरूप, बाल एक मूबकांक के उद्देश को स्थान में एक कर स्थिया जाता है।

(2) प्रतिधमन-त्रृटिः

मदि सम्पूर्ण बदायों 'N' को मिमितित न करने, इनमें से बेबन प्रवादों का चारिकर प्रतिदर्श लेकर, दिवार्ग क्दायों के द्वारा Pot (A) मा Qot (D) को रकना को जानी है तो करने भाग सम्पूर्ण बदायों (N) के निम रिवन सुक्वांक Pot (N) मा पिन हाना । मत Pot (A) के निम प्रवाद को प्रतिवदन वृद्धि करने हैं। दम वृद्धि का प्रवाद को प्रतिवदन वृद्धि करने हैं। दम वृद्धि का निवादित विधियों द्वारा मानस्त कर सकते हैं।

(3) सन्नातीयता बृद्धिः

यह त्रुटि सूचनान की ग्वना म $P_{01}(1)$ व $P_{01}(N)$ व अन्तर ने समान होती है। जबिन $P_{01}(T)$ दिये हुए वर्ष (1) व प्राधार वर्ष (0) से विद्यमान सब पदायों के सूच्य तथा भारो द्वारा रचिन भूचनाक है और $P_{01}(N)$ इस त्रुटि के मापन के लिए कोई द्विवर्षी N पदार्थी द्वारा रचित भूचनाव है। निष्यत भूत्र तो उपलब्ध नहीं है किन्तु फिर भी R परीक्षा द्वारा सजातीयना ना परिमाण ज्ञान कर मकते है। भजानीयना-गुणाव 'R' के लिए निम्न सूज है —

$$R = \frac{\text{प्रदितीय पदार्थों की सम्बा}}{\text{रात 1 a 0 म कुछ पदार्थों की सप्पा}}$$

$$= \frac{N_0 + N_1 - 2N_{01}}{N_0 + N_1} \qquad(15.21)$$

जबकि N_1 काल 1 (दिये हुए वर्ष) में और N_0 , काल 0 (बाधार वर्ष) में कुल पदायों की मध्या है।

यदि R=0 हो तो इतका घथ है कि पूर्ण सजातीयता है धर्यात् धोनां नाओं से एक समान पदायें हैं। यदि R=1 हो तो इसका धर्य है कि पूर्ण विज्ञातीयता है स्वर्षत् भी पदार्थ काल 0 से नहीं या या No1=0 इस सकार R ना परास D से 1 है या 0<R<1 किसी सूचनाक नी रचना से साय-साय R ने मान ना भी परिक्सन नरे से साय-साय R ने मान ना भी परिक्सन नरे से साय-साय R ने मान ना भी परिक्सन नरे से साय-साय सायाया सा सन्ता है। R ना मान नितना ग्राय के निकट होता है उननी ही सजातीयता आधिक मानी जाती है। सजातीयता प्रायक निकट से में सुचकाक घंधिन विज्ञवसनीय होना है। यह ध्यान रहे कि R ने न मुक्त मात्र है।

उदाहरण 155 पर शहर म वर्ष 1960 से एक सर्वेक्षण द्वारा 40 प्रावस्थर वन्तुमा की दर तथा उपभोग की मात्रा मन्द्रक्षी प्रक्रिके एक स्थि पये। 1970 में पिर गत्र मस्त्रक्ष, 50 वन्तुमा की दर एव उपभोग की मात्रा झात करने के हितु, किया गया। इस दी वर्ष में नेया 30 वस्त्रमें वही थी तो त्यान की मजातीवता की परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं —

मूत (1521) द्वागा 🏿 का मान ज्ञान किया,

$$q \in N_0 = 40, N_1 = 50, N_{01} = 30$$

$$R = \frac{40 + 50 - 60}{40 + 50}$$

$$=\frac{30}{90}=1/3$$

R कामान लगभग 3 ३ है अन न्यास म उच्च कम की विजातीयतानही है।

383

भृ लला सुधकांक धीर इसका स्थिर बाधार सुधकांक से सम्बन्ध :

प्रभि पूर्व सी हुई विधियों द्वारा निया आधार वाल की यदेशा किसी याय वर्ष में महित मुख्यों के स्वर में अविकार परिवर्तन जान विधा निया निया है इस प्रवार का मूबवार मोनिश्या में मधिक प्रवान है। किस्तु प्रशाना मुक्ताक में, जिस वाल से यस्य कान तब का मुक्ताक जाते हैं कि मीर का मुक्ताक जाते हैं कि मीर इस मुक्ताक की छिछने वर्ष के निवर भू लका प्रशान है है यह वर्ष के निवर भू लका भू भूकाक जाते हैं। इस मुक्ताक जाते हैं। इस किया में प्रधान करते हैं के आरम्भ करने विषे हुए वर्ष कर प्रथम मानिश्यो है। इस किया में प्रधान करते हिए वर्ष के अवश्य मुक्ताक जाता है। उसा किया में प्रधान करते हिए वर्ष कर प्रथम मूक्ताक का परिकार करता होता है।

माना कि साखाद वर्ष को 0 योग इसके बाद मे धाने बादे क्यों को 1,2,3,... ... k के लिए क्या नवा है तो वर्षों 1,2,3,... ... k के लिए क्या का प्रकार प्रव्य सुवकांक P_{01} , P_{02} , P_{03} , P_{06} है। j वें वर्ष का भूत्य गुजवांक साखार 0 की ध्येक्षा निक्त सुत्री द्वारा विधा जा सकता है।

लेगपीरिज सूत्र,

$$P_{0} = \frac{\sum_{i}^{N} P_{ii} q_{0i}}{\sum_{i}^{N} P_{0i} q_{0i}} \dots (15.22)$$

$$qet i=1,2......, n$$

धोर i= 1.2.3..... k

वासे गुत्र,

$$P_{0i} = \frac{\sum_{i} p_{0i} q_{ii}}{\sum_{i} p_{0i} q_{ii}} \qquad(15.23)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i} p_{0i} q_{ii} \qquad(15.23)$$

रिल्नुकार दी हुई विधि के घतुवार मेनपीनिक मूत्र बाग कृत्यना मूचकोर जिल्ला प्रकार भाव कर करते हैं —

$$\begin{split} P_{01} &= \frac{\frac{x}{i} \, P_{01} \, q_{0i}}{\sum_{i}^{2} \, P_{0i} \, q_{0i}} & \text{or spanished in the set of } i \\ P_{02} &= \frac{\frac{x}{i} \, P_{01} \, q_{0i}}{\sum_{i}^{2} \, P_{01} \, q_{0i}} \times \frac{x}{i} \, P_{01} \, q_{0i} \\ &= P_{12} \, \cdot P_{03} \end{split}$$

इमी प्रदार.

$$L^{03} = \frac{\sum_{i} L^{2i} \ d^{2i}}{\sum_{i} L^{2i} \ d^{2i}} \times \frac{\sum_{i} L^{2i} \ d^{2i}}{\sum_{i} L^{2i} \ d^{2i}} \times \frac{\sum_{i} L^{0i} \ d^{0}}{\sum_{i} L^{0i} \ d^{0}}$$

$$= P_{23} \cdot P_{12} \cdot P_{01}$$

 $= P_{23} \cdot P_{02}$

मीर

$$\begin{array}{lll} P_{04} = P_{34} \cdot P_{22} \cdot P_{12} \cdot P_{01} \\ &= P_{34} \cdot P_{03} \\ &\dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{0K} = P_{(K-1)} k \cdot \dots & P_{23} \cdot P_{12} \cdot P_{01} \\ &= P_{(K-1)} k \cdot P_{0(K-1)} \end{array} \qquad(15.24)$$

भूंखला सूचकोरु का एक लाभ यह है कि यदि किसी बीच के वर्षका पिछले वर्षकी भ्रमेसा सूचकोरु झात करना हो तो अपने वर्षके सूचकोरु को पिछले वर्षके सूचकोरु से भागकरके ज्ञात कर सकते हैं. जैसे—

$$P_{34} = -\frac{P_{04}}{P_{03}} -$$

यदि श्रृंखला मृत्य सूचकांक में अत्येक वर्ष के लिए पिछले वर्ष की सपेक्षा सूचकांक ज्ञात करने में निश्चित q का प्रयोग करें तो श्रृंखला आधार और स्थिर प्राधार मूल्य मूचकांक में कोई अन्तर नहीं रहता है।

उदाहरणार्य,

मूल्य मूचकोक	स्पिर बाह्यार मूचर्गक	निश्चित मोला शृंखली सूचनोक
P ₀₁	Σ p ₁ , q ₀ , Σ p ₀ , q ₀ ,	$\frac{\sum\limits_{i}^{\Sigma} p_{1i} \ q_{0i}}{\sum\limits_{i}^{\Sigma} p_{0i} \ q_{0i}} = P_{01}$
P ₀₂		$\begin{array}{c c} \frac{\Sigma}{\iota} p_{2i} \ q_i \\ \frac{\Sigma}{\iota} p_{1i} \ q_i \end{array} \times \begin{array}{c} \frac{\Sigma}{\iota} p_{1i} \ q_i \\ \frac{\Sigma}{\iota} p_{00} \ q_i \end{array} = \begin{array}{c} \frac{\Sigma}{\iota} p_{2i} \ q_i \\ \frac{\Sigma}{\iota} p_{01} \ q_i \end{array} = P_{02}$
P ₀₃	Σ p ₃ , q,	$\begin{array}{c} \Sigma \ p_2, \ q_i \\ \vdots \\ \vdots \\ p_2, \ q_i \end{array} \times \begin{array}{c} \Sigma \ p_{21} \ q_i \\ \vdots \\ \Sigma \ p_{2i} \ q_i \end{array}$
		$\times \frac{\sum_{i} p_{0i} q_{i}}{\sum_{i} p_{0i} q_{i}} = \frac{\sum_{i} p_{0i} q_{i}}{\sum_{i} p_{0i} q_{i}} = P_{03}$

इसी प्रकार अन्य किसी भी वर्ष के लिए समान भार प्रयोग करने की स्पिति में स्थिर ग्राचार व गूंखता मूल्य मुनवांक की समानता को मिद्र कर मकते हैं।

श्रुद्धाना घाषार मूचनाक, पामे सूत्र के लिए भी उत्पर नी भौति ब्युस्पन्न किये जा सकते हैं। टिपको मार्था मृत्यस सूचरात दे लिए सभी सूत्र, उपर्युक्त सूत्रों सं p को q से प्रीर q को p ने बदल वर आत कि वे जा सकते हैं।

स्यिर प्राधार व भ्रु खला मूल्य सूचकांक के गुण एव दीव

स्पिर साधार मुख्यान वा परिवसन सरस है तथा इनका निवंतन भी स्पष्टत किया वा सबना है किन्तु न्यूरासा मुख्याक नी दवा में ऐसा बरना सम्भव नहीं है। उन्यूंक मूत्री होरा रूपर है कि न्यूयाम मुख्याक नी रखा में साधार वर्ष में नेवर सन्त ने वर्ष तक, वेदल करने के वर्ष में दायों नी भाग स्वाप्त की स्वाप्त हो आता है जबकि किया सामार मुख्यान की स्वाप्त नो छोड़ कर नारी स्वाप्त को स्वाप्त हो जाता है व्यवक्ति सेवर सामार मुख्यान की स्वाप्त हुन वर्ष व सामार वर्ष ने बीच के बात से नात सामे परिवर्तनों में कोई सम्बद्ध नहीं रहता है। सन्त वाल से परिव परिवर्तनों नो स्वाप्त कर सामे स्वाप्त कर सामार स्वाप्त मुख्यान स्वाप्त मुख्यान स्वाप्त मुख्यान स्वाप्त मुख्यान स्वाप्त मुख्यान स्वाप्त स्वाप्त हुना है।

यदि प्राधार वर्ष तथा दिवे हुए वर्ष में घन्तर प्राधन हो तो इन दो वर्षों में दिवशी पदार्थों शे सदया बहुत नय हो जाती है प्रवीत् R न्यवय 1 ने तमान हूं। जाता है। इस स्थिति में स्थित प्राधार नृजवान विश्वतार्थीय नहीं हाना है। मारास में यह बहु सबते हैं कि P_{02} या दुसने बाद के बची के लिए जूननान नो स्रोधा P_{01} प्राधक परिगुद्ध है। इसी प्रवार P_{02} या दुसने बाद के बची के लिए जूननान नो स्रोधा P_{01} प्राधक परिगुद्ध है। इसी प्रवार P_{02} या दुसने बाद के बची के लिए जूननान नो स्रोधक परिगुद्ध जूननात है।

प्रशंता मूनकार का एक मुख्य दोध वह बताया जाता है कि दसमें सचयी बूटि होती है। इस बात की महास्व नही दिवा जा सकता है यह तर यह निष्ट न हो जाने कि सियर मापार, मुक्कार गुढ़ है। इसका प्रमुक्त, 10 व R के मान शात करने, समामा जा नश्ता है। वृद्धि तर के मान क्यिर साधार सुक्कार से समुद्धा की मृत्यत करते हों ही ऐसी सिति में प्रशास मुक्कार, सिक्स साधार सुक्कार से समुद्धा की मृत्यत करते हों ही

बराहरण 15.5 १ मीलोन में 1950 से 1955 तर प्रसन के वायन व मेहूँ ने झाटे रा बटन, भाव एवं मात्रा ने सनुसार, निस्त भारती से दिया थया है:----

वर्ष चावल			वेहँ का माटा		
1			प्रति व्यक्ति वाणिके वादा (क्षिणोषाप वे) 4	विशी शी हर (१० मेडि रिनो०) 5	
1930	57 9	0 34	21 8	0.54	
1951	58 <	0 25	25 4	0.46	
1952	54 2	0 25	28 9	0 46	
953	57.7	0 42	32.5	0 46	
954	66.9	0.55	26 6	0.46	
1953	94 1	0.44	23 1	0.46	

वर्ष 1950 को धाधार मानकर, 1955 के लिए श्रृत्तला मुख्य सूचकाक, लेसपिरिज सुत्र (157) का प्रयोग करके, निम्न प्रकार भात कर सकते हैं:---

$$P_{01} = \frac{57.9 \times 25 + 21.8 \times 46}{57.9 \times 34 + 21.8 \times 54} = \frac{24.503}{31.458}$$
$$= .779$$
$$P_{18} = \frac{50.5 \times 25 + 25.4 \times 46}{50.5 \times 25 + 25.4 \times 46} = 1.000$$

इसी प्रकार.

$$P_{23} = \frac{36058}{26844} = 1343$$

$$P_{34} = \frac{46685}{39184} = 119$$

$$P_{45} = \frac{41.672}{49.031} = 0.850$$

शृद्धला माधार विधि द्वारा मूल्य सूचकाक सूत्र (1524) का प्रयोग करने पर निम्न है —

$$P_{05} = P_{45} \times P_{34} \times P_{23} \times P_{12} \times P_{01} \times 100$$

= 105 91

दिप्पणी उपर्युक्त उनाहरण म केवल दो पदायों को ही लिया गया है। यदि प्रनेक्ष पदार्थों को लिया गया हो तो उनके लिए भी इसी प्रकार सूचकाक का परिकलन किया मा सकता है प्रमाव हर से सन्या दो पदार्थों पर शाधारित न होकर, जो भी पदार्थ हा उन सब के लिए परिकलित कर भी जाती है।

सुचर्काक रचना मे सावधानियाँ

- (1) मूल्य या मात्रा मूलकाक की रचना के उद्देश्य का स्पष्ट वर्णन दिया जाना चाहिये क्यांकि इनके आधार पर कई अन्य निर्णय लिए जाते हैं। यदि राष्ट्रीय नीति (policy), मूल्या या उत्पादन के प्रति सूचनाक पर, निर्मर है तो इनकी रचना से सतकंता एव शब्दि प्रत्यात आवश्यक है।
- (2) परार्थों नी सच्या के विषय म निर्णय, मूनवाक ज्ञात करने के उद्देश्य के अनुसार मावधानी में करना चाहिये । जैम यदि निर्वाह-व्यव (cost of living) के हेतु सूचवाक ज्ञात करना चाहिये । जैम यदि निर्वाह-व्यव (cost of living) के हेतु सूचवाक ज्ञात करना चाहिये जिनका प्रयोग या उपभोग प्रधिकाश जन ममुदाय करना है । इन वस्तुओं ने भूत्य सम्बन्धी श्रीकड़े केवल भूटकर भाव (retail price) पर श्रावारित होन चाहिये क्योंकि पुटकर भावों म परिवर्तन,

योग भारो वी प्रवेक्षा यानित और बीका होता है। बन्तो ने भावो को सने समय विशेष ध्यान देना माहिये क्योंकि ये क्यारे ने मुण (प्रकार) पर काधारित होने हैं। यार क्यारे ने भाव व गुण समानना से बड़ें तो एक प्रकार से भावों से परिवर्तन नहीं कहा जा सकता है। यन मुक्कात से सम्मिनित किये जाने वाले परार्थों की मूची बहुत विचार कर कनानी चाहिये।

- (3) पदाधी के मूल्यों को मागित करना घरयाना धावस्था है जिससे प्रत्येक नरायें को मूलकांक पर प्रभाव उनके महत्त्व के धानुसार ही पर्छ। यही वास्य है कि सन्त्रभग सर्देक भारों का प्रयोग किया जाता है। धन व्यवहार सं मूल्य मूलकाक आल करने के लिए विची गई बतनुषी की माजा को आर के रूप संप्रधीन करते हैं धौर साजा सम्बन्धी मूलकार की परमा संवदाधी के मूल्यों को सार के रूप संप्रधीन करने हैं। इनका वर्णन सूत्रभा से सार के प्रयोग के लाख स्पष्ट दिया गया है।
- (4) निर्मारिक पदाची ने पूरण तथा उपकोश सम्बन्धी ग्यास ना सक्य करना एक करित नामें है। । फर भी एक उचित प्रतिदर्भ ना अथन नरने ददा व्यक्तिमाँ द्वारा म्रांकरे य्यांस्त विश्वसत्तीय प्राप्त निये जा करने हैं। इस प्रनार ने पनिच स्थव्यदा विकेश या उपभोक्ता के द्वारा शास करना निव्य होने ने नारण सरकार प्रायः सूचकांत योक भाव या उत्पादक हारा प्राप्त भावों ने घाषार पर जात नरती है। ये मूचकांत घरिक शुद्ध होते हैं।
- (5) प्राप्तार वालू का निर्णय करना भी एक कठिन समस्या है। परिमाणा के प्रमुत्तार, प्राप्तार वर्ष वही होना वाहिये किसकी सुनना में सूबकांक मान करना है किर भी यह व्यान रचना वाहिये कि प्राप्तार वर्ष कोई प्रमाणारण वर्ष कहें भी पुढ के वर्ष या है में भी भूकक्त या बाढ प्रार्टि प्राप्तार वर्ष हो हो हो से भूकक्त या बाढ प्रार्टि प्राप्तार वर्ष हो हो हो ऐसे वर्ष की प्राप्तार नहीं मानना भाहिये।
- (6) उपर्युत्त बाबी को क्यान में रखते हुए इस कारवाय में दिये गये मूर्कों में से उचित सुत्र का बयत करता होता है। इसके लिए कोई नियम बनावा हो मगम्मव मनीत होता है। उचित मूल का पमन सुचकाक जात करने के उद्देश्य एवं सर्वेदा म्यक्ति के सनुवक और जान पर निर्मेद है।

मुख्य टिप्पणी

यह भावस्थन नहीं है कि बाल का भन्तर केवल वर्षों में हो हो। भूपवराव प्रति नात या प्रति तत्ताह मूर्त्यों या माकाधों से प्रत्यिनन के हेतु भी कात किये जाने हैं। ऐसी नियपि में कात बा माल या सप्ताह के क्या मा प्रयोग करना होता है।

यन्त से यह भी वह सबचे हैं कि किसी भी चरिपूर्ण (perfect) मुचकात का जान नहीं निया जा सका है। यना दिन प्रति दिन चतुनवान हाका नवे-नवे सूत्रों की उत्तरित होनी रहती है भीर क्लिय का क्षेत्र क्लिया होना वहना है।

प्रश्नावली

- मूचनाक से भ्राप बया सममते हैं, स्पष्ट शब्दों मे लिखिए। यह भी बनाइए कि इसकी उपयोगिता क्या है?
- एक सूचकाक, एक प्रकार का क्षीसत है, इस दिवार की तस्मों के भाषार पर पुष्टि की जिसे ।
- उ एक सूचकाक के लिए दी गई तीन परीसाओं का बर्णन की किये और इनकी तुनना भी की किये।
- 4 विसी मूक्काक के लिए प्राधार काल का जयन करते समय किन किन बार्ते का प्रयान रखना पाहिए।
- 5 'लेमपिरिल मूत्र द्वारा अधिव धावसन और पासे मूत्र द्वारा न्यून आवसन होता है। 'इम वयन नो पुष्टि कोतिस ।
- गुगोत्तर त्रास मूचकान को फिगर का झादशें सूत्र क्यों कहते हैं? इसके कारण बताइए ।
- 7 निम्न के लिए मूचकार का उपयोग बताइल ॰—
 - (1) व्यापारित न्यिति हे विक्तेषण में, (2) व्यापिक किया के सुवक में, (3) वास्तविक वेतन मात ना परिवासन करने में।

(बाई॰ ए॰ एस॰ 1964)

8 निम्न मौनडों ने भ्रामार पर लेक्सिरिज, यासे भीर फिसर ने भ्रादर्श मूत्र द्वारा, मुचनाक क्षात्र नीजिये —

		琴	चारख	मसा	
मात्रा	1959	15	5	10	
	1964	12	4	5	
मूल्य (६०)	1959	15	20	4	
	1964	22	27	7	

(बी॰ काम॰ मैसूर 1967)

चित्तरः बीनो मूत्रों द्वारा एक ही उत्तर है] P₀₁≔1466

- 9 निर्वाह व्यय सम्बन्धी भूवनान नी रचना मे निम्न समूह सूचनान प्राप्त हुए। निर्वाह व्यय मूचनान डारा जात नीविये, जब नि
 - (1) प्रास्ति समान्तर माध्य, (2) गुणोत्तर प्रास्ति माध्य, १३ प्रयोग क्रिया गया हो १

	समूह	तुषकांड	बार
1	साव	350	5
2	इंग्रन भीर विजली	200	1
3.	कपढे	240	1
4.	मकान रिराया	160	1
5.	अ ल्य	250	2

(बी॰ काम॰, बार्बा, 1968)

उत्तर - मारित समान्तर भाष्य भूषकाक == 285 मारित गुणोत्तर माध्य भूषकाक == 275 4

10 निम्न सारणी द्वारा 1960 को माधार मानकर, वर्षों 1961, 1962, 1963, के लिए श्रुखला साधार विधि द्वारा मुवकार जात की विधे :---

1 114 2 2 2 2 3 3 3				
वर्ष	1960	1961	1962	1963
शृक्षविक मूचकाक	100	110	95.5	109 5

(बाई॰ सी॰ डब्लू॰ ए॰ 1969)

ु उत्तर: शृक्षता सूबकाक 1961=110, 1962=10505, 1963=11503]

काल-श्रेणी विश्लेषण

नाल प्रस्तर क साथ विभिन्न परिवर्तन हाना स्वामाविक या प्रावृतिन है। निती स्वास वे विश्लेषण माप प्रध्याय 4 स दिए जा बुन है। निन्तु इस प्रध्याय में यह फ्रप्ययन करेंगे कि काल प्रस्तर व सा र-साथ न्याम म किम प्रवार का परिवर्तन हा रहा है। इस प्रवार के प्रध्यायन प्रध्यावन स्वामाव क्यां के प्रध्यावन क्यां के प्रधान के प्रध

काल-भेणी की परिभाषा

चटित समय वं अनुसार त्रम म व्यवस्थिन परिमाणास्मक न्याम का काल श्रेणी कहते हैं।

यह ग्यास प्रति दिन, मध्नाहिक, मासिक, या वायिक स्वारि स्थितेक पर साधानित हाता है काल प्रेणी पर स्वनवा कारको (Factors) का प्रभाव चहता है। बुछ प्रनाय नियमित प्रकार के भीर कुछ प्रभाव नियमित प्रकार के या सावस्त्रिक होते हैं। किसी भी ग्याम का विभाजित करके प्रभावा कारको के पृथक् प्रस्त्यन स इन सबक सम्मितित प्रभाव के विश्लेषण को काल प्रेणी विश्लेषण करते हैं।

काल-श्रेणी में विद्यमान परिवर्नना का चार प्रमुख वर्गों में विभाजित कर सकत है जा कि इस प्रकार हैं—

- (1) दीर्घ क्रालिक उपनित (Secular Trend),
- (2) ऋतुनिष्ठ विवरण (Seasonal variations),
- (3) चकीय विचरण (Cyclical variations),
- (4) श्रानियमित विचरण (Irregular variations)
- इन्ही चार परिवर्तन-वर्गों का वर्णन इस ग्रध्याय म दिया गया है ।

(1) दीर्घकालिक उपनित

निरन्तर परिवर्तन जो नि एक नम्बे समय तक होता रहे, दीर्घकालिक परिवर्तन कहा जाता है। यह एव रान-श्रेण भे नम्बे समय तक होने बाली सतन हुद्धि, प्रपवृद्धि या निरमेप्ट स्थिति का सूचक है। बाल-प्रेणी विश्वेषण द्वारा या हो दीर्घकासीन उपनित की मात्रा का मार करते हैं या न्यास से इस प्रभाव का निरसन करते हैं। दीर्घकासीन उपनित एक पात (रेखोय) या नैकपानी (Non-Linear) हो सकती है। रेसीय उपनित का समसना सरस है अनः रेसीय उपनित का समसना सरस है अनः रेसीय उपनित वापने की विधियों का वर्णन पहले दिया गया है। यह बात है कि किसी भी सरस रेसा का समीकरण

Y-a-LhX

के रूप में दिया जा सकता है। इसी समीकरण का प्रयोग निम्त विधियों में सावायकता पढ़ने पर किया गया है।

रेलनी या धागे से

यदि प्राफ ऐपर पर प्रोमीगत बिन्दु स्पट उपप्रति को बताते हो हो हाय से ही उपनित रेता को तीच सकते हैं बिन्तु ऐसी स्थिति कम हो होनो है। इस कार्य के लिए व्यक्ति प्रमुमवी होना चाहिंग। व्यवहार में पारदर्भक रेगनी नी सहायता से उपनित रेता शोधी आती है जिताकी विधि इस प्रकार है।

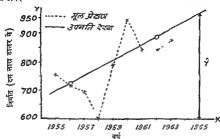
एर प्राफ्तनेपर पर बिन्हुयों का स्वास्त करने इन विरुद्ध को काल के कम में मिला हा। फिर पाइक्ष्में रेपनी को भीरे-भीरे पेपर पर इनका सरकायों कि उसके उत्तर का विनादा सामेशित स्थाप को नगमत हो समान मायों के बिमाबिन कर दे। इस दिनारे पर देशा सीम दो। मही रेमा उपनिन देशा होगी है। इस रेमा हासा प्रारम्भ, मध्ये था साल या प्राय काल के निष्ट मान काल कर सकते है।

रेतानी के स्थान पर प्रामा भी प्रयोग कर गरते हैं। क्योंकि इसके दोनो धोर का दोन भी राष्ट्र दिनाई देना रहना है। किन्तु धामा मुनायम होन के कारण ठीक स्थिति से रोक्ना कदिन है। यन धामें की प्रासा रेतानी का प्रयोग करना स्थित उपकुत्त है। इस विधि का मुख्य धोग सह है कि प्रयोक व्यक्ति घणनी इच्छा के सनुमार रेना तीक महत्ता है भीर उनके द्वारा प्राप्त उसी वर्ष के निष् धाकतक का सात भी निम्न हो सकता है।

उदाहरण 16 1 : अनाया (Malaya) द्वारा विये गये निर्याप सम्बन्धी सौवर्ड 1955 है 1963 दक्ष निर्मन सारणी में दिये गये है :--

कर्ष	1955	1956	1	957	1953
दुल निर्यात (दग माल, डासरो मे)	755	122	6	97	704
वर्ष	1959	1960	1961	1962	1963
हुत निर्मात (दम लाग, शमरों में)	792	947	842	840	877

भनाया द्वारा विधे निर्यान के लिए उपनित रेखा, बारदर्शन रेखनी की सहाबना के निम्न प्रकार सीथ सकते हैं। उपनित रेखा द्वारा वर्ष 1965 के लिए निर्यात को प्राप्तीत भी की गई है। इन विन्दुभी नो प्राफ पर धालेमित नर, रेमनी द्वारा उपनिन रेगा सीच दो फंसा कि चित्र 16-1 में दिलाया भया है। 1965 में ब्रावनिन निर्मात Y=962 दम लास इतिर



चित्र 16-1 रेखनी द्वारा समजिन उपनीत रना

मर्थ-माध्य विधि

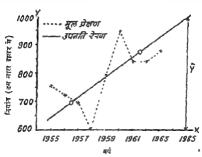
इस विधि में अन्तर्गत न्यास ने प्रारम्भ ने आधे प्रेवणा व धन के आधे प्रेवणों ने माध्य प्रात कर निए जाते हैं और इन माध्य मानों को प्रारम्भ ने आधे वयीं ने मध्य म व अन्त के आधे वर्षों ने मध्य में कम्मण रख दिया बाना है। इन दो विन्दुयों को प्रार पर धालेखित करने मिला देने पर उपनित रेखा शात हा जाती है। यदि न्यास में उतार व बढ़ाव धीवन ने हाती हुछ विधि द्वारा पर्याप्त स्ततीयनन परिणास प्राप्त हाते हैं।

चडाहरण 16.2 . अर्ध-माध्य विधि द्वारा उदाहरण 16 । मे दिव गय न्यास के लिए उपनित देखा निम्न प्रवार झात वर सक्ती है और इस रखा द्वारा 1965 के निए प्रापृत्ति की गई है।

वर्ष	कुल निर्यात (दम साख डानर में)	माध्य मान
1955	755	
1956	722	
1957	697	694 5
1958	604	
1959	792	
1960	947	
1961	842	876-5
1962	840	8/0.3
1963	877	

स्म उदाहरण से बयों की सब्या 9 है। धत. बीच के वर्ष 1959 को न प्रारम्भिक प्राप्त वर्षों से भीर न घन्निस घाडे वर्षों से सम्मितन किया गया है। साथ ही साध्य मानो को 1956 व 1957 श्रीर 1961 व 1962 के स्थय में रक्ता गया है। इन किन्दुर्शों को प्राप्तितित करके सिलाने पर उपनित रेगा की वित्र 16.2 से श्रद्रशित किया गया है।

वर्ष 1965 के सिए भारतित सान Y=1000 दम लाग डासर



चित्र 16-2 - प्रधे-माध्य विशि द्वारा समझित उपनीत रेला

माध्य विधि

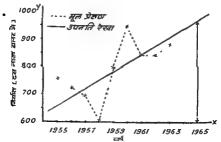
द्रत विधि में प्रारम्भ तथा खात न पांधे नथी ने मान्य मान न नरते, प्रयम तीन न प्रांतम तीन वर्षों (नांसी) ने मान्य गूनन्-गूवन् मान नर तिए जाते हैं घीर दन मान्य मानी दे तीन पर्यों ने मान्य ने वर्ष ने मम्बुल जमा रण दिवा खाता है। द्रत प्रार दो विद्यु तात हो जाते हैं। यदि चाहे तो प्रारम्भ न समत ने तीन-तीन वर्ष न ने ने ना ना मान्य की मान्य तराय भी ने सनते हैं। दिन प्रारम्भ न समत ने न वर्षों नी तयम तराय में ने प्रांतम के ना मान्य ने मान्य तराय में ना मुगन है। इन वर्षों ने मान्य तराय में ना मुगन है। इन वर्षों ने मान्य ना वर्षों ने मान्य ना निवास तराय ने ना वर्षों ना मान्य है। इन वर्षों ने मान्य ना वर्षों ने मान्य ना निवास तराय ने निवास तराय मान्य ने स्वास ने प्राप्त ने स्वास ने वर्षों ने मान्य ना मान्य है। इन वर्षों ने मान्य निवास तराय हो जानी है।

जवाहरण 16.3 . माध्य विधि द्वारा अशहरण 161 में दिने न्याम के निए जपनीन रेता तथा 1965 के निए प्रापुत्ति निम्न प्रवार वर सवते हैं :---

वय	हुल निर्धात (दम साथ डालर में)	मध्य मान
1955 1956 1957	755 722 697	72 4 7
1958	604	
1959	792	
1960	947	
1961 1962 1963	942 840 877	886 3

वर्ष 1956 व 1962 ने तदनुसार मानों को ध्रालेखित वरके मिला देने पर प्राप्त उपनित रेखा निक (16-3) में दिल्माई गई है।

1965 के लिए ग्राकलित मान $\hat{Y} = 933$ इस साख डासर



चित्र 16-3 माध्य विधि दौरा समजिन उपनित रेखा

ग्रतिमान माध्य विधि

गतिमान माध्य विधि को जानने से पूर्व गतिमान माध्य की परिभाषा जानना झावश्यक है जो कि इन प्रकार है। किमी चर का गतिमान माध्य, कालों (units of time) की एक निधारित सस्या के ममान्तर माध्यों की खेणों है। जैसे-जैसे समय बीतता जाता है, निर्धारित काली की मत्या में हे प्रारम्भ के एव बाल के मान की छोड दिया जाता है और अनुवर्ती (succeeding) काल के मान को इसस सम्मितित करने समान्तर भाष्य परिकलित बार लिया जाता है। इस प्रवार प्राप्त अभिवाससम्बद्धाः विशेषी ही धतिसान साध्य (moving average) बहुताती है।

प्रव मुस्य समस्या यह है कि कितने कालों को पितमान माध्य प्राप्त करने के लिय निया जाये जिससे कि उपनित रेखा समभग नरक हो। मैदान्तिक हिन्द से यह कहा जा सकता है कि काला को कम म कम सम्या निया एक साथ तकर पितमान माध्य विधि हारा सरका रेखा प्राप्त हो, क्वोंतिक है। इस सक्या को जानन के लिए अस्पकातिक उतार-च्याव (short time fluctuations) का कितारर्वक सम्याय करना चाहिये। इन उतार-च्याव का पता प्राप्त माक बनावर कर लिया जाता है। यह कालों की सख्या प्राय एक या एक ने अधिक व्यवसाय चकी के समान होती है। इस प्रकार कालों की संस्या का निर्मायन करने के प्रवाद गतिमान माध्य विधि निम्स प्रवार है —

इस विधि वा प्रधोग करन का उद्देश्य अन्यकालीन जनार-चढाश का निरसन करना है। इस विधि बाग प्रधोग रेखीय तथा वक रेखीय जयनति के सबजन के हेतु किया जाता है। इस विधि द्वारा जयनील रेखा शात करने के निष् निरिचन वर्षा (कालो) नी सरुवा का माध्य जात कर निवा जाता है और दम माध्य मान का दन निष् गये वर्षों के मध्य वर्षे में सम्द्रुप रक्ष दिया जाता है। इसके प्रकाद आरम्भ के एक वर्षे के मान को छोड़ दिया जाता है पौर इन वर्षों के समले वर्ष को सम्मित्तव करके फिर इन वर्षों के निष् दिये मानों का माध्य सात कर निया जाता है और इन वर्षों के मध्य वर्ष के सम्मुद्ध इस मान वो रक्ष दिया पाता है। यही क्ष्म चनना रहता है जब तक कि थेणी का प्रतिक्तम वर्षे (काल) सम्मित्तन हो आहे। वर्षों को मुना श्रक्ष पर धौर इन वर्षों के सद्भुत्तर माध्य मानों को कीट प्रक्ष वर के कर मन किन्दुधों को ग्राफ पेपर पर प्रासिन्तव करने मिसा देव पर, समितन उपनीं रेखा या कक शान हो जाता है। जाता है।

टिप्पणी: (वयों के मतिरिक्त नाल की इकाई कोई प्रस्य भी हा सकती है) । प्राय क्यों की विषय सक्या लेना मुक्तिमाजनन हे क्योंकि माध्य ना वर्ष कब्द ज्ञान हो जाना है। गतिमान भाष्य विधि के मुख लगा बीव

इस विधि का मुख्य गुण यह है कि इसमें बयों के चरम मानो का प्रभाव पर्याप्त कम हो जाता है।

बिन्तु इस विधि में मनेब दोप भी हैं जो निम्न प्रकार हैं ---

- (1) एक मुख्य दोष यह है कि प्रारम्भ व धन्न के कुछ वर्षों के लिए माध्य प्रातेश्वित श्वित्र में सम्प्रितिन नहीं होते है, बन यह विधि वर्तमान समय के हेनु विस्तेषण या उपनित मानों के बहिबँबान (Projections) के लिए उपयुक्त नहीं है।
- (2) इसमे धश्युण यह है कि व्यवसाय कर निश्चित नही होता है। मन एन कर में क्यों को सर्वत्र समान सम्बद्ध मानवा भी तुर्क सुवत्र नही है।

- (3) यदि एक चक्र में प्रधिक वर्ष सम्मितित हो नो प्रारम्भ व भन्त के भनेक वर्षों के लिए बिन्द सम्मितित नहीं होते हैं।
- (4) यदि थेणी मे उतार-चढ़ाव ग्रानियमिन हो तो इस विधि द्वारा चत्रीय विचरण का भी निरसन नहीं होता है।

यदि न्यास को देखने व प्रन्य सूचना के धाषार पर उपर्युक्त दोव प्रतीत नहीं होते हो सो गतिमान माध्य विधि द्वारा एक उत्तम उपनित रेखा या वक प्राप्त होता है।

यदि गतिसान माध्य विधि सम वयों के माध्य पर साधारित हो तो इत माध्य के किस वर्ष के सम्भुल रना जाये यह समस्या उत्तव होनी है वयों कि यह गतिसान माध्य एक मध्य वर्ष के सम्भुल न साकर दो वयों के मध्य में साता है। इत इन माध्यों को दो वर्षों के बीच के स्थान पर एक विधा जाना है। फिर इन माध्यों के जोड़े बनाकर, उनका माध्य पिकालित करते है। यह माध्य दिये गये वर्षों में से एक के सम्भुल सा जाता है। इस प्रकार प्राप्त वर्ष तथा गतिसान माध्य के अनुभार विल्डुओं को झालेजित करके उपनित रेखा जात हो जाती है। यहाँ इस विधि के प्रयोग के लिए दो उदाहरणों, एक में वर्षों की सक्या विधन लेकर और इतरे में वर्षों को सस्था वर्षन लेकर होरे इतरे में वर्षों को सस्था सम लेकर, को दिया गया है.—

उदाहरण 16.4 1951 से 1961 तक उत्तर प्रदेश में हुई चावल की माध्य उपम (बवीटल प्रति हेनटर) निम्न सारणों में दी गई है। 3 वर्ष के गतिमान माध्य विधि द्वारा उपनति निम्न प्रशार ज्ञात कर नकते हैं —

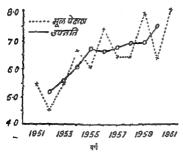
नर्ष	शावल की माध्य उपन (वरीटल प्रति हैक्टर)	বীৰ ৰ্মীয কবিদাৰ দাক্ষ	
1951	5 43	_	
1952	4 51	5-14	
1953	5 4 7	5.54	
1954	6 6 5	6.05	
1955	6 04	6.70	
1956	7-40	6.61	
1957	6-40	6 73	
1958	6 38	6 9 1	
1959	7-96	6.90	
1960	6-33	7.49	
1961	8-18	_	

तीम वर्षों के गतियान मार्घ्यों को निम्न अकार पश्चितित करके तीन वर्षों के मध्य वर्ष के सम्मूल रख दिया गया है।

पहला गतिमान माध्य= है (5 43 + 4 51 + 5 47) = 5 14 माध्य 5:14 को दर्ग 1952 के सम्मृत रला गया है।

दूमरा गतिमान माध्य $=\frac{1}{4}$ (4 51 + 5 47 + 6 65)

सायन 5 54 को वर्ष 1953 के सम्बुन रस दिया। इसी बकार अन्य शनिमान माध्यों की परिवासित करने तरनुसार बाध्य वर्षों ने सम्बुन रस दिया गया है। वर्षों को मूजा प्रदा पर भीर गनिमान माध्यों को कोड़ि खन्न पर लेक्च, विस्तुषा को पार्विमन करने मिला देने पर जयनि जात हो जानी है जैसा कि विच (16-4) में दिकाया गया है।



नित्र 16-4 मृतिमान साध्य विधि द्वारा प्राप्त उपनी रेगा वा निरुपण

उदारक 165 रहमानवेश जिला नजनक द्वार प्रश्नुत सन्दित के सनुसार 1951 में 1960 तब प्रतिक वर्षम वर्षा क्षेत्रे बांचे दिवा की सम्या निक्त प्रकार है ---

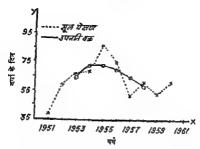
44	1931	1952	1953	1954	1955	
कुस वर्षा वे दिन	39	59	67	68	87	
वर्ष	1956	1957	1958	1959	1960	
रुम वर्षा ने दिन	75	51	6 t	53	18	

इस न्यास के लिए उपनित रेला या कक का गतिमान साध्य विधि द्वारा समजन इस प्रकार कर सकते हैं।

1955 में वर्ष के दिनों को सस्या भरषियन वड जाती है। भनः प्रयम चार वर्षों को लेवर गतिमान माध्य जात विये गये हैं और इनको दूसरे व सीमरे वर्ष के मध्य के सम्मुख रखा गया है।

ঘৰ্ষ	दर्जा है दिन	चार वर्षों के गतिमान माध्य	बुगन माध्यों के माध्य (केन्द्रित माध्य)
1951	39		
1952	59		
		58 25	
1953	67		64.25
		70-25	
1954	68		72.25
		74-25	
1955	87		72-25
		70-25	
1956	75		69-38
		68-50	
1957	51		64-25
		60 00	
1958	61		58-25
		56-50	
1959	53		
1960	61		

इस्तिम स्नम्भ भे दिये माध्यो व तदनुसार वर्षों को झालेशित करके उपनित धारेख ज्ञात हो जाता है जैसा कि किया (16-5) से दिया गया है।



वित्र 16-5 शतिमान माध्य द्वारा समजित बन्ध का प्रदर्शन

बीर्ष कालिक उपनित का न्युनतम वर्ष विधि हारा समजन

उपर्युक्त की हुई सभी विधियो हारा पूर्णनया परिगुद्ध उपनित रेला या वक का सर्भवन नहीं होता है। इसका बारण यह है कि अरवेन विधि में कुछ दोण विद्यान है। अतः गणितीय सिद्धान्त पर आधारित ग्रूननम वर्ण-विधि गर्वोत्तम है। इस विधि का अमेग करते से पूर्व रेला या वक के क्य का निर्णय तो अनुस्थान करती ही करता होता है। वक सा रेगा का क्य निर्मित्त करते के क्यार्य, रेला सा वक सास्प्रत स्वत्त स्वर्त क्यार्य राम अस्त का होता है। इस विधि का संद्यानिक वर्णन समयन स्वृत्त स्वर्ग विधि हारा अति उत्तम है। इस विधि का संद्यानिक वर्णन समयन सम्प्राय 11 में दिया गया है। यहां केवल समंदन करते की विधा का विधा का विद्या गया है। उत्तम है। उपनित रेला वे समयन को इस प्रकार समक सकते हैं।

प्राप्त ग्यास वा प्राप्तस्य करते के वरवात् प्रतेशो रेगाध्ये वर अवंतर दिया का सकता है। इन सब में सर्वेत्तम रेमा बही मानी जाती है जिनको स्वयस्य ध्यानिक बिन्दुधों से दूरी दिनी प्राप्त रेमा बी धरेशा क्या हो। जो दिन्दु इस रेगा पर दिवस नहीं है जनके में पूछ रेक्ष के क्षार धीर बुछ शोध थे घार स्थित होते हैं । इस गास्वक दुरिया को प्रता-रक्ष स स्थानस्य दूरियाँ भी शता जाता है। प्रस्त न्यूतन्य वर्ष दिश्व है वर्ष स्था सीमीकाण क्षान करने हैं जिनको इस साधिक दूरियों ने वर्षों व पोन पूनन्य है। प्राप्त

माना कि बार्यानत उपनति रेखा,

े। उपनित रेला समझन में सदेव काल (समय) को चुना बस पर धोर काल के तदनुसार मानो जैसे किसी उत्पादित पदार्थ की माना, उपभोग पदार्थ की सावा, प्रतिकर्य प्रायात या निर्यान या प्रतिवर्ष बेरोजगारो की मुख्या झादि, को कोटि मक्ष पर निया जाता है भौर इन्हें जमन चर X व Y द्वारा निर्म्पण करत हैं। \hat{Y} चर Y का प्राक्तित मात है। प्राक्तित स्पराक a a b के मात, भूज (138) और (139) के मनुसार निम्म हैं—

$$a = (\overline{Y} \sim b \overline{X})$$

माना कि n कालो के लिए न्याक को समृहीत किया गया है सर्पात् ।==1,2,3,..., n स्रीर.

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{i} Y_{i} - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{i}}{n}}{\sum_{i=1}^{n} X_{i}^{2} - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_{i})^{2}}{n}}$$

नान प्रेमी में उपनित नेसा ने समझन नी विधि इन प्रकार है। कान प्रेमी में दिये वर्षी के मध्य वर्ष को भूग्य और इसके पूर्व के वर्षों को ऋषात्मक सान भीर बाद ने वर्षी को धनात्मक मान, नावान्तर के मनुसार दे दिये जाते हैं। इस प्रकार X के मानों का सीग मदैव गुल्य रहता है। प्रयोत,

इम स्थिति में,

$$a = \overline{Y}; \quad b = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}$$
(16.2)

यदि बर्षों की सस्ता ॥ विषम हो तो मध्य वर्ग स्वष्टत. उपनक्ष्य हो जाता है धीर हमें क्रूप्य मानकर क्रम्य वर्षों के निष् X के मान दिया आता सुगम है, किल्तु ॥ सम होने पर कोई एक नाल (वर्ष) मध्य काल नहीं होता है। इस विलाई को दूर करने के निष् काल के माछे काल को बर X के का में मान निष्या आता है जैसे काल-मन्तर एक वर्षे के नो छ महीने के समय का X मान लिया जाता है धौर मध्य के हो कालो (वर्षों) में म पहले वाले जाता है। इस प्रकार प्रारम की घोर X के मान — 3 — 5 — 7 ... और धन्न की घोर 3, 5, 7 दे विष जाते है।

n का मान सम होने नी स्थित थ यदि चाहूँ तो बीच ने काल (वर्षी) में से पहले काल की X का मान - 10 5 धोर ध्रयले काल की - 1-0 5 दे सकते हैं यत प्रारम्म काल की घोर X के मान - 1.5, - 2.5, - 3.5 और धन्त की छोर 1.5, 2.5 3.5 सल निये जाते हैं। इन माना का प्रयास करने सूत्र (16.2) की सहायता में a व b के

परिकलित मान जात कर लिये जाते हैं। ब च b के मान का समीकरण Y=a+bX म

प्रतिस्थापन करने समजिन उपनित रेखा ज्ञान हो जाती है। इस रेखा द्वारा X के कियो मान के लिए Y का बावनित मान ज्ञात कर मकते हैं।

वबाहरण 16 6 मनेशिया परेलू दचत द्वारा प्राप्त यन स्वति 1964 में 1970 तर ने वर्षों है लिंग निस्त प्रकार है—

वर्ग	यरेन् इचन
	(रंग शांत्र शांतर में)
1964	428
1965	527
1966	554
1967	577
1968	598
1969	625
1970	654

परेलू बचत के लिए उपनित रेना $\hat{Y}_{==2}+bX$ का न्यूनतम वर्ष-विधि हारा समजन निम्न प्रकार कर सकते हैं—

यहीं वर्षों की जस्या n = 7 है जो कि विषय है। अब सप्य का वर्ष 1967 है। दी हुई विश्विके सनुसार अंव Y के सान निम्म हैं जिनका प्रयोग करके 2 व b के मानों का परिकास किया गया है।

वर्ष	x	Y	χª	XY	Ŷ
1964	-3	428	9	-1284	467.785
1965	-2	527	4	-1054	500 570
1966	1-	554	ł	- 554	533 355
1967	0	577	0	000	566 140
1968	ſ	598	1	598	598 925
1969	2	625	4	1250	631-710
1970	3	654	9	1762	664 495
योग	D	3963	28	918	

$$a = Y = \frac{3963}{7} = 566 14$$

$$b = \frac{918}{28} = 32.785$$

पत. उपनित रेखा समीकरण है,

X ने विनिम्न मान रखने पर Y ने मानतित मान ज्ञात हो जाते हैं जिननो कि ठलर सारणों के मन्तिम स्तम्म में ही प्रवीमत नर दिया गया है। जैसे,

जब
$$X = -3$$
, $\overset{\triangle}{Y} = 467\,785$
यदि चाहुँ तो वर्ष 1973 के लिए बाबलित बजन रागि इस प्रकार हाउ कर सकते हैं।

इस स्पिति मे X=6 बौर Y=762.850

ग्रयात् वर्ष 1973 मे 762 850 मिलियन डालर बचत की ग्रामा है।

उदाहरण 167 पजाब की पैक्ट्रियों के प्रतिदिन सीमत श्रमिकों की सन्या सन् 1962 से 1969 तक विस्ता सी----

4 1303 (14 14-14)	_			_	_
वर्ष	1962	1963	1964	1965	
प्रति दिन घौमत यमिको को मत्या (हजार ध्यक्ति)	145	152	168	177	
वर्षं	1966	1967	1968	1969	
प्रति दिन ग्रीमत थमिको को सस्या (हजार व्यक्ति)	104	107	105	107	

फैस्ट्रियों में श्रीमकों की रोजगार के प्रति उपनित रेखा का स्पृतसम वर्ग-विधि द्वारा समजन निम्न प्रकार कर सकते हैं—

विधि 1: यहाँ वहीं की सन्ता बाठ है जीकि सम है यन वर्ष 1965 ने लिए X ना मान -1 धीर 1966 के निए X ना मान +1 मान दिया जैसारि विधि वे वर्णन में दिया गया है। फ्रन्य वर्षों के किए X ने मान तथा परिकलन ने लिए फ्रन्य सक्याएँ निम्न सारणी में दी गई है—

दर्व	₹₹X	भविशा की सहरा (हजार व्यक्ति) (Y)	X2	XY	Ŷ
1962	-7	145	49	-1015	164-667
1963	-5	152	25	- 760	155 655
1964	-3	168	9	- 504	146 643
1965	-1	177	1	- 177	137-631
1966	1	104	1	104	128 619
1967	3	107	9	321	119 607
1968	5	105	25	525	110 595
1969	7	107	49	749	101 583
योग	0	1065	168	- 757	

घन उत्तरीत रेका.

Y=133 125 - 4 506 X

है। X को प्रिमित्र मान देने पर Y के माक्तित मान प्राप्त हो बात है। X के दिव गय मानों के ठटनुनार Y के माक्तित मान ऊपर मानशी क मन्त्रिय स्वस्त्र में दिय गये हैं।

विधि 2: वर्ष 1965 ने लिए % ना नान - 0.5 और 1966 नो +0.5 रन वें बीर प्रत्य वर्षों को भी रही अनार नान दे दें तो उपनति रेता का समजन निम्न सरको नतकर नुगलना ते कर सकते हैं—

સ	ΨX	वायरों की संख्या (हवार व्यक्ति) (Y)	X ₃	XY
1962	-3.5	145	12:25	-507-5
1963	-2 5	152	6.23	-3800
1964	-1-5	168	2 25	-252 0
1965	-0 5	177	0 25	- 88.5
1966	0 5	104	0 25	52 0
1967	1.5	107	2.25	160 5
1968	2 5	105	6 25	262.5
1969	3 5	107	12 25	374 \$
मोग		1065	42 00	-378 5

= - 9 012

धत. चपनति रेखा,

Y=133 125 - 9 012 X

है। यह रेखा विधि 1 द्वारा झत को गई रेखा के जुल्प है क्योंकि यह X के मान विद्युत्ते मानों के प्राधे प्रीर X का गुणाव 'b' विद्युत गुणाव का दुपुता है।

ऋतुनिष्ठ विचरण

दोर्चनानिन उपनति द्वारा नेवल एन नाम में दूसरे नास में परिवर्तन के विषय में ज्ञान होता है। बहुधा एक कास एक वर्ष ही लिया जाना है। मन मधिकनर वर्णन एक काल को एक वर्ष मानवर ही दिया गया है। व्यवहार में यह देजा गया है कि काल श्रेणी के साथ जैसे दस्तुको की बिकी, उनके मुन्य, उपमीन की मात्रा उत्पादन कादि के लिए मान वर्ष के किन्ही महीनों में, तिमाही या वर्ष के बन्य किमी भाग में अधिक या कम होते है। यह यह जानकारी व्यापारी को लासप्रद है कि प्रति मान या विमाही एनका स्थादन या बिजी, वर्ष के भीमत मानिय बिजी या उत्पादन से किननी भश्चिम या कम है, जतः ऋतुनिष्ठ दिचरण एव वह नक्षण माप है जो कि न्यान का, दर्व के बारह महीनों में सचलन प्रश्नित करता है। स्तुनिष्ठ विचरण ज्ञात करने का साधारण सिद्धान्त यह है निकात केणी से दीर्थकालिक प्रमावों का निरमन कर दें और जो शेव विवरण होता है वह ऋतुनिष्ठ विवरण है सर्धात् प्रति मास मानो ने जब दी धंउपनति तथा चन्नीय विवरण के प्रभावों का निरम्न कर दें तो ऋतुनिष्ठ मुखकाक झात हो जाता है । ऋतुनिष्ठ विचरण जानने का लाभ यह है कि ऋतुनिष्ठ परिवर्तनों की व्यापार में भूल या महत्त्वपूर्ण पापिक परिवर्तन न समक निया जाये । नाथ ही इसके ज्ञान के भनुसार बस्तुमी का भण्डार करना, पूँजी भी व्ययस्था तथा बन्तुको को समय के बनुसार उचित मूल्य पर देवने मादि का प्रदन्ध मुचारू रूप ने दिया जा मनता है !

परिभाषा

ऋतुनिष्ठ मूचकाक, वह कीमक प्रतिगत माय है जितका माध्य 100 है धौर वी वर्ष के प्रतिमाम (माध्नाहिर, तिमाही या छमाही) के नामेझ स्तर को निव्यति करता है।

ग्यास का समायोजन

कर्र वर्णन में यह बहा यया है कि जातुनिष्ठ विषयण प्रधिवतर प्रति साझ के प्राचार पर ज्ञात किये जाते हैं। विन्तु हम यह वानते हैं कि वर्ष के प्रापेक साम में दिनों की सम्या समान नहीं होनों हैं, बुछ साम 30 दिनों के, बुछ 31 दिनों के घौर फरवरों 28 दिन का होना है। यत यह ध्यान रचना पावस्यक हो जरा है कि प्रति सास प्राप्त में पर साम के दिनों नी सम्या का प्रभाव पहला है या नहीं। जैने देव में जमा सांसिक धन पर मास से दिनों नी सस्या या धन्य छुट्टियों का कोई प्रभाव नहीं पदला है। ध्रत ऐसे न्यास के समायोजन की धावस्यकता नहीं है। विन्तु सर्द धौर देविनों क्यू के उत्सादन, उपरोग्य ध्राप्ट के हेतु, तिये याये हैं स्थान् सानित सान, दिनों ने मानों का योग हैतो ऐसी स्थिन में यह उचिन है वि शरोब हमानित सान को 30 दिन के सिए परिवर्तित कर दिया जाये। विकी सम्बन्धी न्याम में मुद्धि की आय या नहीं, यह कहना किटन है। क्यों कि यह बस्तु बिमके जिए मौते दे विषे यये हैं उस बस्तु के प्रकार, महत्व या प्रावश्यक्ता पर निभर है।

ऋस्तुनिष्ठ विचरण ज्ञात करने की विधियाँ

(1) समान्तर माध्य विधि

इस बिधि को प्रयोग उन न्याम की स्थिति से करते हैं जिसमें कि उपनित या चनीय विवरण नहीं। इसमें सनेव वर्षों के लिए संगी के सौकड़ों को महीनी के सदुभार सीरणीवत करके, प्रयोग भाग का भाष्य भाग जान कर लेते हैं, इन सब मार्मों का माध्य सर्थात संगतन माध्य (over all mean) आनं कर निया जाना है। प्रयोग माध्य सर्थात संगतन माध्य में प्रतिकान सनुवात ज्ञान करने हैं। यही प्रतिकान ऋतुनिष्ठ सुककांक होना है, ध्यवहार में सनुवान ग्रामीनन करने हमा बहन होने हैं हिन्तु यह स्थान रणते हैं कि इनका माध्य 100 रहें।

इम विधि ना प्रयोग मनमग नहीं निया जाना है नवीनि एंनी धादमै परिस्थितियों जो नि स्याम उपनित या चनीय विचरण म मुक्त हो, बास्तव में मिनना स्टिन है। धन प्रिम्हतर न्याम से उपनित या चनीय, प्रमाय नो दूर करने ही ऋतुनिस्ट पूजनान ज्ञान करते हैं।

(2) उपनति-निरसन विधि

यदि स्वास में दीर्घकालिक उपनित विद्यमान हो तो साध्य विधि द्वारा परिणाम मुद्र नहीं होते हैं घन ज्यास से उपनित का निरसन करना घरवन्त घावस्यन है। उपनित का निरसन करने के प्राथान उपस्था पांकी से ज्यानिष्ठ नुक्कां बात करते हैं।

यदि म्यास को देशकर स्पष्ट हो कि जनकरों से दिमाकर तक मूल्य या उत्पादन प्रार्थ के प्रति मान निरुत्तर यह या बढ़ रहे हैं थी उपनित के लिए समस्योगन निम्न प्रकार करते हैं—

उपनि ने लिए दी हुई विभिन्नों में से विश्वी एक वे द्वारा दीर्घवालीक उपनि देखा सभीवरण ताल कर लेने हैं। चर X का गुणांक प्रति वर्ष होने वाले परिवर्गन का सूचक है। इस सूचकार को प्रनिवर्ष होने पर 12 से (या च्युताल के घनुसार तक्या से) भाग करके प्रति मास (प्रति चनुताल) गुमांक सात कर सेने हैं।

मीर ऋजुनिन्छ दिवस्य प्रध्नेमास कात के साधार यर जात करना हो हो एक मात के सिए प्रान्त पुनांक का साधा करके धर्ममास के सिए X का नुनांक करना हो जाता है। वर्षे में महीनों की सबसा 12 है जो कि सब है घड जून मास के प्रारम्भ से पर्ममास सम्माग – 1 है धर्मि पर्स के प्रारम्भ तक – 3, यर्भ – 7, यर्भ – 7, प्रदर्श – 9, जनकरी – 11, स्प्रेमास स्वत्वता हरी पर है। इसी मका 15 जुनार के दिनावर के धन्त तक स्प्रेमास अन्तराम हरिया, 1, 3, 5, 7, 9, 11 है। याता कि जनकरी से दिसावर

तक के माध्य परिमाण घारोड़ी जम में है तो घड़ेमान गुमान को जनवरी की घोर घड़ेमान धनतरान दूरों से गुणा करने जोड़ नेने हैं धौर दिमखर की घार प्रीक्षत मानों में में नदनुमार मरमाएँ कमण घटा देने हैं ! यदि माध्यों का कम घड़रोड़ी हो तो जोड़ने क घटाने की त्रिया उनट खाती है। इस प्रकार प्राप्त संशोधित माध्य मानों के लिए समान्तर माध्य दिथि हारा कृत्तिष्ठ सुकार जान कर सकते हैं !

दिप्पची . इस विधि वा उपयोग बहुत वस हो पाता है क्यों व उनवरी से दिनस्वर तब तिरुत्तर वृद्धि या बसी व्यवहार से न वे समान पार्ट जाती है। यदि विसी त्यास वे लिए दिया हुया प्रतिबन्ध सहय प्रतीन हा ना उस विधि वा प्रयोग घषण्य बरना वाहिए।

(3) उपनित से प्रनुपात विधि

इस विधि के झम्माँन वर्ष थेमी के अस्तर साह के सान का उपनित रेखा द्वारा प्राण उस ही वर्ष के माह के लिए कोटि मान से प्रतिकत अनुपान जान करन है। इन अनुपानी को प्रति माह क वर्ष के अनुपार मारफीबढ़ करके अपनित माह का उर्थ थेमी के मानी का माध्य झात कर निया जाता है। इन माध्यों के साध्य सान ऋतुनिष्ठ सूबकाक प्रदिण्य करते हैं।

इस विधि द्वारा नेवल उपनित प्रभाव ही दूर हान है धीर साध्य लेन पर धानिसीनन प्रभाव दूर हो जाते हैं। विन्तु चनीय प्रभाव प्रभाव दूर नहीं होने हैं। इस विधि ना प्रमाय वेवल उन खेणी के निए धारिक उपनुस्त है विनमें चनीय व धानिसीनन प्रमाव न हो धीर उपनित ना परिचुद के साथ परिकतित विचा जाना सम्मन्न हो। यदि चाल खेणी में यह पुण विधनान न हो तो विन्ती सम्य विधि ना धपनाना चाहिए।

(4) गतिमान माध्य विधि द्वारा ऋतुनिष्ठ सूचकांक

यह विधि घन्य विधिमी की घरेक्षा उत्तम ह धीर इसका मक्य मधिक प्रमोग हीना है। ऋतुनिष्ठ मूचकार ब्राह करने की कार्य विधि निस्स प्रकार है—

सिंदि विभिन्न कार्निक वर्षों के निर्मानिक स्थास दिया गया है तो खेणों के पहले वर्षे के बारह महीनों वा माध्य कात करते हैं। इस माध्य को जुन व जुनाई वे बीच के स्थान के सम्मुख रख देने हैं। फिर इस वर्षे के प्रथम मान जनवरों के मान को छोड़ देने हैं और प्रयत्ने वर्षों के प्रथम मान के मान को छोड़कर 12 महीनों वा माध्य जात करते जुनाई व प्राप्त कर्ष के मान साम के मान को छोड़कर 12 महीनों वा माध्य जात करते जुनाई व प्राप्त के मान स्थान के समुख रख देने हैं। यही कम चलना रहना है जब तक कि वर्ष बेची वे सब मान सम्मितित न हो जीय फिर इस माध्यों से दा माध्य सेवर तहन साहित कर तहन कि वर्षों के सम्पान साध्य नात कर निर्माण जाने हैं। महने पहने माध्य को जुनाई के सम्मुख रख दिया जाना है धीर इसके पश्चात् के माध्य प्रयत्न, वित्तम्बर स्थादि के मम्मुव रख दिये जाते हैं।

किर प्रत्येक मात्र के मान ना उनके सम्मुख गतिमान माध्य से प्रविषद मुद्रगत शात करके इस मान के सम्मुख रख दिया जाना है। प्रत्येन माम के लिए प्रनिवन सदुरात की माध्यिका ज्ञान करेली जाती है। इन माध्यिकामा का माध्य ज्ञान करेले, प्रत्यक साम्र की माध्यिका का इस माध्य से आस्य देवर समायोजित माध्यिका कर परिकलन कर निया जाता है। यन ध्यान रमना हाला है कि इसका माध्य 100 हा।

उपयुत्त विधि साधारणा प्रयाग म लाई जाती है विन्तु प्रत्येव माल वे प्रतिस्त्र स्तुपाता वी माध्यिवा भात वरना स वस्यत्र नहीं है। हुछ व्यक्ति माध्यिवा वे वस्ता सर साध्य या भी प्रयोग वरन है। इसक सर्तिद्देश यह भी आवश्यक नहीं है कि नईब 12 महाना गातिसान माध्य नाव विधा जाये। यदि न्यान हारा एगा प्रतीन हाता है कि नर यत्र विभाव अध्याप माध्य नहीं महाना वो विधा वात्र म पूछ हा जाता है तह इन्हों महीना को नार पिनाम माध्य साह वरना चाहिये। इस विनाम माध्य वह इस काल क मध्य के माल क मध्यत्र इसना होना है।

दग विधि वा प्राप्त यह है कि 12 जीनन महीनों का यतिमान माद्य पन स वर्ताय नया उत्पार्ति प्रशास दूर हा जात है या यह कह कि रेलीय तथा बकरणीय उरनित का निरमन हा जाता है। इसक पश्तान् प्रतिगत प्रमुगाना का सम्मितित वर्षों के प्ररोक्त मान किता माद्य या माध्याना जान करने वर प्रतियमिन प्रभाव भी दूर हा जाते हैं। इस प्रशास ना मृत्यान प्राप्त होता ने यह वयत ख्युनिस्ट मुक्तांक ही प्रशीसन करता है।

दन विधि संस्थ विधियों को शांता अधित परिवस्त वरता होता है। विन्यु उत्तर दिस मुनान कारण दशका प्रयोग वरता उचित है।

उदाहरण 168 अध्युरं भ 1958-196ो तर व यहूँ व पुरुवर भाष ग्री साह गुरुव दिस ग्या स्नार का स्थान के जिस क्षित्रात साध्य विधि द्वारा अनुनिध्य सुक्वांच विद्या भ्वार भाग कर गुरुव है। इस उदाहरण स दियं गय भाव स्था परिवृत्तिन गृतिमान साध्य सब समुगार क्वा हा हारका संदिय गय है।

जबपुर मे गैहें के फूटकर भाव (दप्य प्रति सन)

41/117	भाव	12 মধানা বা দ্ধিনাৰ নাথে	গরির নাত্র	र्गतमान वास्य ≅ प्रतिसद सर्दुसा
1	2	3	4	5
1958				
जनवरी:	16 00			
फरवरी	15 00			
मार्थ	15 00			
ध्यत	15 00			
मई	15 25			
जून	16 50			

		18 04		
जुलाई	17 00		18-11	93 87
		18-18		
ग्रगस्त	19 25		18 42	104-50
		18 65		
सितम्बर	21-46		18 80	114-15
		18-95		
ग्रस्टूबर	21.25		19 08	111-37
		19-21		
नदम्बर	24 75		19-24	128;63
_		19:37		
दिसम्बर	20 00		19 50	102-56
1959		19-62		
जनवरी	17:60	19.02	19.66	89-52
		19 69	,	
फरवरी	20.80		19.58	106-23
		19-48		
मार्च	18 50		19 38	95.46
		19-29		
मप्रैल	17 50		19.56	89 47
मई	18:37	18.82	19.10	
46	10'37	18 73	18.78	97 82
भून	18 50	10 / 5	18 83	98-25
		18 93		
जुसाई	20 00		18 89	105 88
		18.86		
धगस्त	20 00		18 94	105 60

1	2	3	4	5
		19 03		
वितस्बर	19 00		19 05	99 74
		19 07		
ग्रन्द्रवर	19 00		18 38	100 10
		18 MR		
नवस्वर	19 00		18 84	100 85
		18 79		
दिसम्बर	19 00		16 70	101 60
1960				
		18 62		
अ उबरी	20 00		18 54	107 87
		18 46		
करक्री	20 00		18.39	109 81
		18 29		
मार्थ	20 50		18 24	112 39
		18 18		
धप्रेल	18 00		18 12	99 34
		18 05		
मदे	19 00		17 97	89 DI
		17 89		97 82
जू ग	17 50		17 89	91 64
_		17 89	17 89	100 61
रुवाई	18 00	17 89	1107	100 01
	18 00	1702	17 82	101 01
भगरत	19 00	17 75		*
सितम्बर	17 00	• • • •	1766	96 26
(40.41	1100	17 58		

1	2	3	4	5
ग्रन्ट्रबर	17 60		17 68	99 55
_		17 78		
गंबस्य र	17 50		17 84	98 09
		17 90		
दिसम्बर	17 06		17 90	95 31
1961				
_		1789		
ननवरी	20 00		1786	111-98
		1783		
फरवरो	20 00		17 79	112 42
		17 75		
मार्च	18 81		1768	106 39
		1761		
चप्रेल	16 00		17 55	9117
		17 49		
मर्ड	18 37		17 53	104 79
		17 57		
जून	19 00			
जुलाइ	17 88			
मगस् त	17 25			
सितम्बर	16 00			
धक्टूदर	16 00			
नवस्वर	16 00			
दिसम्बर	18 00			

उपर्युक्त तारणों में 12 महीनों का माध्य जून व जुलाई माह के बांच स्थित किया गया है। फिर पिछले वय न प्रारम्भ म एक मान घटाकर और अगने वर्ष के प्रारम्भ का एक मान जाडकर गनिमान माध्य ज्ञात कर खिबा जाता है। यही क्रम प्रन्त तक चलता रहता है।

गतिमान मध्य ज्ञान करने तथा विदित मध्य पान वरन का विधि पही 🗦 जो उराहरण (165) सदा गई है। भावों के यनिमान माध्य व प्रनिशत धनुपान सगरे न्तरम म निय गय हैं। इन गतिमान माध्य म बालान की सहायना म ऋतुनिए मुनकाक ज्ञात कर सकते हैं। यहीं इन वधीं का तहा विवा जासकता जिनक तिस सब महाना क धनपात उपसम्य नहीं है ।

दर्प	जनवरी	वण्यरी	मार्च	এরীশ	मई	জুৰ
1959	89 52	106 2	3 95 40	89 47	97 82	98 25
1960	107 87	1088	1 112 39	99 34	89 04	97 82
योग	197 39	2150	4 207 85	18881	186 86	196 07
माध्य	98 70	107 5	2 103 92	94 45	93 43	98 01
ऋतुनिष्ठ सूचकोक	98 84	107 6	7 104 0	94.58	93 56	98 1
14	मु पा र	अगम्स	शिनध्दर	अन्द्रवर	नशमार	(न्यम्ब६
1959	105 8×	105 (0	9)74	100 10	100 85	101 60
1960	100 61	101 01	96 26	99 55	98 09	9531
योग	206 49	206 61	196 00	199 65	198 94	19691
माध्य माध्य	-	103 30	98 00	99 82	99 47	98 46
माध्य ऋतुनिष्ट सूचकोत			98 15	9997	99 61	98 56

माध्या वा योग==119834

इन माध्यां वा साम 1200 सान व सिए प्रश्यक साध्यं वा <u>1700 00</u> ⇒ 1 00 138

स गुणांकर नियाजाता है। इस प्रकार को समाधानित साध्य प्राप्त कात है ऋतुनिष्ठ

गुषकांक के मान हैं। टिप्पणी यहाँ उदाहरण स नेवन बार वय वा स्वास तिया त्या है बास्तव में प्रीप्रक वयों को साम्मित करक ऋतुनिष्ठ मुक्ताक ज्ञान करना काहिय । सही यह उनाहरण केवल परिवर्गन विधि को स्पष्ट करने के उद्देश में रिया गया है।

अर लिक सापेक्ष विधि

इस विधि वे सालगत काल थला लग क अध्यक माहक मान का पिछल माह क प्रतिनात न रूप मंसियत है। इस प्रकार एक माह क मान का पिछल माहक प्रतिनन ह रूप म परिवर्तिन करने स उपनित का निरसन करने के लिए बसय स परिकर्तन नही करता हाता है। संबाद इसका निरमत क्वय हा हो आता है सीर चक्रय प्रभाव भी भूततम हो जाने हैं। फिर प्रत्येक मास ने लिए येजी में माध्य लिया जाता है जिससे कि घनियमित प्रभाव भी लगभग दूर हो जाते हैं। इम विधि द्वारा ऋतुनिष्ठ मूचनान ना परिकलन निम्न प्रकार नर समते हैं। इस विधि ने चरणश परिननन नो उदाहरण (169) नी सहायता से स्पष्ट निया गया है भौर पूर्ण हुल इस विधि के धन्त में दिया गया है।

उदाहरण 169 राजस्थान प्रात मे घरेल विजली का उपयोग 1962 से 1964 तक प्रति माह दिया गया है। विजली के उपयोग के लिए श्रृक्षलिक सापेश विधि द्वारा ऋतुनिध्य मुक्काल निम्न प्रकार क्रांत कर सकते हैं।

बिजसी का उपभोग (हजार AWH)

14	जिसा का उपभाग (हजार AW	/н)
वप/माह	उपभोग	প্রবিষ্ঠান সূত্রনিক आऐशिक
1962		
जनवरी	1640	
फरवरी	1605	98
मार्च	1681	105
ग्र प्रेल	1741	104
मद	1764	101
जून	1777	101
সুলা ई	1781	100
द्मगस्त	1766	99
सितम्बर	1504	85
सन्दूबर	1523	101
नवम्बर	1574	103
दिसम्बर	1543	98
1963		
जनवरी	1875	122
फरवरी	1357	72
मार्च	1377	101
द्मप्रेल	2086	151
मई	1699	81
জুন	1675	98

वर्ष/भाह	उपमोर	भू सनिक बारेलिक
जुलाई	1699	101
ग्रगस्त	1699	100
सितम्बर	1699	100
सन्द्र बर	1699	100
नवम्बर	1889	111
दिसम्बर	2058	109
1964		
जनवरी	1897	92
करवरी	1911	101
मार्थ	1879	98
श प्रेल	1704	91
मई	2024	119
जून	1700	84
নু লাई	1478	87
प गस्त	1417	96
सितम्बर	1912	135
धक्टूबर	1809	95
नवम्बर	1409	78
दिगम्बर	1515	108

সুনে বিচ চাইচিক) राष्ट्रपाँकत करने जिला गया है न्योकि दशने सुनिधा है। আধি है। অधिक पश्चित परिचास भाहते हो तो पूर्णीकत न नरें।

(1) श्रुष्टांतक सामितिक का परिकासन — प्रश्यक माह ने प्रेसिन मान को इनके विस्ति माह के मान से भाग करने, 100 में गुणा कर दो पर प्रति साथ ग्रुप्य कि पार्थिक प्राप्त हो जाने हैं। जैसे यदि जनकी से दिनक्कर एक प्रेमिन मान प्रमान प्रमुप्त हो जाने हैं। जैसे यदि जनकी से दिनक्कर एक प्रेमिन मान प्रमुप्त

है तो फरवरी माह का प्रतिकृत भूतिक पापेशिक (गृ॰ धा॰)

$$\frac{X_2}{X} \times 100 = \frac{1605}{1640} \times 100 = 98$$

दे समान है, मार्च **का शु**० सा०

$$\frac{X_3}{X_2} \times 100 = \frac{1681}{1605} \times 100 = 105$$

दिसम्बर का भू० भा०

$$\frac{X_{12}}{X_{11}} \times 100$$

सादि। स्पाने वर्षं ने जावरी ने मान नो पिछले वर्ष ने दिनम्बर ने मान से माग करके, 100 में गुणा नग देते हैं। इस प्रााग जावरी ना प्रान्तिन धापेक्षित जात हो जाता है। जनवरी ना प्रार्थ

$$=\frac{1875}{1543} \times 100 = 122$$

यह ऋम तब तक घलता रहता है जब तक कि चन्त के माह के लिए शुक्ष्यिक प्रापेक्षिक ज्ञान न क्षी जाये ।

(2) माध्यका जात करना —इन श्रव्यक्तिक बायेक्षिको को वर्ष थेणी के प्रत्येक माह के मनुतार सारणीबद कर लिया जाता है और प्रत्येक माह की सलग-प्रकाग माम्यिका ज्ञात कर लेते हैं। जैसे जनवरी के माध्यिका

$$=\frac{98+122}{2}=107$$

व फरवरी की 98 है। यह माध्यिकाएँ सूचकाक को जिरुपित नहीं करती हैं तथापि केचब शृक्षीन प्रामित की माध्यिकारों ही हैं। यह ध्यान रहे कि इन विधि में सूबलिक प्रामित्रों के प्रत्येक माह के जिए माध्य नहीं ज्ञान किये जाते हैं प्रयंत् केवल माध्यिकारें ही बात की जाती हैं। इन माध्यिकाधों के हारा ऋतुनिष्ठ सूचकाक की दचना की जाती है।

(3) शुक्र सिक भागेकिक मान जात करना — अनवरी साह नी माध्यका को 100 मात हेत है। उसने भगेले माह सर्थाद करवरी माह की माध्यका को पिछले माह की माध्यका के परिवर्तत मान स गुणा करने 100 में भाग देन पर इस माह (करवरी) का शुक्र तिक माध्यका भाग हा जाती है। जैसे यहाँ शुक्र शित सामेधिका भाग हा जाती है। जैसे यहाँ शुक्र शित सामेधिका भाग हा जाती है। जैसे यहाँ शुक्र शित सामेधिका माध्यका

$$=\frac{(100 \times 98)}{180} = 98$$

इसी प्रकार सार्च माह दी माध्यदा को फरवरी माह दी श्रृव्यतिक माध्यिका सं गुणा करके, 100 से भाग देने पर मार्च की श्रृष्यतिक माध्यिका ज्ञात कर लेते हैं। जैसे श्रृ० प्रापेशिक माध्यिका

$$=\frac{101\times98}{100}=99$$

है। इसी प्रकार फाय क्षत्री गडीनी के लिए श्वांतिक माधिकाएँ जान कर सी बाती है। एन्त में जनवरी पाह के लिए श्वांतिक सारेशिक, दिसाबर माह की श्वांतिक माधिका व जनवरी पाह की माधिका के गुलनफत को 100 में भाग करने पर प्राप्त होता है। जैसे श्वं प्रारंधिक माधिका

यह स्थानिक माध्यकार्षे समिनट क्युनिस्ट विचला को निर्मापत करती है जिसका स्थानिक माधिसिक झात करते समय नाम देने के कारण सनि हो गर्व थे। स्थानिक माधिकारों (जिसे परिवर्तित मान भी कहते हैं) या समायोजन यरता होता है जिससे कि जनवरी माम की स्थानिक समाधिकारों (विचर्तित मान भी कहते हैं) या समायोजन यरता होता है जिससे कि जनवरी माम की स्थानिक समाधिकार (विचर्तित मान) 100 हो जाये।

समायोजन गुणन लग्ड के परिकलन के लिए सुत्र निम्न प्रकार है -

जैमे यहाँ

$$C = \frac{100 - 120}{12} = -\frac{5}{3}$$

धन जनवरी मे दिनस्वर तक समायोजिन मान जमस. $0 \times C$, $1 \times C$, $2 \times C_{p,m,m,s}$ $11 \times C$ ने समान होते हैं। इन समायोजन मानों को जमस स्थानिक सोनों की सारियर से जोडकर समायोजिन स्थानिक साध्यनाएँ तत कर तो जाती है। जैसे जनवरी के दिए एमायोजन सबया= $0 \times (-\frac{c}{2})=0$, करवरी के निए= $1 \times (-\frac{c}{2})=-1$ 7, मार्च के दिए $2 \times (-\frac{c}{2})=-3$ 3 साथि।

ऋत्निध्ठ सुबकांक ज्ञान करना

इन समाप्तीनन माध्यवाधा वा मध्य तात वरवे, शयेश समायानित माध्यका वा मध्य से भाग करके बुवतंत्र तात वर शिक्षा जिला है जिलस कि इनका बाद्य 100 ही बारें।

टिप्पची: (1) मूचकांक में मण्डिकतर नश्यामी का पूर्णांकन करके तिराते हैं मर्पान् रक्तमस्य को पूर्णीकन करने हटा देने हैं।

(2) यह विधि सन्य विधियों को स्रोता नवने विध्त है। दिन्तु शृलिक स्रोतीय ज्ञात करने से श्रवीय या देवरिंगी उपनित के प्रभावों का निरमन हो जाता है और समायोजन करने से उपाणि का निरमन हो जाता है। इन्हों सुनी के स्वास्त, यह निर्धि करिन होने हुए भी मधिक प्रश्नित है।

महीनों ने ग्रनुसार नाल-श्रेणो ने श्रायितन धापेक्षिनो नो धवरोही कम में निग्न मारणी मे व्यवस्थित करके रस दिया और इन भोपेक्षिको की माध्यिका ज्ञात कर ली गई है।

	অন্বদী	करवरी	मार्च	अप्रत
-,	122	101	105	151
	92	98	101	104
		72	98	91
माध्यिका	107	98	101	104
शृखलिक	100	98	99	103
भ्रापेक्षित माध्यित	Ī			
समायोजित आपे हि	तक 100 D	96 3	957	98 0
ऋतुनिष्ठ सूचक	त्र 107	103	103	105
	म ई	ৰূ ব	जु लाई	अगस्त
	119	101	101	100
	101	98	100	99
	81	84	87	96
माध्यिका	101	98	100	99
भ्रु खलिक	104	102	102	101
माध्यिका ग्रापेक्षिक	5			
समायोजित आवेहि	事 97 3	93 7	92 0	89 3
त्रतृतिष्ठ सूचकाक	105	100	99	96
	सितम्बर	अस्टूबर	नवस्वर	दिमम्बर
	135	101	111	109
	100	100	103	108
	83	95	~ 8	98
माध्यिका	100	100	103	108
म्यु खलिक माध्यिका धापेक्षिक	101	101	104	112
मायोजित ग्रापेक्षिः समायोजित ग्रापेक्षिः		86 II	87 1	93 7
ऋतुनिष्ठ सूचकाक	94	92	94	101

$$=\frac{-20}{12}=\frac{-5}{3}$$

पत जनवरी से दिसम्बर तथ मनायोजन सहयाएँ है

$$0 \times \frac{5}{3} = 0, -1 \times \frac{5}{3} = \frac{-5}{3}, -2 \times \frac{5}{3} = \frac{-10}{3},$$

$$-3 \times \frac{5}{3} = -5, -4 \times \frac{5}{3} = -\frac{20}{3}, -5 \times \frac{5}{3} = -\frac{25}{3},$$

$$-6 \times \frac{5}{3} = -10, -7 \times \frac{5}{3} = \frac{-35}{3}; -8 \times \frac{5}{3} = -\frac{40}{3},$$

$$-9 \times \frac{5}{3} = -15; -10 \times \frac{5}{3} = -\frac{50}{3}; -11 \times \frac{5}{3} = -\frac{-55}{3}$$

समायाजिल चापेक्षिक नाव्यों का योग≈1117 0 चत इतका योग 1200 लाने के लिए, समायीयन यकक

$$=\frac{1200}{1117} = 1074$$

मभाय। अने गुणक का प्रकोण करक ऋतुनिष्ठ सूचकोक उपर्युक्त सारवी की समित्रम पक्ति में रिकासे गय हैं।

अनुनिष्ठ मुख्यांक का बीच 1200 सहोकर 1199 है। एवं वा सन्तर पूर्णांकन के कारण है।

दिस्थमी उन्युक्त विधि वेचन तीन वर्ष ने घांवडों को लेकर दी गई है। इस विधि का स्थान की हुई सीन के अनुनार कियों भी जम जी में ते लिए कर सकते हैं। इस कि दी हुई विधियों ने मिनिक्त क्ष्मीत्रक कुचांव झान नरने की धाय धनेक विकित्य प्रधान मार्च आप कि ती धाय धनेक विकित्य प्रधान की अपनी हैं जम विकित्य प्रधान कि सिंध (Bauman Moving Average Difference Method), काकतर की उपनीत-जिन्मत धन्य विधि (Calmicha' liest Difference Method), काकतर की उपनीत-जिन्मत धन्य विधि (Falkner Percent of Trend Method) मारि। यह विधियों बता कहा ही प्रयोग में साई जाती हैं। इतका बचन दम धन्याम में नरि क्या प्रधान के स्थान के स्थान के स्थान के स्थान की स्थान के स्थान करने स्थान की स्थान क

ऋतुनिष्ठ प्रभावों का निरसन :

ऋतुनिष्ठ प्रभावों हो दूर वरने नो एन साधारण विधि सह है नि प्रति मास प्रेक्षित मानों में तरतुसार ऋतुनिष्ठ मूचनान में भाग नरने 100 में पुणा नर दें। इस प्रनार यो समायोजित मान प्राप्त होते हैं वह ऋतुनिष्ठ विचरण से युक्त होने हैं। हुछ व्यक्ति सन्य विषयों ना भी प्रयोग नरते हैं निन्तु वह विधियों नुष्ठ विशेष परिस्थितियों में ही उपस्क होती हैं!

ऋतुनिष्ठ परिवर्तन समस्याः

जिन विधियों का वर्षन क्रमुनिष्ठ मुबकार जान वरने के हेतु दिया जाता है वह सब ही इस करमना पर साधारित हैं कि कुन काल यो पा के वर्षों से अनुनिष्ठ परिवर्डन का प्रतिक्ष्य सगमग्र एक सा ही रहता है। किन्तु यह नियनि हर पदार्थ के निर्म स्थान नहीं पाई जाती है। समय के साथ परिस्थिनियाँ और परिन्धिनियों के साथ अनुनिष्ठ प्रसाव भी बदलते रहते हैं। जैमे बुछ समय पूर्व कोधना इंचन का एक साब साधन होने के कारण सरद क्रमु से प्रधिवर सामा में उपयोग होता या धीर मूल्य भी धीं किन्तु साधिनिक काल में विवर्त व गैम वा कोधने के स्थान पर प्रयोग होने के कारण अनुनिष्ठ प्रसाव से परिवर्तन हो गया है। सत्य पदि काल व्यंभी संधिवर वर्ष सम्मिनित हैं तो अनुनिष्ठ परिवर्तन हो स्था होना क्षामां कि हो है।

ऋतुनिक्त परिवर्तन नमन्या नुक्त हो। बदावों को स्थिति से होती है। इस ममस्या को दूर करने का एक भुगम उदाय यह है कि केवल उन हो वर्षों को एक खेणों में तेकर ऋतु-निक्त सुबक्तक मात करना चाहिये ज्ञिनमें परिस्थितियाँ सगमग एक सी हों। यहाँ इस समस्या को बताने का उद्देश्य प्रस्थयन कर्ता को इस परिवर्तन के प्रति सज्य करना है।

चकीय विचरण-मापन:

षत्रीय विचरण से प्रानिशाय एक दीर्घावधि में होने वाले विचरण में है। यह प्रविष्ठ एक वर्ष से प्रधिव होती है बगीक बार्षिय विचरण को वहने ही उपनित के प्रमुज्य दिया था जुका है। दीर्घावधि विचरण को स्थापार में नेपा राष्ट्रीय प्राधिव नीति को होष्ट से बहु महत्त्व है। इन प्रचार के विचरण, बाल की मीं ने तो बात के प्रमुज्य प्रदित में हो है। स्वापार ने प्राच ऐसा देखा गया है कि हुए बाल तक प्रमार के प्रधात के प्रचात के

चत्रीय विचरण के मध्ययन करने का एक मूल मिद्धान्त यह है कि श्रोणों में से उपनित्र भीर ऋतुनिष्ठ विचरण का निरमन कर दिया जाये हे इस प्रकार श्रोणों में केबल बन्धेय तथा मनियमित विचरण हो शेष रह जाते हैं। वास्त्रव में मनियमित विचरण को बन्धेय विचरण से पृषक् करना एक कटिन समस्या है बयोकि चत्रीय विचरण स्टब ही कात तथा परिसाण की रिष्ट से सिनियमित होते हैं। यही कारण है कि अब तक कोई मन्नोपजनक विधि इसके निए नहीं दी गई है। इन दोनों को अंधो में से उपनित या फ्लुनिस्ट विचरण के साधार पर पूजक करना समस्य समस्यक है। वेचन किसी पर्य मा नान में मिर कोई ऐसी परनाएँ परित हुई हों जा कि सिनियमित विचरण या सहस्यान् परिन्तनेत के लिए उत्तरायों परित हुई हों जा कि सिनियमित विचरण या सहस्यान् परिन्तनेत के लिए उत्तरायों हों, तो इस सिम्मितन कान वो कान स्वेणों म होने वाले विचरण को सिनियमिता से मन्यन कर सकते हैं जैसे इस कान में मूला पर अपने, बाद सा जाये, पूर्वण परा जाये, पूर्वण पर अपने हैं जी इस कान में सुवा पर अपने, बाद सा जाये, पूर्वण पर अपने अपने के तिए पुत्त परवारों के लिए पुत्त परवारों के किए सुत्त के स्वर्ण के स्वर्ण के स्वर्ण के सिर्म कर सिर्म के सिर्म के सिर्म के स्वर्ण के सिर्म कान सिर्म के सिर्म कि सिर्म के सिर्म क

(1) अश्रीय विवरण का पुष्पकरण पत्रीय विवरण के सिए प्रायधिक प्रित्यमित होने के कारण उपनित या खुनुनिष्ठ विवरण की मीति मुक्तिक कार करना तो प्रयम्भ है, किन्तु प्रेणी से उपनित तथा खुनुनिष्ठ विवरण को निरस्त करने के पश्चीय विवरण के विषय से पर्योग्त कान प्राप्त हो बाता है। यदि येथी वाविक प्रोक्ती पर प्राप्तारित है तो इससे खुनुनिष्ठ विचरण विद्यमान होने का तो प्रस्त ही नहीं उठना। प्रत्त मिलित मानो वे वेदनुनार उपनित कोटियों हारा भाग देने पर प्राप्त मनायोगित मान उपनित प्रत्त थे भी प्रदान करते हैं। यदि प्राप्त कार होते विवरण कोटियों का प्राप्त करते मिलित प्राप्त करने प्राप्त करने हैं। यदि प्राप्त कार के प्राप्त करने प्राप्त करने प्रतिगत विवरण हो प्राप्त कार कार कर वेदियों है। यद इस विवरण के बेदन करीय व प्रतिगत विवरण ही प्रयोगित प्राप्त कार कर वेदे हैं। यद इस इस वर्णी से बेदन करीय व प्रतिगत विवरण ही प्रयोगित हु जाते हैं।

उपर्युक्त विधि इस बल्पना पर आधारित है वि उपनित नोटियों घोर ऋगुनिष्ठ सूचनांक पूर्यंगया उपनित क्षण ऋगुनिष्ठ प्रमाची ने प्रतीक है। विन्तु बास्तव में ऐसी विधि प्राप्त होना निजन है। धन इस विधि द्वारी परिगुद्ध चन्नीय विचरण सात होने की सम्मावना बहुत बम है। चिर भी यदि इस बल्पना ने साथ होने का प्रस्थाप प्रमाण हो तो इस विधि का प्रयोग करना उनित है।

विसी विधि द्वारा उपनित्व ऋतुनिक्ट विषयम वा निरान करने वे बार प्राप्त थेवी को प्राप्तीयन वरने गर्नी (Eroughs) एवं मोगी (Cross) को देगकर पंत्रीय विषया बात कर सिए अर्ति हैं।

वपन्ति--निरसन द्वारा चत्रीय विचरण ज्ञात बरन की कुछ विधियाँ निम्न है --

विधि 1: प्रथम करतर विधि । यह पिछते सम्ब में दिया वा पुरा है कि वर्षिक कान भे तो में क्युनिस्ट विक्षरण विध्यान नहीं होने हैं, कनः नेवार उपनि का निस्मत करते के हेनु यह विधि क्षाविध्य सदस एवं उपयुक्त है। इस विधि के क्षात्रपैन एक वर्ष के निर्ण मान का इससे दिएने वर्ष के मान ही क्षान्य ज्ञान करते हैं। यदि विधने वर्ष वा मान इस वर्ष के लिए मान से मंधिक हो तो इसका विह्न ऋषात्मक (-) भन्यपा धनात्मक (+) होता है। इन मन्तरों को प्रतिवर्ष के मनुसार धाफ पर मानिस्तित करके चत्रीम विचरण के विषय मे पता चल जाता है। बिना माफ के भी इसका मनुमान समाया जा सकता है किन्तु प्राफ द्वारा चत्रीय विचरण का स्पष्ट पता चल जाता है जो कि गर्तों एव शीपों के रूप में होता है।

विधि 2: पूर्वमत वर्ष के प्रतिकात द्वारा : इस विधि में प्रत्येक वर्ष के मान की पिछते वर्ष के मान से भाग नरके 100 से गुणा कर देने पर प्रतिकात क्षात हो जाते हैं। यह विधि (1) के सुल्य है क्यों कि इसमे वास्तविक प्रत्यार के स्थान पर सायेक्ष परिवर्तन प्रयांत उप्रति या गिरावट के विषय से पता चल जाता है। इन प्रतिकात मानों को द्यालीखत करने चन्नीय विवरण स्पष्ट जात हो जाता है। विधि (1) व (2) द्वारा एक से परिणाम प्राप्त होते हैं।

विधि 3: उपनित के निरसन द्वारा: उपनित ना निरसन करने के हेतु प्रत्येक मान की तदनुसार उपनित कोटि से भाग करके उपनित का निरसन कर सकते हैं। मृतः उपनित के हेतु दी गई विधियों में से किसी भी उपयुक्त विधि का प्रयोग करके उपनित कात कर केते हैं। दून मानों से भाग करने पर उपनित कुक्त काल खेणी ज्ञात हो जाती है। इस काल के जी विद्युप्त का माने से भाग करने पर उपनित कुक्त काल खेणी ज्ञात हो जाती है। इस काल के जी विद्युप्त का माने से भाग करने पर उपनित कुक्त काल खेणी ज्ञात हो जाती है।

विधि 4: ऋतुनिष्ठ विचरण के निरसन हारा: यदि मास्तिक श्रेणी दी गई हा तो हमसे ऋतुनिष्ठ विचरण ना होना स्वाभाविक है सतः ऋतुनिष्ठ विचरण जात करने के हेतु दी गई विधियों में से किसी भी उपगुक्त विधि का प्रयोग करके ऋतुनिष्ठ मूचकाक ज्ञात कर मेते हैं। श्रेणी के प्रयोक मान को ऋतुनिष्ठ सूचकाक हारा मान करके 100 से गुणा कर देने पर ऋतुनिष्ठ विचरण मुक्त श्रेणी प्राप्त हो जाती है। इस श्रेणी के मालेखन द्वारा मार्ग भो के ते किने मात्र से चन्नीय विचरण ना पता चल चाना है, यह विधि श्रु खिनक साथेखा विचरण विश्व विचरण ना पता चल चाना है, यह विधि श्रु खिनक साथेखा विचरण ना पता चल चाना है, यह विधि श्रु खिनक साथेखा विचरण ना पता चल चाना है, यह विधि श्रु खिनक साथेखा विचरण ना पता चल चाना है, यह विधि श्रु खिनक साथेखा विचरण ना पता चल चाना है, यह विधि श्रु खिनक साथेखा विचरण ना पता चल चाना है, यह विधि श्रु खिनक साथेखा विचरण ना पता चल चाना है, यह विधि श्रु खिनक साथेखा विचरण ना पता चल चाना है, यह विधि श्रु खिनक साथेखा विचरण ना पता चल चाना है, यह विधि श्रु खिनक साथेखा विचरण ना पता चल चाना है, यह विधि श्रु खिनक साथेखा विचरण ना पता चल चाना है।

विवेचन चनीय विचरण ना पृथक्वरण उपनित व चनुनिस्ठ विचरण के निसमन पर प्राचारित है जिमने विए विविधी पट्ने ही दी जा चुकी है। निसमन के पश्चात् श्रेणी ना म्रानेवन नरने, विग्रुपो नो मिना देने पर शीधों (Crests) और गर्ती (Troughs) नी सहायना से चनीन विचरण ना स्पट्ट पता चल जाता है।

चक्रीय विचरण के हेतु पर्याप्त वडी श्रेणी को लेना चाहिये जिससे व्यापारिक या प्राय

चन्नो के विषय में स्पट्ट पता चल सके।

काल श्रीणी में श्रनियमित विचरण :

चन्नीय विचरण के वर्णन में यह पहने ही बताया जा चुना है नि चन्नीय विचरण फीर ध्रनियमित विचरण नो मृथक् नरता सम्भव नहीं है क्योर्सि चन्नीय विचरण स्वय ही नात एव नोणाक (Amphitude) नी हॉट्ट से अनियमित होते हैं बन निस्सी नात श्रेणी में नन्समात् परिवर्तन जी नि निन्हीं घटनायों के ब्रधीन हुए ही ब्रनियमित विचरण में मन्दर्व निये जा सकते हैं। साराम: इस प्रध्याय में दिवे गये विवरण में स्वष्ट है जि बात घीलों के प्रेशित मान (प्रे॰), चार प्रकार के प्रधाकों पर भाषारित हैं। यह प्रभाव हैं उपनति (उ॰), ऋतुनिच्छ विचरण (ऋ॰), सत्रीय विवरण (च॰) और घनियमित विचरण (प॰)। इन सब में निम्न सम्बन्ध निर्धारित विया जा सनता है।

उपनित रेखा या इक का नमायोजन करने की विभिन्न विधियों वहले ही दो जा चुकी है। कार्युनिष्ठ विचरण जान करन के हेतु उपनित (३०) का किरमन करना होना है धर्षांत्र

चकीम तथा मनियमित विचरणसात वरन के हेतु उपनित धौर ऋतुनिष्ठ विचरण दोतो का ही निरसन करना होता है सत

उत्तर दिये तीना सरकाणों से काल वे वी विश्वेवण के पूच शिक्षणत का ज्ञान हो जाता है। इसी सिद्धान्त ने भाभार पर विभिन्न विधियों का सम्वेषण हथा है।

सक विधियों से मुन एक दोष होनो निवामान है। घत निवी नास धेणी के सनुसार जो भी निधि उन्युक्त प्रतीत हो उक्ता प्रयोग करना पाहिये। इस प्राप्पाय में दी मई विधिया के प्रतिरिक्त समान निधियों ना प्रयोग निया जाता है। सन निधियों का एक सम्याय में समावेश करना नम्मन नहीं है घन कुछ मुक्त निधियों ना ही इस धामाप में वर्षन निया गया है।

प्रश्नावसी

- काल ग्रेणी विश्वेषण क्षारा किन स्थिनियों के विषय में हमें पता चलता है ? इनमें से कुछ गुरुष-गुरुष स्पितियों का विशेषन की जिये :
- गतिमान माध्य विधि द्वारा ऋतुनिष्ठ सूथकोक ज्ञात करने के तुण एक दोध कताहर ।
- उपनित रेता
 वक बात वरने की सर्वोत्तम विधा बताहर भीर भपने उत्तर की तथ्यो के भाषार पर पुष्टि की जिये ।
- मारत वर्ष प विश्वतु सिंत का चननीय, 1962 से 1967 तक, निम्न प्रकार था.—

वर्षे	विज्ञुत का उपमीप (दस साख kwh × 10³)	
1962	14-4	
1963	18-7	
1964	21-4	
1965	24-2	
1966	26-7	
1967	29·1	

न्यूनतम वर्ग-विधि द्वारा उपनित रेखा का समजन कीजिये ।

- यह बताइये कि एक काल श्रीणों के संघटक क्या-क्या हैं? इस श्रीणों के विघटन करने की एक विधि का वर्णन की जिये । यह भी बताइये कि कालिक और अविकित संघटक क्या हैं?
 (बी० एस० मदास, 1970)
- मारत में नाईसीन का उत्पादन 1962 में घारटम हुमा । उस वर्ष से सन् 1969 तक के नाईसीन के धांगे का उत्पादन निस्न नारणी में दिया गया है:—

बर्छ	उत्सदन (दत्त साव क्सोडान मे)	
1962	0.18	
1963	0.74	
1964	1-18	
1965	1.48	
1966	1-92	
1967	2.45	
1968	\$-30	
1969	7-89	

- (1) उपर्युक्त न्यास के लिए उपनित रेखा यावक जो, उपयुक्त हो, समजन
- (2) भ्रातेखन चित्र बनाकर सन् 1975 के निए नाइनौन के प्रांग के उत्पादन की प्रागित कीजिये।
- 7. निम्न सारणी के लिए माध्य ऋतुनिष्ठ विचरण का परिकलन कीजिये :--

वर्ष	वैयांतर मृत्यु-गंदर। (एकार व्यक्तियों वै)			
	I	1I	111	17
1958	3 5	39	3 4	3 6
1959	3.5	4-1	3 7	40
1960	3 5	39	3 7	42
1961	4 0	16	3 8	4.5
1962	4 1	4 4	4 2	4.5

(बाइ॰ मी॰ सम्पू॰ ए॰ 1963)

शाध पदानों के न्यापार स प्राप्त धन राजि निवन बारणी में दी गई है ,---

वाल	1961	1962	1963
जनवरी	51 3	61.5	55 9
परवरी	27 4	26 3	28:4
ग्राची	27 3	24.1	21 5
बन्नैन	22 4	21 4	23'1
म{	32 8	29 8	27.0
তু ৰ	29 7	28 9	25.3
जुनाई	32 3	32.0	26.7
प्रगरन	34 1	29 8	28'6
गिगम्बर	47 7	61-7	51 6
धश्रुवर	760	82 E	74.7
गंबा य र	77 1	55 8	57 y
हिमम्बर	55 9	63 8	58 5

ऋहुतिन्द्र दिवस्य ज्ञान की विवे ।

⁽बी • नॉय • बरबई, 1967)

विस्त मोहा उत्तरित सम्बन्धी बाल थेली में लिए गाँव वर्षीय बाल लेकर गाँतमात सहर विशि इत्तर प्रश्नित माल अन वीजिय । यदि बार वर्षीय बाल को लिया जार भा दल दिवलि में बाहाई गई विधि का विवरण वीलिय से देखिये । कोई बहुल मीहात माहत के बाल का विमा बालाई पर व्याप करता है ?

बद	उत्पादन (दस मध्य टन)	वय	उत्पादन (दम्र साच टन)
1901	351	1907	410
1902	366	1908	420
1903	361	1909	450
1904	362	1910	<00
1905	400	1911	518
1906	419	1912	455

उत्पादन (दम साख टन)	बच
502	1913
540	1914
557	1915
571	1916
586	1917
612	1918

(दिस्ती, बी॰ ए॰ मानर्स, 1968)

10 एक निश्चित क्षेत्र म प्रति दिन डाले गये पत्रो की नव्या चार सप्नाह के लिये निम्म सारणी म दी गई है। यह कम्पना नी गई है कि एक काल मे उपनित वहीं रहती है तो ऋतुनिष्ठ मूचकात (प्रति दिन मूचकात) कुल माध्य के प्रनिमन के रूप म जात की जिये।

सप्ताह	र्षविवार	सीमवार	मयसवार	बुधवार	बृहस्यनिवार	शुक्तार	अनिवार	योग
1	18	161	170	164	153	181	76	923
2	18	165	169	147	158	190	80	927
3	21	162	169	153	145	190	82	922
4	20	165	170	155	150	180	85	925

¹¹ निम्न सारणी के लिये ऋतुनिष्ठ सूचकाक जात कीजिये ।

	ऋतु	1960	1961	1962	1963	1964
त्रैमामि	क 1	40	42	41	45	44
-	2	35	37	35	36	38
**	3	38	39	38	36	38
"	4	40	38	42	41	42

(बी॰ कॉम॰ धागरा, 1968)

इस मूचकांक को श्रृमितिक यापेक्षिक विधि द्वारा ज्ञान वीदिये।

हिष्यणी प्रश्नावती मे दिये परीक्षामा वे सब प्रश्न वृत्त वर में योग्न भाषा में ये जिनका यहाँ हिन्दी सनुवाद दिया गया है।)



सामान्य कार्यों के करते समय प्राय ऐसी स्थिति सामने भावी है कि सस्यात्मक मूचना, प्रैसित श्रेणी या एक सारणी मे बावश्यकता के बनुसार कुछ मान विद्यमान नहीं होते हैं। ये मान दिये हुए मानो के धन्तवंतीं (Intermediate) मान होते हैं या श्रेणी के परास के बाहर के मान होते हैं या भविष्य के लिये किसी X मान के तदनुमार मान की प्रामुक्ति करने के सिये ज्ञात करने होते हैं। इन धन्नवंतीं और धायामी मानो के धाकलन करने की विधि को कमश बन्तवेशन और बहिवेशन कहते हैं। जैसे भारत से अनगणना प्राप्तेक दस वर्षों के पश्चात होती है। यदि इन दस वर्षों के विसी बीच के वर्ष म जनसरमा जातना हो तो चन्तवेंशन एक उपाय है। अँमे जनसरया 1931, 1941, 1951, 1961, 1971 के लिये जात है। परन्त 1965 (या चन्य चन्तवंतीं वर्ष) की जनसक्या जानना हो तो भनतवेंशन का प्रयोग करके जान सकते हैं। योजनाओं की रूपरेखा सैयार करते समय प्राय-यह भी जानना होना है कि बंगते पाँच (या मन्य मागामी कुछ वर्षों में) वर्ष दाद जनसरपा दितनी हो जायेगी अर्थात् 1976 की जनसस्या का धाक्तन बहिबँधन द्वारा कर नकते हैं। इसी प्रकार अन्तवेशन की आवश्यकता बहुधा सास्थिकीय सार्णी द्वारा किसी निश्चित स्वतन्त्रता कोडिया सार्यनता स्नर पर वह मान ज्ञात करने के लिये होनी है जो कि सारणी मे नहीं दिये हैं। मन्तर्वशत वा प्रयोग मत्राप्त मानो का आवसन वरने के लिये भी विया जाता है। त्यास में यदि कुछ मान छुट गये हो तो उनका झाक्सन करके त्यास की पूरा करने में भी यह विधि सहायक होती है।

यह घ्यान रक्षना चाहिये कि मन्तर्वेशन या बहिवेंशन द्वारा प्राप्त मान किसी प्रकार भी बास्त्रविक मान नहीं है। यह तो केवल प्राक्तित यान है जिनका कि वास्त्रविक मानों से भिन्न होना स्वर्माविक है। उत्तम विधि का प्रयोग करके इन प्राक्तकों के यथा सम्भव परिग्रद्ध मान हात करना ही साख्यकी-विद के शान का सुचक है।

घन्तवैष्यन की गुद्धता दिये हुए न्यास में समय या क्षाय किसी स्वतन्त्र चर के घनुसार, दिग्रमान उनार-चडाव (fluciuations) पर धामारित होती है। इन उतार-चडाव की स्थास का निरोक्षण करके जान सकते हैं। इसके प्रतिरिक्त उन घटनायों नो भी दिवार में रहता वाहिये जो कि उस समय पर सत्या की प्रमावित कर सकती हो। यदि उतार-चडाव पास्य घटनाएँ हो तो उनके जनुसार क्यास में समायोजन करके प्रधिक दिवास-नीत स्था पुद्ध माक्यक घटनाएँ हो तो उनके जनुसार क्यास में समायोजन करके प्रधिक दिवास-नीत स्था पुद्ध माक्यक प्रधान किया जाते है।

धन्तर्वेशन या विर्वेशन की समस्या को साध्यिकीय भाषा से पाठत इस प्रकार समभ सकते हैं। किसी भी अध्ययन में जो कर X व Y हैं। माना कर X स्वतन्त्र कर है धीर Y एक आधित कर है। X पर बात प्रेशन X_1 , X_2 , X_3 ..., X_{i-1} , X_{i+1} ... X_n हैं भीर तदनुसार Y पर प्रेक्षन Y_1 , Y_2 , Y_3 ..., Y_{i-1} , Y_{i+1} ... Y_n हैं तो धन्तर्वेशन से सीममा

किसी मान X_k (जबकि k < n घोर i < k < i + 1, $i = 1, 2, 3, \cdots n - 1$) के तरहमार प्राप्तित चर Y_k के मान का प्राक्तन करना है। बहिव्यन्त की स्थिति में k > n होता है प्रयद्गि यह दिये हुए X माना ने घन्तिम मान के बाद या प्रारम्भिक मान से पूर्व के किसी मान को निक्यित करना है।

धन्तवॅशन ग्रीर बहिवॅशन के लिए कल्पनाएँ

- (ह) यह नत्यता नी गई है वि समयातुमार चर X ने अनुमार प्रेशन में धनत्मात् परिवर्तन नहीं हुए हैं अपीतृ मान Y लगभग समान दर में ही वह या घट रहे हैं। जैने किसी धनत्यती वर्ष के लिए अन्तर्वेशन द्वारा जनसम्या का आवतन करने में यह करता तो गई है वि सम्पूर्ण काल अ जनगन्यानृद्धि दर नमान रहती है और बहिदेंगन करने में यह करता करती होती है कि धगम वर्षों में भी वृद्धि दर यही रहेगी। किन्तु यह करता कर निवर्तिया में सहय पाई जाती है जिसने परिवास स्वत्य सावस्य गुद्ध नहीं हों। है।
- (ल) धन्य वस्पना यह है कि ज्यान म किसी प्रवार की ब्यूनि (jump) नहीं है सर्वातृ श्वाता से एक प्रकार के साजाश्व है। जैन करमत्या लस्तर्थी सौक्डों से यह माना गया है कि दिये हुए वाल के मध्य म किसी सुद्ध या प्राष्ट्रीक किसी (सकाय, बीमारी वैनने या प्रकार सादि) के कारण देज की जनमन्त्रा सरम्यान कम नहीं हुई भी। साथ ही किसी परिस्थिति से विदेशा ने लागा के दंग से चीन ने वादल बायस्था। स्वावास वृद्धि नहीं हुई भी।

उरज सम्बन्धी स्नीनको म दिनी वर्ष स मूल, बाहु या मुद्र व्यदि वे नारण कुल पैरावार सरविधन कम नही हुई थी।

प्रगतवरान प्रीर बहिवेंशन के लिए विधियाँ

मनवैश्वत विविधी को दो सक्ता से विभागित किया जा सक्ता है जा कि निम्त हैं —

- (1) सलाबित्रीय विधि (Graphic method)
- (2) बोजीय विधियों (Algebraic methods)

 जो कि वक को किसी विन्दु पर काटती है। इस कटान विन्दु के Y निर्देशांक को पड़कर X के तदनुसार घन्तर्वेशित यान ज्ञात कर लिए जाते हैं।

बहिबंगन : उपमुँक विधि द्वारा बहिबंगन के लिए रेखा या वक को उपनित (trend) की दिशा में बढ़ा दिया जाता है जिससे कि मुखा धक्ष के X बिन्दु पर सम्ब, रेखा या वक को काट सके। इस कटान बिन्दु का Y निर्देशाक ही बहिबंगित मान होता है।

सेक्साचित्रीय विधि के गुण एवं दोव .—यह विधि कियात्मक इस्टि से सरलतम है। सेक्साचित्रीय विधि इस्स धन्तवें सन के लिए परिणाम वहिनें सन की ध्रेपेक्षा प्रधिक परिगुद्ध होते हैं। इस विधि का दोष यह है कि कम बिन्दु होने की स्थिति में यक के सही रूप का पता नहीं चलता है पत. धाकसित सान धागुद्ध हो जाते हैं। यदि Y के मान बडे हों तो Y-मस पर मापकम लग्न सेना पडता है। इनके कारण सिक्तट-बृटि बढ़ जाती है। जैसे पदि जनसम्बा लाखों या करोडों में दी गई है जो किचित मात्र भी सिप्तकटन के कारण Y-मान में मीधक धनतर पढ़ जाता है।

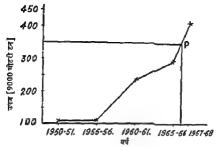
उदाहरण 17.1 :--भारत में 1950 से 1968 तक धान की उपन कुछ वर्षों के लिए निम्न प्रकार हुई थी :--

द्यान की उपज (Y) (,000 मीटरी टन)
107
107
236
293
415

वर्षे 1966-67 में धान की उपज लेखाचित्रीय विधि द्वारा किन्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं :—

वर्षों को X-प्रश पर तथा उपज को Y-प्रश की धोर तिया। X-प्रश व Y-प्रश की धोर तिया। दन विन्दुधो को ध्राय अधिवत कर दिया। दन विन्दुधो को क्रम में मिला दिया। इस प्रकार एक रेखीय चित्र प्राप्त हो यया। श्रव वर्षे 1966-67 कि विन्दु पर Y-प्रश के समान्तर रेखा सींची जो कि रेखीय चित्र को P पर काटती है। P वा Y निर्देशाक ही 1966-67 के लिए सन्सर्वेशित सान है।

मत: 1966-67 के लिए अन्तर्वेशिन मान Y=350 (000, मीटरी टन)



चित्र 17-1 लेमाचित्रीय विधि द्वारा ग्रस्तवेशन

बीजीय विधियाँ

(1) रेला या चक लमंत्रन विधि इम विधि वे सम्तर्गत पहुले इदलान चर X घीर माधित चर X में रेलीय या वजरेली ताम्यन्य स्थापित चर होता है। यहाँ कम के इवस्य को निषय करने के लिए सदल ना नियम है कि जिनती नेसाओं की सस्या होनी है उनामें एक वापत के नमीवरण करे के लिया जाता है। यह वक के ममजब के हेतु X प्रातीय समीकरण को निम्म करने लिया जाता है। यह वक के ममजब के हेतु X प्रातीय समीकरण को निम्म करने लिखा वहते हैं —

$$Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + + a_k X^k$$
 (17.1)

यदि k = 1 हो तो उपर्युक्त समीकरण एक रैलाको निरूचिक करनी है यदि k > 2 ता यह समीकरण कक को निरूचित करती है।

यहाँ देना या वक वां समितन वरने की विधि दम प्रकार है। बाब भेनी किमेदन में उपनित काल बारने की जानि, यहाँ भी सम्प्र के बान (इन्तत्र वर को 0 सान निया जाना है। यदि वालो की सस्या विध्य हो तो इससे पूर्व के बाला को जयस $-1, -2, -3, \dots$ और मध्य बास के बाद के बासो की $1, 2, 3, \dots$ यान निया जाना है। यदि कार्सों की स्थ्या सम्य हो तो इसके नियु साम $-5, -1.5, -2.5, \dots$ सः $-5, 1.5, 2.5, 2.5, \dots$ मान निये जाते हैं। X के सान व तटनुसाद Y के सान को सम्मीप्रण सं एकने पर एक समीवरण ज्ञात हो जाना है। इसी प्रकार X व Y के विस्तिप्र मानी को रुप्तों पर सम्प्र समीवरण ज्ञात हो जाने हैं। इस समीवरणों को इस वरने पर अवसे $-2, -2, \dots$ मानि के सान प्रति है। इस समीवरणों की इस वरने पर अवसे $-2, -2, \dots$ मानि के सान ज्ञात हो जाने हैं। इस समीवरणों को इस वरने पर अवसे $-2, -2, \dots$ मान

परार्थेश्वर या बन्धितन ने निग्दम विधि वा प्रधीग वेदन उस स्थिन में रियां या सनता है प्रविच X ने बान समान बन्धान में बढ़ रहे हो। उदाहरण 17.2: राजस्थान में चालू बीमा पत्रों की सख्या (हजारों में) तीन वर्षी मे निम्न प्रकार थी:—

वर्ष (X)	1965	1967	1969	
बीमा पर्थों नी सस्या (Y) ·	180	210	230	
(हजारों मे)				

उपर्युक्त तीन प्रेसको के लिए डियान समीकरण को लेना होगा । इस समीकरण का समंजन करके 1966 व 1970 के लिए बावलिन मान निम्न प्रकार ज्ञान कर सबते हैं — माना कि डियाल समीकरण.

 $Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2.$ है। यहाँ $X \in Y$ के मान दी गई विधि के भनुसार निम्न होंगे :—

वर्ष	х	Y
 1965	-2	180
1967	0	210
1969	2	230

$$180 = z_0 - 2 \ z_1 + 4 \ z_2 \qquad(1)$$

$$210 = z_0 \qquad(2)$$

$$230 = z_0 + 2 \ z_1 + 4 \ z_4 \qquad(3)$$

मभीररण (3) में से (1) चटाने पर,

a o व a 1 दा मान समीदरण (I) से रवन पर.

$$180 = 210 + 12.5 \times (-2) + 4 a_2$$

 $180 = 210 - 25 + 4 a_2$

ग्रत: परवलय का मगीकरण,

है। 1966 के लिए बीमा पत्रों की मख्या का आक्लन करने के लिए, X = - 1 धन

मतः 1966 के तिए चालु बीमा पत्रों की सम्या = 196-25 हजार

(मीट पाठव को विदिन हो कि 1966 में बीमायदो की बास्तविक सब्द्या 198 हजार थी)

> वर्ष 1970 के लिए X = 3, Y = 210 + 12 5 × 3 − 1 25 × 9 = 236 25 हजार

प्रत: 1970 में चास गीमा बनो नी सारमित मन्या ≔236 25 हजार है।

(2) यासचान को डियद-बिस्तार विधि इन विधि का अयोग उस स्थिति से समस्त्र है जबति प्रेशम समान अन्तरात से बड़े रहे हा । यदि प्रेशम खबरोही जम से दिये हो तो इन्हें पुत्र: व्यवस्थित करने आगोही कम स नर देना चाहिते । इस विधि से व्यवस (y-1)ण का दिस्त विस्तार करने है और इसे कुम्ब ने समान रूप देने हैं। यहाँ n चर Y पर ज्ञात देशित मानो को सन्या है और Y', (1=0, 1, 2 3,....) आरोही थेगी में X के नरस्मार Y मानो को निर्माण करना है।

$$\begin{array}{ll} \pi_{131} & (Y-1)^n = \Delta^n_0 \\ \text{up} & \Delta^n_0 = (Y-1)^n = Y^n - \binom{n}{2} Y^{n-2} + \binom{n}{2} Y^{n-2} + (-1)^r \binom{n}{2} Y^{n-2} \\ & + (-1)^n Y^0 = 0 & \dots (17.2) \end{array}$$

$$=Y_n - nY_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \quad Y_{n-2} + (-1)^n \frac{n!}{(n-r)!} \quad Y_n + ... + (-1)^n \quad Y_n = 0 \quad (17.2.1)$$

वरि

$$n=3$$
, $\Delta^3 = Y_2 - 3 Y_2 + 3Y_1 - Y_0 = 0$ (17.3)

$$n=4$$
, $\Delta_0^4 = Y_4 - 4Y_{31} 6Y_2 - 4Y_{17} Y_0 = 0$ (17.4)

n=6;
$$\Delta_{\phi}^{\bullet} = Y_{e} - 6Y_{5} + 15Y_{3} - 20Y_{3} + 15Y_{3} - 6Y_{5} + Y_{6} = 0$$
(17.6)

इस विधि का मुख्य दोन यह है हि भें वा सावजन, अने उस मान के तत्त्रुमार कर ककते हैं जोड़ि भेगों के बोच में हो। या कास्ट है कि द्विपा विकास विधि द्वारा विश्वसन करना सम्भव नहीं है।

उदाहरण 17.3 X व Y के दिये हुए न्याम मे Y_3 का चारुतन निम्न प्रकार करते हैं—

×	Y	Yı	
3	14	Y _p	
6	11	Y ₁	
9	18	Y_2	
12	7	Y ₃	
15	20	Y_4	
18	20	Y_5	

क्तपर दिये सुए उदाहरण में n == 5 है और Y_s का धावसित मान निम्न प्रकार क्रात कर सकते हैं—

$$\Delta^{6}_{0} = Y_{5} - 5Y_{6} + 10Y_{3} - 10Y_{2} + 5Y_{1} - Y_{0} = 0$$

$$= 20 - 5 \times 20 + 10Y_{3} - 10 \times 18 + 5 \times 11 - 14 = 0$$

$$\therefore 10Y_{3} = 219$$

मत X=12 के लिए Y का बावितत मान 21.9 है।

दो या दो से मधिक मजात मानों 'Y' का भारतन

यदि दो या दो से प्रियम Y के मान प्रजात हों तो इनका धाकलन करने के लिए प्रजात मानों की सक्या के समान समीकरणों जी प्रावस्थकता होती है। प्रत समीकरणों Δ^0 Δ^0 , Δ^0 , को प्रुप्य के समान रखकर हक करने से प्रजात मान प्राप्त हो जात हैं। यदि दो मान प्रजात हों तो केवल Δ^0 0 धौर $\Delta^{0,1}_0$ 0 रखकर दो मंगीकरण प्राप्त हो जात हैं। यदि दो मान प्रजात हों तो केवल Δ^0 0 धौर $\Delta^{0,1}_0$ 0 रखकर दो मंगीकरण प्राप्त हो जाते हैं जिनको हल करके बतात Y प्राप्तों के धाकलित मान डियद विस्तार जिंध द्वारा जात ही जाते हैं।

उदाहरू 17.4 निम्न मारणी में बन्दी दी प्रायु तथा उनकी ऊँचाई दी गई है-

		-		
आयु वर्गी में	x	क्रेचार्ट (से०मी० में)	Y	
2	Χ ₀	48	Yo	
4	X_1	55	Y_1	
6	X ₂	7	Y ₂	
8	X3	95	Y ₃	
10	X_4	2	Y_4	
12	X_{δ}	112	Ys	

...(4)

6 वर्षं तथा 16 वर्षं धायु के बच्चो की ऊँचाई का सावलन डिपट विश्तार विधि डोरा निस्त प्रकार कर सकते हैं—

यहाँ Y के दो मान बजात हैं बत दो समीवरणा को सेना होगा। यहाँ हमने मिल Δ^4_0 व Δ^5_0 सेना उपयुक्त है। समीवरण (173) व (174) द्वारा,

$$Y_4 - 4Y_3 + 6Y_2 - 4Y_1 + Y_6 = 0$$
 = (1)

$$Y_5 - 5Y_4 + 10Y_3 - 10Y_2 + 5Y_2 - Y_6 = 0$$
 ...(2)

मभीक्ष्म (1) व (2) में Y के मान रचने वट,

$$Y_4 - 4 \times 95 + 6 \times Y_8 - 4 \times 55 + 48 = 0$$

$$Y_4 + 6Y_2 = 552$$
 ...(3)

$$112 - 5Y_4 + 10 \times 95 - 10Y_8 + 5 \times 55 - 48 = 0$$

 $5Y_4 + 10Y_8 \approx 1289$ समीकरण (3) व (4) को हल करने पर,

$$5Y_4 + 30Y_3 = 2760$$

 $5Y_4 + 10Y_4 = +1289$

 Y_{g}^{A} का मान समीकरण (4) ये रखने पर,

$$5\hat{Y}_4 = 1122 - 736$$

$$\hat{Y}_4 = \frac{386}{5} = 60.6$$

(3) ग्यूटन की विधियों

(क) म्यूटन की प्रधमान्नी बन्तर विधि—इस विधि ना अयोग उस स्थित से ही सनता है जबिर स्वनन्त चर ने मान समान्तर थेगी में धारोही वस से हो। इसने हारा सन्तर्वजन भीर नहिस्सन दोनों ही निये जा सनते हैं धर्मांद Y ना धावनन X ने निष्ठी भी मान ने निष्ण किया जा सनना है। यह विधि इस विद्यान्त पर बाधारित है नि दिव हुए Y ने प्रेसणों से घरतर शांत विधे जा मनने हैं धर इस धरनारों वी सहायना में Y ने मानो का धावनन किया जा धनता है। यह इस विधि ने धरनाईन एक धरनारों नी सार्ची ननानी होगी है और इस धरनारों नी सार्ची ननानी होगी है और इस धरनारों नी सुप्तर के सूत्र से स्वन्तर दियं हुए X ने निष्ण Y ना धावनत न र निष्या जाता है।

माता दि प्रोच युगम प्रेसण $\{X_0, Y_0\}, \{X_1, Y_1\}, \{X_2, Y_2\}, \{X_2, Y_2\}, \{X_3, Y_4\}$ दिये हुए हैं।

(सारणी 17.1) मन्तरों के सिए वारणी जनकि पीन प्रेशण जात हैं	(▽) short (▽)	Δ^1 Δ^2 Δ^3 Δ^4	χ,	$Y_1-Y_0 = \Delta^{1_0}$	$Y_1 \qquad \qquad \triangle^{1}_1 - \triangle^{1}_0 = \triangle^{3}_0 \qquad \qquad \wedge^{3}_1 = \wedge^{2}_0 = \wedge^{3}_0$	$Y_2 \qquad \qquad Y_3 = Y_1 = \Delta^2 , \qquad \Delta^3 = \Delta^3 , \qquad $	$Y_3 - Y_2 = \triangle^1_3$ $\triangle^3_3 - \triangle^2_1 = \triangle^3_1$	$Y_3 \qquad \qquad \Delta^{1}_3 - \Delta^{1}_3 = \Delta^{2}_3$	$Y_4 = Y_3 = \Delta Y_3$	
	>-		, y		Ϋ́	>"	ı	۲³		,
	×		°x	_	×	×		×°		>

दमी प्रवार की सामग्री किये ही पुरूर देवनों के किया है जा देवर की प्रश्निक की है। यदि सुगत a हो दो Δ की सम्बार्ग $\{a-1\}$ होंदी प्रचार कर Δ^1 , Δ^2 , Δ^3 , Δ^4 , Δ^4 , बाद कर कर है हैं है। सामग्री में दिये हुए प्रमुखों की दिन सुप्त में स्वयन्त Y का प्रावन्तिय पात कर सबसे हैं...

$$\hat{Y} = Y_n + \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \triangle^1_n + \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix} \triangle^2_n + \begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix} \triangle^2_n + \dots + \begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix} \triangle^k_{\rho} \dots (177)$$

$$\overrightarrow{Y}^*_1 k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Ya घाराडी खेली के पड़का बैटिक सात् है।

Y वह मात है जिसका दिये हुए X के चित्र घाटबान करना है चीत सकता

$$=\frac{X'-X_0}{X_1-X_0} \qquad(17.8)$$

दम विभि को प्रयोग उन स्थिति में उत्तुल है जवकि X का बहु मान दिनके लिए मानकीत करता है जिसी के प्रायन में ही हो। उनका कारण बर है कि मूस (17.7) में वैदेन प्रयम प्रानमों (Lead ag differences) का ही अपोय किया गया है। यह इस विभि द्वारा Y का प्रावनित नात, X के उस मान के लिए जो लेगों के स्था या प्रान्त में ही मा विद्वितन के नित्त प्रार्ट होता है।

स्वराहरम् 17.5 : एक मता में विद्यारियों के मान्यिकी की परीक्षा में प्राप्त धार्मी का बटन निक्त प्रकार मां ---

श्र ^{म्हार} ः X	श्र्यी दरमानाः Y
30 ने रूब	2
40 শি শম	5
50 ने जब	17
60 में दम	31
70 में रम	35

बो विद्यादियों की सम्या जितके प्राप्तांक 45 से क्षेत्र हैं स्पृत्त की स्वरूपमी विश्व हार्य तिस्त प्रकार कर सकते हैं ---

पहते प्रन्तरों के लिए सारणी तैयार की,

x	Y	Δ^1	Δε	∇_2	Δ4
30	2				
40	5	$\Delta^{1}_{0} = 3$ $\Delta^{1}_{2} = 12$	$\Delta^2_6=9$	∆³ ₀ = -7	
50	17		△²₁=2		∆4 ₀ =-5
60	31	$\Delta^{1}_{2}=14$ $\Delta^{1}_{3}=4$	△²₂=~10	$\Delta^3_1 = -12$	
70	35				

$$x = \frac{45 - 30}{40 - 30} = \frac{15}{10} = 3/2$$

मूत्र (177) द्वारा, X=45 के लिए Y का झाक्तित सान है

$$Y \approx 2 + {3/2 \choose 1} 3 + {3/2 \choose 2} 9 + {3/2 \choose 3} (-7)$$

$$+ {3/2 \choose 4} (-5).$$

$$\approx 2 + 3/2 3 + {3/2 (3/2 - 1) \choose 1 2} 9 + {3/2 (3/2 - 1) (3/2 - 2) \choose 1 \cdot 2 3} (-7)$$

$$+ {3/2 (3/2 - 1) (3/2 - 2) (3/2 - 3) \choose 1 \cdot 2 \cdot 3} (-5)$$

$$\approx 2 + 9/4 + 27/8 + 7/16 - 15/128$$

$$\approx 2 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 38 + 0 \cdot 44 - 0 \cdot 12$$

$$\approx 795 = 8$$

बत विद्याण्यो की सब्या, जिनके प्राप्ताक 45 से कम हैं, 8 है ।

(ल) गूटन-मास की बणवर्ती विधि—यिश Y का धावसन, प्रेणी के शेव के किसी X-मान वे लिए करना हो तो इन विधि का प्रयोग करना जीवत है। इसके लिए भी मानो का समान्तर श्रेणी मे होना धायस्त्रक है। इस विधि द्वारा Y के धावसन के लिए मूत्र,

$$Y = Y_0 + {x \choose 1} \Delta^{1}_{0} + {x \choose 2} \Delta^{2}_{-1} + {x+1 \choose 3} \Delta^{3}_{-2} + {x+1 \choose 4} \Delta^{4}_{-1} + \dots$$
....(17.9)

है। इस मूत्र में घन्तवेंश्व ने लिए दिये गये X-मान से पिछने मान सो X_0 इनसे पिछने सानो की त्रमध $X_{-1}, X_{-2}, X_{-3}, \cdots$ धाटि से निरुप्ति चक्ते हैं और X_0 के बाद के X-पाना को अगम $X_1, X_2, X_3, ...$ हारा निरूपित करते हैं। इन X मानो के उद्युपार Y-पानों को $Y_0, Y_{-1}, Y_{-2}, Y_{-3}, ...$ चौर $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ दारा निरूपित करते हैं। प्रस्तरों $\triangle^1, \triangle^2, \triangle^3, ...$ के सिए सारची म्यूटन को ध्रयांच्यो ध्रनर विशेष के सिए ही गई सारचों में $\triangle^1, \triangle^2, \triangle^3, ...$ द्वारि घरनरों के स्तान्य के ध्रनर $\triangle^1_0, \triangle^1$ सा $\triangle^2_0, \triangle^2_1, \triangle^3_1, ...$ के प्रमुखन 0, 1, 2, 3, ... के स्वान पर Y के उद्युपार ध्रनुरन -2, -1, 0, 1, 2, ... अयोग किये जाते हैं। यह सकेनन विधि सारचों (17.2) का देन कर घोर स्पट हो आयेगी।

वहाँ

$$x = \frac{9 \times 636 \times 6}{1 \times 6} + \frac{1}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{100} \times $

मूत्र (179) म Y₀, प्रचीर मन्तरी के मानी का प्रतिन्ययन वरते Y का पश्चित्यन कर निवाजाता है। इस विधि द्वारत वही विकास प्राप्त होने हैं वो कि स्मूटन की सन्तर्गामी सन्तर विधि द्वारा प्राप्त होने हैं।

उदाहरण 17.6 साना कि फानकोरन की चार सात्राधों के लिए प्रति भूनका (10×1.5 वर्ग भी०) भूने का भार (क्योगाध) निस्त प्रकार या —

कामकारम की मात्रा (किमो प्रति हेक्टर) 🗴	द्रित मुद्रगढ भूते हा शार (दिनोपाय) Y
0	96
15	72
30	91
45	73

25 हिमो प्रीत ट्रेक्टर फासस्टेरन की भाषा के निष्ट भूगे की मात्रा कर मार्कन स्टूटन गाम की प्रवर्ती विधि शरा निक्त प्रकार कार कर मकते हैं —

सारकी 17.2 के अमल्य प्रन्तरा के लिए सारकी बनाई,

×	Y	Δ^{i}	^{क्रमर} ∆³	Δ3
0 X.1	9 6 Y_6	Δ ¹ -1== -24		
15 X _n	72 Y _o	∆1 ₀ ≈19	$\triangle^2_{-1}=43$	∆3 ₋₁ = -80
30 X,	9 1 Y ₁	$\Delta^{1}_{1} \approx -18$	$\Delta^3_0 = 3.7$	
45 X ₂	72 Y ₂	<u> </u>		

(सारणो 17.2) मनतो हे तिए सारणी जबक्ति $X_3{<}X{<}X_4$ मोर केयल पत्रि प्रेशण जात है

साास्यका	क सिद्धान्त आर अनुअयाग
Δ.	$ \begin{vmatrix} Y_{-1} - Y_{-2} = \triangle^{1}_{-2} \\ Y_{0} - Y_{-1} = \triangle^{1}_{1} \\ Y_{1} - Y_{0} = \triangle^{1}_{0} \\ Y_{1} - Y_{1} = \triangle^{1}_{1} \\ Y_{2} - Y_{1} = \triangle^{1}_{1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A^{1}_{0} - \triangle^{1}_{-1} = \triangle^{2}_{-1} \\ \triangle^{1}_{0} - \triangle^{1}_{-1} = \triangle^{2}_{0} \\ A^{1}_{1} - \triangle^{0}_{0} = \triangle^{2}_{0} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A^{2}_{0} - \triangle^{2}_{-1} = \triangle^{3}_{-1} \\ A^{2}_{0} - \triangle^{2}_{-1} = \triangle^{3}_{-1} \end{vmatrix} $
- N	$\Delta^2 \cdot L - \Delta^2 \cdot 2 = \Delta^3 \cdot 3$ $\Delta^2 \cdot \Delta^2 \cdot 1 = \Delta^3 \cdot 1$
الماليد مات مات مات مات مات مات مات مات مات مات	$\Delta^{1}_{-1} - \Delta^{1}_{-3} = \Delta^{3}_{-3}$ $\Delta^{3}_{0} - \Delta^{1}_{-1} = \Delta^{3}_{-1}$ $\Delta^{1}_{1} - \Delta^{1}_{0} = \Delta^{2}_{0}$
ν	$Y_{-1} - Y_{-2} = \triangle^{1}_{-2}$ $Y_{0} - Y_{-1} = \triangle^{1}_{\cdot 1}$ $Y_{1} - Y_{0} = \triangle^{1}_{0}$ $Y_{2} - Y_{1} = \triangle^{1}_{1}$
ribles Y	* * * * * * *
क्षेत्र 🗙	X ₃ X ₄ X ₇ X ₈ X ₈ X ₈ X ₈ X ₈ X ₉
>	× × × × ×
× ×	× × × × × × × × × × × × × × × × × × ×

मूत्र (17.10) द्वारा,

$$x = \frac{25 - 15}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

मत पूर (179) द्वारा Y ना चन्तर्वेशित मान,

$$\hat{Y} = 72 + {\binom{2/3}{1}} 19 + {\binom{2/3}{2}} \times 43 + {\binom{2/3+1}{3}} \times (-80)$$

$$= 72 + 2/3 \times 19 + {\binom{2/3}{12}} \times .3$$

$$+ {\frac{(2/3+1)(2/3)(2/3-1)}{12\cdot 3}} \times (-80)$$

$$=72+127-\frac{43}{9}+\frac{40}{81}$$

= 720+1·27 - 048+ 50

=8′49

मत मन्त्रवेतन द्वारा प्राप्त ४ का, ४≔25 के तदबुवार, भाकनित मन्त्र 8 49 किली प्रतिभूतकारी

(ग) म्यूटन गास प्रत्यव विधि — इन विधि का प्रयोग उस स्थित से करने है क्या है Y का घारतत X के उस सात ने निष्कत्वा हो जो अंधी के घासर के बीक का सात हो। इस विधि के निष्की X के सातो स समान सम्मास का साव बावक्य है।

Y दे पारतन के लिए गुत्र है :-

$$\hat{Y} = Y_0 - {x \choose 1} \Delta^{1}_{-1} + {x+1 \choose 2} \Delta^{2}_{-1} - {x+1 \choose 3} \Delta^{3}_{-2} + {x+1 \choose 4} \Delta^{4}_{-3} - \cdots$$
....(17.11)

धारत बात के किए दिवे हुए X के नुस्त बाद क्षेत्री में आने बाते भाग की X_0 माना जाता है भीर इसने तक्ष्युसर Y का आन Y_0 निवा जाना है। धानरों Δ के झान करने के लिए सामने (17.3) बनाने है।

यहाँ

मूत्र (17,11) में विभिन्न पदी के भाग रखहर Y के भाग का वरिकान कर नेते, हैं।

(मारको 17.3) अन्तरो के सिए सारको जवकि X1<X<X3. तथा Y घोर X पर छ प्रेक्षण शात है

सास	44	ा क ^{ासद्धान्त} ग्रार ग्रनुप्रयाग
	\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \	$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
	7	$\triangle^3.3-\triangle^3.4=\triangle^4.4$ $\triangle^3.3-\triangle^3.3=\triangle^4.3$
अन्तर	P V	$\Delta^{2}_{-3} - \Delta^{3}_{-1} = \Delta^{3}_{-4}$ $\Delta^{2}_{-3} - \Delta^{2}_{-3} = \Delta^{3}_{-3}$ $\Delta^{2}_{-1} - \Delta^{2}_{-2} = \Delta^{3}_{-2}$
	\$ ♥	$\Delta^{1}_{-3} - \Delta^{1}_{-1} = \Delta^{2}_{-4}$ $\Delta^{1}_{-2} - \Delta^{1}_{-3} = \Delta^{2}_{-3}$ $\Delta^{1}_{-1} - \Delta^{1}_{-3} = \Delta^{2}_{-3}$ $\Delta^{1}_{0} - \Delta^{1}_{-1} = \Delta^{2}_{-1}$
**	\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \	$\begin{vmatrix} 1 & Y_{-3} - Y_{-4} = \triangle^{1}_{-1} \\ 2 & Y_{-2} - Y_{-3} = \triangle^{1}_{-3} \\ 2 & Y_{-1} - Y_{-2} = \triangle^{1}_{-2} \\ 1 & Y_{0} - Y_{-1} = \triangle^{1}_{-2} \\ 1 & Y_{1} - Y_{0} = \triangle^{1}_{0} \end{vmatrix}$
-E-	-	* * * * * * *
X Y तरेरीक गरेरिक X Y		x x x x x x x x
>		x 2 2 2 2 2
'×	- {	x x x x x x

उदाहरण 177 X² बटन व लिए दी गई एवं मीव्यिषाय शारणी म 5% सामबना स्तर पर विभिन्न स्वतन्त्रता बोर्ट वे लिए सारणीबद्ध मान निम्न प्रवाद हैं —

	स्वतन्त्रना को <i>ि</i> 🗶	सारमीबढ मान Υ	_
_	10	18 31	-
	22	33 92	
	34	48 60	
	46	62 83	
	58	76 78	
	70	90 53	

55 १४० का० के निष् पृ² वा नारणोबंद सार गूटन वास प्रश्यम विधि द्वारा निम्न प्रवार प्रान वन सकते है। सानणो (173) वे समन्य घनतर व सिल नानणी (174) यसहस्य ।

$$\begin{array}{l} \chi = \frac{1}{12} \\ \chi = \frac{58 - 55}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \\ \chi = \frac{58 - 55}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \\ \chi = \frac{58 - 55}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \\ \chi = \frac{58 - 55}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \\ \chi = \frac{1}{12} \times \frac{13}{12} = \frac{1}{4} \times \frac{13}{12} \times \frac{13}{1$$

=76 78-3 49- 1 + 05 - धर्मि सब सक्वाएँ जा कि उपेगणाय है।

		सांखि	पकी	के वि	सद	न्त १	पौर	प्रनुष	योग	Ĭ			
	۵						△5,1=.22						
गसारणी]	۵,					$\Delta^{i}_{-i} = -0.31$		∆4_3==09					
समस्य प्रन्तरो के जि	\$₽				∆3.4=0 48		$\Delta^{3}_{-3}=0.17$		$\Delta^{3}_{-2} = 0.08$				
सारको 17.4 [सारको (17.3) के समस्य प्रन्तरों के जिये सारकों]	2∇			$\Delta^2 L_1 = -0.93$		Δ2.3= -045		$\Delta^{2}_{-2} = -0.28$		$\Delta^{2}_{-1} = -0.20$			
सारजी 17.4	10		VI-4=15.61		$\Delta^{1}_{-3} = 14.68$		∆¹_₂=14·23		∆¹_₁=1395		Δ10 ==13·75		
		7		>,		>,		χ,		۲°		۲,	-
•		18 31 Y~4		33.92 Y-3		48 60 Y.3		62 83 Y.1		76 78 Y ₀		90 53 Y ₁	
	1												

70 X

मुटन की विभाजित सन्तर विधि दस विधि वा प्रयाग उस हिम्मित में करते हैं जब रि क्र X से सन्तरात समान नहीं होता है। X के दिवे हुए मान के लिए Y का भावसन निम्न मुख द्वारा करते हैं —

$$\hat{Y} = Y_0 + (X - X_0) \delta_0^1 + (X - X_0) \{X - X_1\} \delta_0^2
+ (X - X_0) (X - X_1) (X - X_2) \delta_0^3 + \dots \qquad \dots (17 13)$$

जब कि दस मूत्र स्र X वह सान है जिसके लिए Y का स्राक्तन करता है। X_0,X_1,X_2,\dots , प्राराही तम से चर के मान है चौर $\delta_0^{1},\delta_0^{2},\delta_0^{2},\dots$ विभाजित सन्तरों के मान हैं जिनका परिकलन निम्न सारणों ने अनुसार किसी भी स्थिति से कर सकते हैं।

(सारको 17.5) विभाजित प्रन्तरा वे जिल् सारको जबकि बार प्रैक्षण है

x	Y	ΔI	Δ²	Δ_3
X ₀	Yo	$\frac{Y_1 - Y_0}{X_1 - Y_0} = \delta^1_0$		
×ı	Y ₃		5 1 - 8 10 = 62	$X_{3} = X_{0} = X_{0}$
X3	Yg	$\frac{\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}}{\frac{Y_3 - Y_2}{X_4 - X_3}} = \delta^{1}_{2}$	$\frac{X_3 - X_1}{X_3 - X_1} = \delta^2$	1 13-70
x,	Yg	V\$_V ²		

विभाजित धन्तरी की सारणी X प्रेशकों की तिमी भी सन्या के लिए खेंबार कर सकते

है। मूत्र (17.13) का प्रयोग करने \hat{Y} ना दिये हुए X के मान के लिए परिनतन कर सकते हैं।

चताहरण 17.8 महनारिना-मान्दोनन को प्रतनि जानन के हुनु एक मक्शाय द्वारा प्राप्त सहकारी समिनियों की सक्या भीर धांत्रम कर्ज को सन्ति (दस साल रखों के) निमन भी:---

सहराये सीर्यातयो की सक्या X	र्वाद्यस् कर्वे (दम नाख रचया म) Y
26	50
52	111
83	120
93	170
101	211

हो। 90 सहबारी सीमिनियों के लिए ब्राग्निम नर्ज को बनुमानिन रागि स्पूटन की विमाजित मन्तर विश्विद्वारा निम्न अवार स्थारणों (176) की गहायता से झात कर सबस्ट '— मृत्र (1713) द्वारा भें का ग्रावृत्तित मान,

$$\hat{Y} = 50 + (90-26)(2\cdot35) + (90-26)(90-52)(-0.041) + (90-26)(90-52)(90-83)(0.0024) + (90-26)(90-52) \times (90-83)(90-93)(-0.0006) = 50 + 150 40-99 712 + 17204 × 0.0019 - 51072 × (-0.0006) = 50 + 150 40-99 712 + 41 29 + 3.064$$

= 145-104 फ्रन. 90 सहवारी समितियो के लिए ब्राव्सित मान बश्चिम कर्ज की रागि 145-104 (दस साल रुपये) है।

सर्पात्र विधि: इस विधि द्वारा घन्ववेशन या बहिबेशन उस स्थिति मं करना उपपुत्त है अविकि चर X के मान में घन्तराल घसपान है। यह विधि न्यूटन की विभावित अन्तर विधि जैसी है। X चर वे तिसी भी मान कं निए Y वा आकतन निम्न सम्राज सूत्र वी सहायना में कर मकते हैं —

गरली (17.6) : नारजी (17.5) भी भीति दिषाजित मन्तरों के तिए शिम्न सारणी तैयार की

:	*<					0048 ==- 00006 == 840	: - 			
					0.162 = .0024 = 530	;	-0-120 =0024 = 32	;		
	fruntra afrac \rightarrange			$\frac{-2.32}{47} = -0.041 = 3^{2}_{0}$		$\frac{4\cdot97}{41} = 0\cdot121 = 3^{2}_{1}$		$\frac{-12}{18} = 0.0012 = 3^{\frac{2}{3}}$		
	ι.∇		$\frac{64}{26} = 2.35 = 8^{1}_{0}$		$\frac{9}{31} = 0.03 = 8^3$		50 = 5 00 = 812		41 = 5·12 = 81s	
		چ		۶,		≻"		۶.		۶
	٨	26 X 50 Y		52 X, 1111 Y,		83 X ₂ 120 Y ₃		93 X ₃ 170 Y ₃		101 X, 211 Y,
		×,		×		×		×		×
	×	97		\$2		83		6		٥

$$+y_{n}\frac{(x-\tau_{0})(x-x_{1})(x-x_{2})...(x-x_{n-1})}{(x_{n}-x_{0})(x_{n}-x_{1})(x_{n}-x_{2})...(x_{n}-x_{n-1})}(17 14)$$

उपर्युक्त मुत्र मे x वह मान है जिसके लिए Y का धाक्तन करता है। X_0,X_1 , $X_2,X_3,...,X_n$ कर X पर दिये हुए धारोही तम में मान हैं और $y_0,y_1,y_2,y_3,...,y_n$ कर Y पर $x_0,x_1,x_2,x_3,...,x_n$ के तहनुकार ज्ञात मान हैं।

सपान मूत्र हारा X के कियो भी मान के लिए किही भी दिवे हुए प्रेक्षणों की महावड़ा में Y का सावतन कर नकते हैं पर्यात् इस मूत्र के प्रयोग के निष् किसी प्रकार के प्रतिक्य नहीं हैं। फिर भी यह मूत्र कार्यविधि में कटिन होने के कारण प्रधिक चलन में नहीं हैं।

उदाहरण 17.9 निम्म भारती में एवं वर्ष ने बम बायु के बच्चों की बायु (महीनीं में) भीर उनके तरमुमार भार दिय हुए हैं।

वानू (महीनो मे)) X	कार (दिमोदान में) Y
1 z ₀	25 30
3 x ₂	40 y ₁
5 x ₂	5·0 y ₂
9 r ₃	6·5 y ₃
10 x _d	70 y ₄

छ मास की बायु के बच्चे के भार का बाक्तन लग्नाज-विधि द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं:---

मूत्र (17 14) के अनुसार X=6 के तिए Y का बावितन मान,

$$Y=2.5 \times \frac{(6-3)(6-5)(6-9)(6-10)}{(1-3)(1-5)(1-9)(1-10)}$$

$$+4.0 \times \frac{(6-1)(6-5)(6-9)(6-10)}{(3-1)(3-5)(3-9)(3-10)}$$

$$+5.0 \times \frac{(6-1)(6-3)(6-9)(6-10)}{(5-1)(5-3)(5-9)(5-10)}$$

$$+6.5 \times \frac{(6-1)(6-3)(6-5)(6-10)}{(9-1)(9-3)(9-5)(9-10)}$$

$$+7.0 \times \frac{(6-1)(6-3)(6-5)(6-9)}{(10-1)(10-3)(10-3)(10-9)}$$

=25
$$\times\frac{1}{16}$$
-4'0 $\times\frac{5}{14}$ +50 $\times\frac{9}{8}$ +6'5 $\times\frac{5}{16}$ -70 $\times\frac{1}{7}$
=0'156-1'428+5625+2031-1

भन 6 मान की मायु के बच्चो का ब्राक्तित भार 5 384 किसी है।

यानिय टिप्पणी धन्तकेतन या विश्वित का प्रधोग वाशिय एक धर्मकाल के सिर्फ होता है। जनगणना या प्रत्य देशस्थापी न्याय का प्रयोग करने शिमी निषित्र काल में धीरित पर का ध्रमणना भी इस विधि डास क्या जा सकता है। प्राक्तन के हेतु किसी भी विधि या गूत्र का प्रयोग स्थान के प्रशंत रहा जिसे द करता है। गूत्र का चयन करते राप्य सोस्पिकी जिद्द को पूर्ण साख्यानी वर्गनी थाहिये सन्यस स्थानकों के सान प्रमुद्ध प्राप्त होते हैं।

प्रस्तावली

- बताइए नि धन्तवेंशन और बहिवेंशन में में विसने तिए ग्रामित मान ग्रामिक परिष्ठ होने हैं? श्रापते उत्तर की तथ्यों के श्राचार पर पुष्टि की प्रिये ;
- म्यूटन की विधियों भे से किए विधि द्वारा बहिवेंबन कर सकते हैं ? उस विधि का संशिक्त विकरण भी शीविये ।
- 3. प्रन्तवेशन तथा बहिवेशन के उपयोग बताइए ।

= 5 384

- अनगणना वर्षों के कीम ने वर्षों से अनगणना का पना निम प्रकार सन्ता सकते हैं. उदाहरण शहित सममाद्रें।
- मेरिका ने मही के कोमले का मान्य भाव (इस्तर प्रति टक) विभिन्न वर्षों में निकल प्रकार था:

बर्द :	1951	1954	1957	1960
गोवले का भाव "	19-09	14.75	15.00	30 35
(बासर प्रनि दन)				

वर्ष 1956 में कीयते के माध्य भाव का धारतन की जिये।

मारत राष्ट्र में खीशोतिय वार्य जानने बाले बेकार अविकास की सब्दा विकास वार्यों में जिल्ला थी:

et X	बचाय को मदन (,000 व्यक्ति) Y	
1960	77 6	
1962	109 6	
1964	129 9	
1966	152-4	
1968	248-2	

वर्ष 1967 तथा 1970 ने लिए उचित विधियों का प्रयोग करके, बेकारों की सम्याका प्राक्तन की जिये।

 कनाडा में सेती के घनिरिक्त प्रत्य काम करने वालों का साप्ताहिक वेतन (इालर में) विभिन्न वर्षों में निम्न वा —

वर्ष	1959	1962	1965	1968
साप्ताहिक वेतन (डालर मे)	73-4	80 54	91.01	109.88

वर्षे 1967 के लिए चन्तर्वेशन द्वारा साध्याहिक वेतन ज्ञात कीजिये !

--- /-- 3

 निम्न सारणी का व्यास प्रयाग करके 22 वर्षों की बायु पर प्रत्यागित बायु (Expectation of Life) का बाक्कन कीजिये।

			[3	तर : 27 :	85 वर्ष]
			(भागर	, एम० ए०	1964)
(वधौं मे) .	32 2	29.1	26 0	23.1	20.4
भायु (वया म) प्रत्याशित भाय	15	20	25	30	33

[उत्तर: 27.85 वर्ष]

 निम्न सारणी मे भारत में सीमेट का उत्पादन हजार टर्नों मे कुछ वर्षों के लिए दिया गया है। समाप्त मान को ज्ञात कीजिये।

x :	1940	1948	1930	1932	1934	1930
Y:	39	85	?	151	264	388
			<i>{</i> 1	सर्दे सी इ	ए. व्यु बक्	66)

(उत्तर : द्विपद विस्तार विधि द्वारा भारतित मान=96.4)

10. बिटिस साझाज्य में कर्मचारियों को दी यह हानि पूर्ति (Compensation) की प्राणि (पौड़ों में) विभिन्न वर्षों में निम्न प्रकार थी। दो वर्षों के लिए मजात मानों का मानतन की विथे।

वर्षः	1963	1964	1965	1966	1967	1968
हानि पूर्वि						
री रागि	173	182	5	212	>	23.5
if 000.)	ोमें) -					

11 निम्न न्यास के द्वारा उन व्यक्तियों की सक्या ज्ञान की जिनकी प्राय 60 रुपये प्रीर 70 के के बीच म हैं।

वेतन रुपयो मे	40 से क्य	40-60	60-80	80-100	100-120
ब्यक्तियों की सहया	250	12	100	70	50
(हजारों में)					

(भागरा, एम॰ नाम॰ 1957)

[उत्तर म्यूटन विधि द्वारा बाकसन करने पर सस्या 53 6 हजार ध्यति]

12 लबाज-मूत्र द्वारा सपरापियो की सम्याज्ञात की जिये जिनकी साथु 35 वर्ष से कम है।

		वयाँ	से कम		
मायु	25	30	40	50	
मपराधियों नी सक्या	52	67 3	84-1	94•4	
			(नागपुर, व	शि॰ शाम • !	1963)

[उत्तर : 77 4%]

13 उन क्यनामी का क्यन कीजिये जिनके बाबार यह स्त्यामी का धन्तवेंग्रन क्या जाता है।

निम्न सारणी एक प्रवार की 1000 रु॰ की श्रीमा पालिसी पर वार्षिक किस्त को प्रदक्ति करती है ----

षापु (जग्म दिवस वे वास) वर्ष 25 30 35 40 45 वार्षित किस्त (वययो मे) 41.75 42.56 44.25 47.19 52.19 उत्पद दिये प्रतिको ने प्रयोग करके, 27 वर्ष की घायु पर 1000 की एक पासिमी पर कार्षिक किस्त का प्राक्त की जिये।

(बोधपुर, एम॰ नाम॰, 1968) [उत्तर . 42 34 रुपये]

14. सदि 1. जीवन-मारणी (Life Table) ये चातु पर कीरिता की मध्या को निक्षित करता है, न्यास द्वारा बचा मध्यव 1 है परिमुद्ध बान जात कीरिये जबकि मातु x=35, 42 चीर 47 हैं।

450

15. जात है.

log 654=2.8156, log 659=2.8189

log 658=2.8182, log 661=2.8202

पन्तर्वेशन के लिए सम्राज-सूत्र का अयोग करके log 656 ज्ञात कीजिये !

(बागरा, 1961)

[चत्तर: log 656=2·8168]

दिष्पत्ती: उपर्युक्त प्रश्नावली में दिये परीक्षाओं के सभी प्रश्न कांग्ल भाषा में थे जिनका पहाँ हिन्दी अनुवाद दिया गया है। धनेको प्रध्यमां में कई करों पर एक माथ ध्रेसक नेने होने हैं धौर इनका किलेतक भी एक माथ करना होता है। धन इन करों के सम्मिनन ध्राय्यन के लिए इनके स्वयुक्त करने की जानना ध्राय ध्यावस्थन हो जाना है। धनेक बहुकर करनों में ने बहुकर अस्तामान्य करन सर्वाधिक प्रयोग से धाता है। इनके ध्रितिरिक्त कुछ परेय मुख्य बहुकर करनों का भी इस ध्रध्याय से बर्जन दिया गया है। बहुकर विक्लेयक को कुछ विधिया ने में बहुनमान्य प्रयाद्य बहुकर विक्लेयक को कुछ विधिया ने में बहुनमान्य प्रयाद की स्वयुक्त करने हिया गया है। सहस्वय प्रयाद की स्वयुक्त करने हिया प्रयाद की स्वयुक्त होने स्वयुक्त स्व

बहुचर प्रसामान्य बंटन फलन

दिन प्रकार घनेको साह्यिकोय प्रध्ययनो से एक कर के लिए प्रधानान्य करन घरणिक महस्त्रपूर्ण है जसी प्रकार एक से प्रधिक करो के सबुन प्रसानान्य करन की बहुधा भावस्यकता होती है। इस प्रध्याय में इस करन के विषय में सहीए में विकरण दिया गया है।

माना कि K बाइफ्छिक चर X_1 , X_2 , X_3 , \dots , X_K है और इन्हें $\{K \times 1\}$ जम के स्तरम सरिज (Vector), \underline{X} , द्वारा निक्षित किया गया है सर्पाद

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_K \end{bmatrix}$$

भौर पक्ति सदिश, 🔀 ' निम्न होता है :—

$$X' = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_\ell\}$$

गहिल \underline{X} ने बदन को K-बर ब्युल्फ्सपीय यसायान्य बदन (K-pareste nonsingular normal distribution) नहते हैं यदि \underline{X} का \underline{x} पर आधिकता धनार वर्गन निम्न हा धीर हते $\underbrace{\Gamma_{\underline{X}}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_K)}_{[\underline{X}]} \le \underbrace{\Gamma_{\underline{X}}(\underline{x})}_{[\underline{X}]}$ हारा मुक्ति नरते हैं 1 $\underbrace{\Gamma_{\underline{X}}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_K)}_{[\underline{X}]} = \underbrace{\Gamma_{\underline{X}}(\underline{x})}_{[\underline{X}]} = \underbrace{\Gamma_{\underline{X}}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_K)}_{[\underline{X}]} = \underbrace{\Gamma_{\underline{X}}(x_1, x_2, \dots, x_K)}_{[\underline{X}]} = \underbrace{\Gamma_{\underline{X}}$

$$I_{X}(\underline{x}) = (2\pi)^{-\frac{K}{2}} |\underline{x}|^{-\frac{1}{2}} \exp\{-(\frac{1}{2})(x-\mu)^{2} \times x^{-1}(\frac{x-\mu}{2})\} \qquad \dots (181)$$

$$\pi_{K}^{-1} - \infty \leq x_{1} \leq \infty (1 \approx 1, 2, 3, \dots, K)$$

म भीर इस बटन के प्राचल हैं। जहाँ

$$\underline{\underline{\mu}} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_K \end{bmatrix} - \infty < \mu_i < \infty$$

भौर 🗴 एक सममित धनारमन निश्चित बाब्यूह है जिसका यस (K×K) है। प्रयोत्

सदिश X = x पर प्रमामान्य बटन को $N_{K} (F, \Sigma)$ द्वारा निरुपित करते हैं। यदि मावश्यक हो तो ६ का सहसम्बन्ध गुणाकों के पदों से निरुपण निस्न प्रकार कर

सक्ते हैं:---यह मध्याय (14) के प्रारम्भ में दिया जा चुका है कि किन्ही दो चरों X, व X, में महमम्बन्ध गुणानः,

$$\rho_{ij} = \frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon_i \epsilon_j}$$
 $\pi \quad \epsilon_{ij} = \rho_{ij} \epsilon_i \epsilon_j$

होता है। सत

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{ij} & \sigma_{i} & \sigma_{i} & \sigma_{ij} = \rho_{ij} & \sigma_{i} \sigma_{j} \\ & \sigma_{1}^{2} & \rho_{12}\sigma_{1}\sigma_{2} & \rho_{13}\sigma_{1}\sigma_{3}....\rho_{1K}\sigma_{1}\sigma_{K} \\ & \sigma_{2}^{2} & \rho_{23}\sigma_{2}\sigma_{3}....\rho_{2K}\sigma_{2}\sigma_{K} \\ & & \sigma_{3}^{2}....\rho_{3K}\sigma_{3}\sigma_{K} \\ & & & \sigma_{k}^{2} \end{bmatrix}$$

यदि K चर परस्पर स्वतन्त्र हो तो 🗗 = 0 होता है बौर इस स्थिति में ∑ एव विवर्ण प्राय्यूह हो जाता है भीर X का x पर प्रायिकता घनत्व फलन, K एकविचर प्रवासम्य वरी (univariate normal variates) वे प्रायिकता धनत्व पत्तर्नों के मुणन-पत्न के समान होता है।

यदि प्रत्येक $s_1 = 0$ और द्र एक एकांक बास्तुह (unit matrix) हो तो प्राधिकता बारद क्लन $\begin{bmatrix} \chi & \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 & ..., \chi_K \end{bmatrix}$ निस्न हो जाता है —

$$f_{\underline{\lambda}}(x_1, x_2, x_3, ..., x_K) = (2\pi)^{-\frac{K}{2}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}} ...(182)$$

इस रिप्रांत म $\frac{X}{A}$ के बटन को N_K (0, I_K) द्वारा जूषित करने है।

प्रमेय ! ५-वर प्रशासाध्य बटन म निकी तन वर ना उपान बटन, एनिवर प्रशासाय बटा र गमान होता है।

तिद्धि इस प्रमय ना यहाँ घर X_1 ना उपनि वटन ज्ञान करने सिख किया गया है। इसी प्रकार किसी भी घर X_1 ने लिए इस प्रमय को सिख कर सकते हैं जहाँ

1 mes 1 2, 3, , , k

(5.27) के चतुरूप सूत्र द्वारा X_1 ना उपनि बटा निरुष्ट रूप में दिया जा सन्ताह्रे —

$$g_{X_{1}}(x_{1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C \exp \left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_{1} - \mu}{2}\right)^{2} \times A \left(\frac{x_{1} - \mu}{2}\right)\right\} dx_{2} dx_{2} ... dx_{k} ... (183)$$

$$\exists \mu \mid A \Rightarrow \Sigma^{-1} \quad \forall \mu \in C \Rightarrow \frac{|A|^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}}$$

गरिश $(x-\mu)'$ भीर मार्शन में प्राथ्यूह A का विशासन करते गर, $(x-\mu)' \land (x-\mu) = [(x_1-\mu_1), (x_2-\mu_2)] \times$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{11} & \lambda_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix} \qquad \dots (184)$$

जहां Xा पा मारव ना प प्रतासाय मुहु है। यहां

$$\underline{\mathbf{X}}_2 := \begin{bmatrix} \mathbf{X}_2 & & & & & & & & & \\ \mathbf{X}_2 & & & & & & & & & \\ \mathbf{X}_3 & & & & & & & & \\ \mathbf{X}_4 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & \\ & & & \\ & &$$

माना कि.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ & & & \\ & r_{21} & r_{12} & r_{23} \dots r_{2K} \\ & & r_{23} & r_{22} & r_{23} \dots r_{2K} \\ & & r_{34} & r_{32} & r_{33} \dots r_{2K} \\ \vdots & & & \\ & r_{K_1} & r_{K_2} & r_{K_3} \dots r_{KK} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{21} \qquad \Lambda_{22}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

A एक मममित धनारमक निश्चित साब्युह है.

 $\Lambda_{11} = r_{11} > 0$, $A'_{12} = A_{21}$, A_{22} समित चान्यृत् है चार इसका प्रस्तिस्व है। (184) को निम्न रूप में लिख सकते हैं '---

$$= (x_1 - \mu_1) A_{11} (x_1 - \mu_1) + (x_1 - \mu_1) A_{12} (x_2 - \mu_2) + (x_2 - \mu_2)' A_{21} (x_1 - \mu_1) + (x_2 - \mu_2)' A_{22} (x_2 - \mu_2)'$$

द्यद (18.4 I) को इस प्रकार व्यवस्थित किया कि इसमे 🖈 के पर 🔀 से मनग हो जायें।

$$\begin{array}{l} (\underline{x} - \underline{\mu})' \wedge (\underline{x} - \underline{\mu}) \\ = (x_1 - \mu_1) (A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21}) (x_1 - \mu_1) + [(\underline{x}_2 - \underline{\mu}_3) \\ + A^{-1}_{22} A_{21} (x_1 - \mu_1)]' A_{22} [(\underline{x}_2 - \underline{\mu}_3) + A^{-1}_{22} A_{21} (x_1 - \mu_1)] \\ (18.42) \end{array}$$

(18 4.2) मे प्रथम पद 🗓 से मुक्त है। ब्रह्न. समाकलन (18.3) द्वारा,

$$g_{X_1}(x_1) = C \exp \left\{-\frac{1}{2}(x_1 - \mu_1)(A_{11} - A_{12}A^{-1}_{22}A_{21})(x_1 - \mu_1)\right\}F(\frac{x_2}{x_1})$$
....(18.5)

जरांक $F\left(\underline{x}_{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left[x_{2} - \left\{\frac{\mu_{2}}{2} - A^{-1}_{32} A_{21}(x_{1} - \mu_{1})\right\}\right]\right] \times A_{22}\left[\underline{x}_{3} - \left\{\mu_{2} - A^{-1}_{32} A_{21}(x_{1} - \mu_{1})\right\}\right] dx_{2} dx_{3} ... dx_{k}(186)$

$$A_{22} \left[x_1 - \{ \mu_2 - A^{-1}_{22} A_{21} \{ x_1 - \mu_1 \} \} \right] dx_2 dx_3 ... dx_k (186)$$

$$= \frac{1}{A_{21}[\sqrt{2}](\sqrt{2}\pi)^{2-1}}(18.6.1)$$

मानाकि.

$$\frac{|A_{j1}|^{1/3}}{(\sqrt{2\pi})^{K-1}} = C_1$$

$$\therefore F(\underline{x_2}) = \frac{1}{C_1}$$

(185) grut,

$$\begin{aligned} &\{18.5\} \text{ gru}, \\ &g_{X_1}(x_1) = \frac{C}{C_1} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(x_1 - \mu_1\right) \left(A_{11} - A_{12} A^{-1}_{24} A_{21}\right) \left(x_1 - s_1\right)\right\} \\ &= -\frac{|A|^{1/2}}{(\sqrt{2\pi})^{K}} \cdot \frac{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{K-1}}{|A_{22}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(x_1 - s_1\right) \times \left(A_{21} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21}\right) \left(x_1 - \mu_1\right)\right\} \\ &= \frac{|A|^{1/2}}{|A_{22}|^{1/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(x_1 - \mu_1\right) \times \right\} \end{aligned}$$

$$(A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{31}) (x_1 - a_1)$$
 (18.7)

 $|A| = |A_{22}| |A_{11} - A_{12}| A^{-1}_{22}| A_{21}|$

| A₁₁ - A₁₂ A⁻¹₂₂ A₂₁ | एक प्रदिश राशि (scalar quantity) है । इसलिए माना कि

$$(A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21}) = \frac{1}{e^2}$$

जो कि एक धनात्मक निश्चित राशि है।

$$\therefore \frac{|A|^{1/2}}{|A_{22}|^{1/2}} = \frac{1}{\epsilon}$$

फनन (18.7) में $\frac{|A|^{1/2}}{|A_{ex}|^{1/2}}$ चौर $(A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21})$ के मान

रनने पर.

$$g_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (x_1 - \sigma_1)^3\right\} ...(18.8)$$
 $\pi g_1^* - \omega < x_2 < \omega$

 $\mathbf{g}_{X_1}(\mathbf{x}_1), X_1$ वे प्रमासान्य बटन वे लिए प्राप्तिकता मनस्व फसन है। मत प्रस्व निद्ध हुई ।

द्विचर प्रसामान्य बंटन

यह बहुषर प्रसामान्य बटन की एक विकिप्ट स्थिति है। जिसमें कि केवस दो वर हैं प्रयांत् K=2 प्रोर

$$\begin{aligned} &\overset{X}{\times} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, & \overset{s}{\times} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \\ &\overset{X}{\times} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{1}^2 & \rho \sigma_{1} \sigma_{2} \\ \rho \sigma_{1} \sigma_{2} & \sigma_{2}^2 \end{bmatrix} \\ &\overset{X}{\times} = \sigma_{1}^2 \sigma_{2}^2 (1 - \rho^2) \end{aligned}$$

जहाँ ρ परो X₁ व X₂ में सहसम्बन्ध गुपाक है। घट

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2 (1 - \rho^2)} & \frac{-\rho}{\sigma_1 \sigma_2} (1 - \rho^2) \\ -\rho & \frac{1}{\sigma_2 \sigma_3 (1 - \rho^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2 (1 - \rho^2)} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \frac{-\rho}{\sigma_1 \sigma_2} \\ \frac{-\rho}{\sigma_1 \sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}$$

क्यों कि एक म्युत्कमपीय मान्यूह $A = (a_{ij})$ के प्रतिकोग का (i, j) वा मर्थ $a^{ij} = \frac{A_{ij}}{|A|}$ होंचा है जबनि A_{ji} मान a_{ji} का सहसन्द है भीर |A|, A ने सार्याप्त की निर्दापत करात है। मतः (18.1) के मनुसार,

$$f_{\underbrace{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{\{g_1^2 g_2^2 (1 - \beta^2)\}(2g)^2}} \exp\{-\frac{1}{2}[(x_1 - s_1), (x_2 - s_2)].$$

$$\frac{1}{1 - \rho^{2}} \begin{bmatrix}
\frac{1}{\sigma_{1}^{2}} & \frac{-\rho}{\sigma_{1}\sigma_{2}} \\
-\frac{\rho}{\sigma_{1}\sigma_{2}} & \frac{1}{\sigma_{2}^{2}}
\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\pi \sigma_{1}\sigma_{2}\sqrt{1 - \rho^{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2(1 - \rho^{2})} \times \left\{ \frac{(x_{2} - \mu_{1})^{2}}{\sigma_{1}^{2}} - \frac{2\rho}{\sigma_{1}\sigma_{3}} (x_{1} - \mu_{1})(x_{2} - \mu_{2}) + \frac{(x_{2} - \mu_{2})^{2}}{\sigma_{2}^{2}} \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi \sigma_{1}\sigma_{2}\sqrt{1 - \rho^{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2(1 - \rho^{2})} \times \left\{ \left(\frac{x_{1} - \mu_{1}}{\sigma_{1}}\right)^{2} - 2\rho \left(\frac{x_{1} - \mu_{1}}{\sigma_{1}}\right) \left(\frac{x_{2} - \mu_{2}}{\sigma_{2}}\right) + \left(\frac{x_{2} - \mu_{2}}{\sigma_{2}}\right)^{2} \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi \sigma_{1}\sigma_{2}\sqrt{1 - \rho^{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2(1 - \rho^{2})} \times \left(\frac{x_{2} - \mu_{2}}{\sigma_{2}}\right) + \left(\frac{x_{2} - \mu_{2}}{\sigma_{2}}\right)^{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi \sigma_{1}\sigma_{2}\sqrt{1 - \rho^{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2(1 - \rho^{2})} \times \left(\frac{x_{2} - \mu_{2}}{\sigma_{2}}\right) + \left(\frac{x_{2} - \mu_{2}}{\sigma_{2}}\right)^{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi \sigma_{1}\sigma_{2}\sqrt{1 - \rho^{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2(1 - \rho^{2})} \times \left(\frac{x_{2} - \mu_{2}}{\sigma_{2}}\right) + \left(\frac{x_{2} - \mu_{2}}{\sigma_{2}}\right)^{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi \sigma_{1}\sigma_{2}\sqrt{1 - \rho^{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2(1 - \rho^{2})} \times \left(\frac{x_{2} - \mu_{2}}{\sigma_{2}}\right) + \left(\frac{x_{2} - \mu_{2}}{\sigma_{2}}\right)^{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi \sigma_{1}\sigma_{2}\sqrt{1 - \rho^{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2(1 - \rho^{2})} \times \left(\frac{x_{2} - \mu_{2}}{\sigma_{2}}\right) + \left(\frac{x_{2} - \mu_{2}}{\sigma_{2}}\right)^{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi \sigma_{1}\sigma_{2}\sigma_{2}\sqrt{1 - \rho^{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2(1 - \rho^{2})} \times \left(\frac{x_{2} - \mu_{2}}{\sigma_{2}}\right) + \left(\frac{x_{2} - \mu_{2}}{\sigma_{2}}\right)^{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi \sigma_{1}\sigma_{2}\sigma_{2}\sqrt{1 - \rho^{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2(1 - \rho^{2})} \times \left(\frac{x_{2} - \mu_{2}}{\sigma_{2}}\right) + \left(\frac{x_{2} - \mu_{2}$$

द्विचर क्षटन की साबायकता विभिन्न साम्यज्ञों में बहुधा प्रश्नो है। यह बहुबर बडनो से संसरफतस है क्योडि इससे वैद्यान दों कर हैं। दिवर के लिए उदान कटन स्रोर प्रतिबंधी कटन को निस्त पीति से जान कर गणने हैं।

उपांत बंदन

यदि $X_1,\,X_2$ दो याहण्डिक प्रसामाध्यतः बटित चर है तो X_1 यह उपात बटन,

$$g_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(x_1, x_2) dx_2$$
(18.10)

अब कि कतर $\xi_{X_1}(x_1,x_2)$ नूच (18,9 1) द्वारा दिया गया है।

$$\begin{split} & \varepsilon_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times \left\{ \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right\} \right] dx_2 \dots (18\ 10\ 1) \\ & = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2} \left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right) \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right] dx_2 \dots (18\ 10\ 1) \end{split}$$

$$\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} = u$$
 wit $\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} = v$

$$\therefore dx_1 = \sigma_1 du; dx_2 = \sigma_2 dv$$

$$g_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sqrt{1-\beta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\{-\frac{1}{2(1-\beta^2)} \times x_1(x_1) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{2(1-\beta^2)} = \frac{1}{2(1-\beta^2)} = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{2\pi \sigma$$

$$(u^2 - 2 puv + v^2)$$
. dv (18.10.2)

(18.10.2) में जब dv के सम्बन्ध में समाकलन करना है तो u एक स्पिरोंक के मूल में लिया जाना है। $(v - \rho u)$ का पूर्ण वर्ष बनाने के हेनू, पाताक में $\rho^2 u^2$ कोइने व घटाने पर,

$$g_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times$$

$$(v - \rho u)^2$$
 dv(18 10.4)

$$\frac{\mathbf{v} - \rho_{u}}{\sqrt{1 - \rho^{2}}} = 1 \quad \text{so where } \mathbf{v}$$

$$dv = \sqrt{1-\rho^2} \cdot dt$$

$$g_{X_1}(x_t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{2\pi \sigma_1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\epsilon}{2}\epsilon^{\epsilon}\right\} dt.$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{\sqrt{2\pi} e_1}$$

$$\left[\because \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt \approx 1 \right]$$

u के स्थान पर $\frac{x_1 - \mu_1}{\pi_2}$ रखने पर,

$$g_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2} (x_1 - s_1)^2\right\}$$
(18.11)

स्पष्टतः $g_{X_1}(x_1)$ केवल चर X_1 का प्राधिकता चनश्य फलन है। इसी प्रकार X_2 का उपात बटन है,

$$g_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_x^2} (x_2 - \mu_2)^2\right\}$$
 ...(18.12)

यह परिणाम गाधारण भाषूणे जात करने में मत्यन्त वहायक है जैसे

$$\mu_{20} = \sigma_1^{-2}, \ \mu_{02} \simeq \sigma_2^{-2}$$
 wife

यदि P = 0 हो तो (18.9 1) व $g_{X_1}(x_1)$ चार $g_{X_2}(x_2)$ की महायता में,

$$f_{X}(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$$
(18.13)

तही $f_1(x_1)$ = $g_{X_3}(x_1)$ फीर $f_2(x_2)$ = $g_{X_2}(x_2)$ जो $f_1(X_2 + X_2 + x_3)$ होने ने तिए प्रतिकाध है।

सप्रतिबन्ध बंटन

दो बसे के सप्तितक्य कटन से मुख कविकर तुम प्राप्त होते है। इन तुमो को जानने के हुन इस कटन का सम्बयन करना वर्षाना है। माना कि दो प्रमाणान्यतः बटित कर X_1 स्रोर X_2 हे सीए स्वय X_3 है सिए स्वय X_3 है सिए X_2 है। मान करना है। (5.37) के सनुसार,

$$f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) \Rightarrow \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)}$$
(18.14)

(18.91) व (18.11) के द्वारा ((६ x₂) व ((x₁) चनरव कान हात है प्रप. इनको (18.14) म रातने वर.

$$\frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^{\sigma_2} - 2\rho \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \right]$$

$$N_1/X_1}(x_1/x_1) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \left[\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

 $\frac{i}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \exp\left\{-\frac{1}{2\,\sigma_1^{\,2}} (x_1-r_1)^2\right\} \dots (18.15)$

460

माना नि

$$f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) = \frac{\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} = u \quad \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} = v}{\frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \mu^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1 - \mu^2)}(u^2 - 2\mu uv + v^2)\right\}}$$

$$f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2(1 - \mu^2)}(v - \mu^2)^2\right\}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} u^{2}\right\}$$

$$= \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sigma_{2}} \sqrt{1 - \rho^{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1 - \rho^{2})} (v - \rho u)^{2}\right\} \dots (18.16)$$

u व v •ा पुन x1 व x2 के पदो म प्रनिस्थापन करन पर,

$$\begin{split} f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \times \right. \\ &\left. \left\{ \frac{(x_2 - \mu_2)}{\sigma_2} - \rho \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right\} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_2^2 (1 - \rho^2)} \times \right. \\ &\left. \left[\frac{\lambda_2 - \left\{ \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - \mu_1) \right\} \right]^2 \right] \dots (18.161) \end{split}$$

क्यों कि X_1 , μ_1 , μ_2 , σ_1 , σ_2 व ρ भवर है और X_2 एक सतत कर है। अन (18 16 1) से स्पष्ट है कि X_2 का बटन प्रसामान्य है जिसका माध्य $\mu_2 + \rho$ $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ $(x_1 - \mu_1)$ है और प्रसरण $\sigma_2^2(1 - \rho^2)$ है। इसी प्रकार स्थिर X_2 के लिए X_1 ना सप्रतिकायी बटन ज्ञात किया जा सकता है। यह बटन वही होगा जो कि यदि (18 14) में अनुसन्त 1 भौर

को परस्पर बदलने पर प्राप्त होता है मर्चात्

$$f_{X_1/X_2}(x_1|x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1 \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2_1(1-\rho^2)} \times \left[x_2 - \{\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (x_2 - \mu_2)\} \right]^2 \right]$$
 (1817)

-उपर्युक्त वर्गन से स्पष्ट है कि बहुचर प्रसामान्य बटन के उपात नवा सप्रतिबन्धी बटन भी प्रसामान्य होते हैं।

समाश्रयण-वक

उरात मौर सप्रतिवयो बटन के ज्ञान को, सँद्धान्तिक समाध्यक्ष कक का रूप जानने मे प्रमोग कर सक्ते हैं। इसकी मायवयक्ता बानुमदिक वक्र-रेखी समाध्यक्ष के निए प्रतिकर (Model) की रणना के हेतु होती हैं।

भाग कि सप्रतिकंधी बटन I(y|x) का विचार किया गया है क्यों कि समाध्यय में पलन करों Y क्षोर X में ही दिया जाता है। यदि मान तिया कि X का एक स्विर मान x_0 है तो रेखा $X=x_0$ के साथ Y का माध्य मान एक ऐसा दिव्ह निर्धारित करेगा कि जिसकी कोटि Y_{x_0} के निर्धारत को जा सकती है। वैने-जैमे X के विभिन्न मान निर्पे जाते हैं, उद्योधर रेखा पर जिन्न-जिम साध्य विन्दू प्राप्त होते जाते हैं। इस प्रकार माध्य विन्दू प्राप्त होते जाते हैं। इस प्रकार माध्य विन्दू प्राप्त होते जाते हैं। इस प्रकार माध्य विन्दु प्रोप्त को कोटि Y_{x_0} निर्धारित सान प्रकार का एक कनन होता है। इस माध्य विन्दु प्राप्त (Locus) एक वक होता है जिसे कि X का X पर समाध्यया वक्त नहते हैं।

Y के X पर समाध्यय दक्ष की समीकरण है

$$\overline{Y}_{x} = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y/x) dy$$
(18 18)

$$- = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{f(x,y)}{f_1(x)} dy \qquad(18181)$$

मत परिमापा के सनुसार एक समाध्यण वन एव सम्रानवधी बटन के माध्य का पथ है (18.16.1) की सहायता से, x_2 = y और x_2 = x मानने पर Y का X पर समाध्यण कक समीकरण है.

$$\nabla_{\mathbf{x}} = \mathbf{s}_{\mathbf{Y}} + \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{s}_{\mathbf{Y}}}{\mathbf{s}_{\mathbf{X}}} (\mathbf{X} - \mathbf{s}_{\mathbf{X}})$$
(1819)

जबिक चरों Y ग्रीर X के माध्य एव मानक विचलन ऋमण:

यह ध्यान रत्नना चाहिय कि सम्बन्ध (1819) के मत्य होने के निए यह प्रावश्यक है कि चरा X धौर Y का सयुक्त बटन प्रमामान्य हो। इस सभीकरण से इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि दोने। घरो का बटन प्रसामान्य होने की स्थित में Y का X पर समाध्यण कक एक सरति होती है। इस कारण ब्यवहार में बहुधा रेखीय समाध्यण का प्रयोग होता है।

विशार्ट-बंटन

माना कि $\frac{X}{L}$ एक $(K \times 1)$ तम का सदिश है जिसका बटन N_K $(\frac{\mu}{L}, X)$ है और समग्र प्रसरण-महम्मरण आब्यूह, Σ वा आवलक S है। यदि प्रत्येक घर पर प्रतिदर्श में n प्रेक्षण हैं तो,

$$S = \frac{1}{n-1} \quad \stackrel{n}{\underset{j=3}{\Sigma}} \quad (X_{1} - \overline{X}) \quad (X_{i} - \overline{X})' \quad \quad (18.20)$$

$$\forall I A \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\begin{array}{c} X_i - \overline{X} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} X_i - \overline{X} \end{array} \right)' = (n-1) S \dots (18.20.1)$$

$$\underline{X} = \frac{1}{n} \left[\underline{X}_1 + \underline{X}_2 + \dots + \underline{X}_n \right]$$

ब्यंजक A (या S) ने बंदन को विवार्ट-बंटन कहते हैं। इस बंदन को निम्न रूप में प्री समफ सकते हैं:—

माना कि σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} ,...... σ_{KK} , म्राध्यूह Σ के तत्त्व है धीर इनके धाक्तर s_{11} , s_{12} , s_{22} s_{1k} है तो सम्याम्रो $(n-1)s_{11}$, $(n-1)s_{12}$, $(n-1)s_{22}$ $(n-1)s_{kk}$ जो कि A के अग्र है, का संयुक्त बटन विशार्ट-बटन कहलाता है।

A के धनारमङ निश्चित होने की स्थिति में, A का धनत्व फलन निम्न होना है :---

$$f(A) = \frac{|A|^{\frac{1}{3}(n-k-1)} e^{(-\frac{1}{2}t, \Sigma^{-1} A)}}{2^{\frac{1}{2}nk} \pi^{k} (k-1)^{1/4} |\Sigma|^{\frac{1}{3}n} \pi |\overline{\frac{1}{2}(n-1+1)}|} \dots (1821)$$

यहीं इस फलन को ब्युत्पन्न नहीं किया यथा है क्योंकि यह पुस्तक मुख्यतथा प्रयोगासक हिन्द से लिकी गई है। यदि $\mathbf{x} = \mathbf{i}$ हो तो उपर्यक्त बटन को \mathbf{x}^2 बटन का ब्यायक रूप समना जाता है।

यदि सदिश में नैवन दो घर X_1 व X_2 हो ती विशार्ट-बटन ने लिए व्यजन (18 21) में k=2 रापने पर पनाव फनन है

$$f_{A}(x_{1}, x_{2}) = \frac{|A|^{\frac{3}{4}}(n-3)}{2^{n} \pi^{\frac{3}{4}} |x|^{n/2}} \frac{|x|}{|x|} \frac{|x-1|}{|x|} \dots (1822)$$

हित्यकी बही 1, 27 Å का वर्ष है कि वास्त्रह, 27 Å के विवर्ण तस्त्री का मील निया गया है क्वोति एक (p. 2p) जब के वास्त्रह B का व्युतेक (Trace) परिमाण के व्युतार, निम्न होता है .—

$$t_r(B) = \sum_{i=1}^{p} b_i$$

होटस्मि 🍱 बंटन

पृत चर समय के बाध्य के प्रति परिकरन्ता Ho: म= so की परीता के विषय में सध्याय 9 में पर्याण दिया जा चुका है । इस स्थिति में प्रतिवर्धक,

$$t = \frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{n}}{s}.$$

$$t^2 = \frac{(\overline{X} - \mu)^2 n}{s^2}...(18.23)$$

व्यवस्थि कर

X~N(F, e) 21

पिन्नु प्रायः एक ताय घनेक को ने यवध नास्य ने प्रति परिवास्त्रता की भावस्थाता होतो है सीर तस दिवति में होटलिंग पिं⊸ बदन ना प्रयोग विन उत्तम है। माना कि K कर है को कि सदिस ऑस्ट्रास्त निर्मादक है सीर ऑस ∼ N (टू. प्र.)

 T^2 -संदर्भ को पहले कृत्य स्थिति (null case) में ही दिया गया है सर्थान् अब $H_0: \frac{\mu}{r} = \frac{\mu_0}{r}$

माता (व प्रत्येक कर वर n परिवास वे तृत बाहिन्छक प्रतिदर्भ वर अध्य रिया गया है। (18.23) के चतुन्य क्षेत्रक समय के लिए प्रतिदर्शय

$$T^2 = n \left(\overline{\chi} - \underline{s}_0 \right)^p S^{-1} \left(\overline{\chi} - \underline{s}_0 \right) \dots (18.24)$$

जबकि 5 सह प्रसरण धाब्यह 2 ना धाकलक है।

माना वि

$$(S_{ij}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} (X_{ij} - \overline{X}_i) (X_{ji} - \overline{X}_j) \end{pmatrix} \dots (18.25)$$

$$\exists \xi \hat{t} \qquad i, j = 1, 2, 3 \dots k$$

.... (18 25.1)

यदि (S_{ij}) का प्रतिलोम साध्यूह (S^{ij}) है तो सम्बन्ध (18.24) को परिकल्पना H_0 के सन्तर्गन निम्न रूप में निस्त सकते हैं —

$$T^2 = n(n-1) \sum_{i=1}^{n} (\overline{X} - \mu_{i0}) S^{ij} (\overline{X}_{j} - \mu_{i0}) \dots (18.26)$$

मिंद (18.26) में k = 1 हो तो \mathbb{T}^2 , t^2 के तुस्य हो जाता है। ब्यन्तर (18.26) में μ_n व μ_n में मान निराकरणीय परिकल्पना $\mu_1 = \mu_n$ के सनुसार रखने होते हैं। जबिक μ_1 चर X_1 चा बारविवन साध्य है और μ_n साध्य μ_1 वा बल्पित सान है। होर्दिलग ने बताया कि परिकल्पना M_n के सन्तर्गत संस्था,

$$U = \frac{T^2}{n-1} \qquad(18.27)$$

एक मभाग्य-बीटा घर (beta-prime variate) होता है जिसका धनाव फलन है,

$$f(U) = \frac{1}{\beta\left(\frac{k}{2}, \frac{n-k}{2}\right)} \frac{U^{(k-2)/2}}{(1+U)^{n/2}} \dots (18.28)$$

फनन f(U) द्वारा स्वप्ट है कि $\frac{(n-k)}{K}$. $\frac{T^2}{(n-1)}$ ना बंदन, F-बंदन है जिसनी स्वतन्त्रता कोटियों k और (n-k) हैं।

भ्रशुन्य स्थिति :

यदि H_0 मत्य न हो प्रयोत् $\|\cdot\|_{-p^2}$ $_0 \neq 0$ हो तो T^2 — बटन धनेन्द्रीय F—बटन ने समान होता है। इस स्थिति में भी F नी स्वतन्त्रता कोटियौं K भौर (p-k) होती हैं। भ्रकेन्द्रीय प्राचल न निम्न होता है:—

$$\tau = \frac{n}{2} \quad \mathbb{E} \left(\mu_i - \mu_{i0} \right) \left(\mu_j - \mu_{i0} \right) \sigma^{ij} \quad (18.29)$$

जबवि (ø¹।) = ¾-1

पत प्रवेग्रीय F-इटन का चनत्व करून है,

$$f(F_1) = \frac{k}{n-k} \frac{e^{-T}}{|(n-k)|^2} \sum_{\beta=-0}^{\infty} \frac{\tau^{\beta}}{\beta!} \frac{\left(\frac{k}{n} + \beta\right) \left(\frac{kF_1}{n-k}\right)^{\frac{k}{2} + \beta - 1}}{\beta!} \frac{\left(\frac{k}{n} + \beta\right) \left(1 + \frac{kF_1}{n-k}\right)^{\frac{k}{2} + \beta - 1}}{\left(1 + \frac{kF_1}{n-k}\right)^{\frac{k}{2} + \beta}}$$

.. (18 30)

र = 0 होने की रिपति में यह यनस्व फलन केन्द्रीय बटन के सिए यतस्व फलन के मुन्य हो जाता है।

हिष्यभी सनेग्दीय न्विटन ने लिए दिया गया यतरव परत (1830) सीर (736) एक रूप हो जाते हैं यदि (1830) में n=x₃-j-x₃, k=x₃ a n-k=x₃ रुपरें।

परिकल्पना परीक्षाः

Ho: मा=मा की Ha . मा≠ मा के विरुद्ध परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते है :-

 T^{a} का मान (18:26) से परिकासित कर लिया जाता है भीर परिकासित T^{a} की सक्या T_{0}^{a} से तुमना करके H_{0} के विषय मे निर्णय कर निया जाता है जहां a का॰ स्न॰ भीर हक को a (k, n-k) के लिए,

$$T_0^3 = \frac{(n-1)k}{n-k}F_{\alpha}$$
(1831)

यदि $T^2>T_b^2$ हो तो H_0 को सम्बोकार कर दिया जाना है सम्यका स्वीकार कर निया जाता है ।

यदि उपर्युक्त परीक्षा सम्भाविता खनुपात निक्च के धावार पर वर्रे तो। वह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$L^{2/n} = \frac{1}{1 + T^{1/n-1}} \qquad(11.32)$$

प्रशित सम्भाविता सनुपात परीक्षा ने निष् कंडिक क्षेत्र $L \subset L_0$ हारा दिया जाता है जहां L_0 ना मान इस प्रकार भानते हैं कि H_0 ने मत्य होने पर $L \subset L_0$ होने की प्राधिकता α ? । पन (18.32) की महापता ने

$$T_0^{1} = (n-1)(L_0^{2/n}-1)/L_0^{2/n}$$
(18.33)

इस स्थिति से भी परीक्षा तिरुच नही रहता है।

महालानबोत व्यापकोकृत दूरी :

माना कि दो K-चर प्रमामान्य नयय है जिनके बाह्य कमत 🚜 (1) सीर अरही है सीर

दोनों ना सामान्य प्रसार भाव्युह ξ है। गणितीय भाषा में दो K-चर ममस N ($\mu^{(1)}$, X) भीर N ($\mu^{(2)}$, X) हैं तो

$$\triangle^{2} = \frac{1}{K} \left(\underline{\mu}^{(1)} - \underline{\mu}^{(2)} \right)^{r} \Sigma^{-1} \left(\underline{\mu}^{(3)} - \underline{\mu}^{(3)} \right) \qquad \dots (18.34)$$

को दो समग्रो के दीच महानानवीन व्यापकी हुन हूरी वर्णः

∆° का घाकलन :

इस प्रावन्तन को Bose ने बात दिया या। माना दि दानों समयों से से कमग परि-माण n_1 व n_2 दे दो स्वतन्त्र प्रनिदर्भ चयन विये गये हैं धौर Δ^2 दा प्रावन्तर D^2 है।

परिभाषा ने मनुनार

$$D^{2} = \frac{1}{k} \left(\overline{X}^{(1)} - \overline{X}^{(2)} \right)^{*} \Sigma^{-1} \left(\overline{X}^{(1)} - \overline{X}^{(2)} \right)(18.35)$$

मोर E (D²) =
$$\triangle$$
² + $\frac{2}{n}$ (18 36)

जहाँ n, n, व n, का हरात्मक माध्य है ग्रयीत्

$$\overline{n} = \frac{2n_1 n_2}{n_1 + n_2}$$

प्रत ∆ै दा सनेशिनत भाकसक_्

$$D_{k}^{2} = D^{2} - \frac{2}{n}$$
(18.37)

$$= \frac{1}{k} \left(\underline{\bar{x}}^{(1)} - \underline{\bar{x}}^{(2)} \right)' \underline{x}^{-1} \left(\underline{\bar{x}}^{(1)} - \underline{\bar{x}}^{(2)} \right) - \frac{2}{n} \dots (18.37.1)$$

यदि n1 भौर n2 बृहत् हो तो = उपेक्षणीय है भौर इस स्पिति में,

$$D_{k}^{2}=D^{2}$$
(18.37.2)

जब प्रज्ञान हो तो ∆ै नो स्टूडैटीहन Dै कहते हैं।

स्पिति 2:—यदि Σ जलात हो तो Δ^2 को सस्दूर्दशहत (unstudentised) D^2 कहते हैं। माना कि n_1 व n_2 परिमाण के दो स्वतन्त्र प्रतिदानों हारा प्राप्त Σ का साकलक Ξ है। इस स्पिति में Σ के स्थान पर S का प्रयोग करना होना है। यस

$$D_{2}^{2} = \frac{1}{K} \left(\overline{\underline{X}}^{\{1\}} - \overline{\underline{X}}^{\{2\}} \right)' S^{-1} \left(\overline{\underline{X}}^{\{1\}} - \overline{\underline{X}}^{\{2\}} \right) \dots (1838)$$

$$E(D_2^2) = \frac{(n_1 + n_2 - 2)}{(n_1 + n_2 - k - 3)} (\Delta^2 + \frac{2}{n}) \dots (1839)$$

प्रतिदर्गेत Da को ही सम्द्रवैदीकृत Da कहते हैं।

T' भौर D' में सहबन्ध .

यदि D^2 के लिए दिये पर्यक्षित्रक याI/K, जाणि व्यिशंक है. को छाउँ दें ताभी करते के का गावीई प्रभाव नहीं परता है। इस स्थित स

$$D_{3}^{2}=(\overline{X}^{(1)}-\overline{X}^{(2)})'S^{-1}(\overline{X}^{(1)}-\overline{X}^{(2)})$$
(18.40)

मीर
$$T^2 = \frac{n_1}{n_2 + n_4} - D^2$$
(1841)

$$\frac{T^{k}}{n_{1}+n_{2}-2} \ , \ \frac{n_{1}+n_{2}-k-1}{k} \ \sim \ \mathbb{F}_{k, \, \left(\, n_{1}+n_{2}-k-1 \, \right)}$$

....(1842) इसी प्रचार का बटन D² के पदों में किविल कर क्षांत के साथ सम्बाध 19 में दिया समाहे।

हिपात रूपों का समित्रतित बंटन :

यदि K बरों का सम्मितित बंदन.

ज्ञात है तो द्विपात कप <u>रूर</u> A <u>र</u> बा बटन ज्ञात बरना है।

माना कि <u>र</u> ==Q <u>५</u> जबकि 🏗 एक शास्त्रह इस प्रकार कर है कि

ग्रीर मस्मितित K चरो का बटन एमन

धत

$$C_1 e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{2}} \xrightarrow{y} d_{\frac{y}{2}}$$

$$= C_1 e^{-\frac{1}{2}(y^2_1 + y^2_2 + \dots y^2_k)} d_{y_1} d_{y_2} d_{y_k} \dots (114)$$

$$\therefore \quad \frac{x'}{i} \land \frac{x}{-1} = x y^2 = y^2 + y^2 + \dots + y^2$$

का बटन χ^2 होता है जबनि K चर, $N\{0,1\}$ बटित हो । यहाँ χ^2 की म्वातन्त्रता कोटि K होती है ।

कोकरान-प्रमेयः

माना कि $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$, समस्र N(0,1) से एक प्रनिदगे है धीर यदि $X^2_1 + X^2_3 + X^2_3 + + X^2_n = q_1 + q_2 + q_3 +, q_k \quad \frac{n}{2} \quad (18 \ 44)$

जबकि \mathbf{q}_1 (see 1.2,3,..., \mathbf{k}) एक डियात रूप है जिसको कोट (rank) \mathbf{p}_1 है तो $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3$ \mathbf{q}_k का स्वनन्त्र रूप से बटन $\mathbf{x}^2\mathbf{p}_1$ होने के लिए बावस्थक बौर पर्यान्त्र प्रतिसंघ है कि,

इम प्रमेय को धाब्यूह खिद्धान्तों का प्रयोग करके लुगमता से खिद्ध किया जा सकता है। यहाँ इसको सिद्ध करके नहीं दिखाया यया है।

बहुपद-बंटन :

यदि E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , E_5 , E_6 , E_7 , E_8 , $E_$

$$= (p_1, n_2, n_3, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_k^{n_k}$$

$$\xrightarrow{\Sigma} n_j = n$$

पटनाएँ किस तम में घटिन होती है इतसे कोई कवि नहीं है झद n में से D₁,D₂ D₃....D_k बार पटनाओं के घटिन होने के परस्पर सपदर्जी दण

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!}$$

हैं। भतः भावस्यक प्रायिकता,

$$P (n_1, n_2, n_3 ... n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! ... n!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_k^{n_k} (1845)$$

(18.45) द्वारा दिये यथे बटन को बहुनद बंदन कहते है। दायों धौर दिया गया स्थंजक $\{p_1+p_2+p_3...+p_k\}^n$ के विस्तार मे ध्यापक वह है।

बहपद बटन का माध्य व प्रसरण निम्न होता 🖡 ~

$$E(n_i) = np_i \tag{18 46}$$

$$E(n_i^2) = np_i + n(n-1)p_i^2 \qquad .(1847)$$

$$V (n_i) = E (n^2_i) - \{E (n_i)\}^2$$

$$= np_i + n (n - 1) p_i^3 - n^2 p_i^2$$

$$= np_i - np_i^2$$

$$= np_i (1 - p_i)$$

n, र n, म सहप्रमरण

$$\operatorname{cov} (n \cdot n_i) = \Gamma (n_i \cdot n_i) - E (n_i) E (n_i)$$

जस्त∫ र

$$E(n, n_i) = n(n-1) p_i p_i$$

cov
$$(n_1 \ n_j) = n \ (n-1) \ p_i \ p_j - np_i$$
, np_i
= $- np_i \ p_i$

प्रवर्षेत्र गरिणाम द्विपद बटन व समस्य है।

प्रश्नावली

सिद्ध कीजिये कि
$$C = \frac{1}{\pi a^2}$$
 और यदि $E(X) \Rightarrow E(Y) = 0$

 $E(X^2) = E(Y^2) = \frac{a^2}{4} m X = Y क्षा स्वतन्त्रता की परीक्षा कीतियं।$

- (ι) X_1 ব X_2 বা মগ্রবিষ্ণ মতের লাব কীরিল ব্যবকি $X_2 = x_0$
- (n) X2 का उपान बनन जान कीजिय ।
- 3 नाजीय बटन न घर द्वार बटन स चानर ना स्पार ना स उराहरण सहित समभाइय ।
- हाटसिंग कि बनन स दिस परिष्ठस्थना का परीक्षा को आनी है स्रोर कम परिक्रमाना क लिए प्रतिकृतिक देवर पूर्व विधि को विवरण कार्यित ।

5. यदि

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \underline{\Sigma}_{11} & \underline{\Sigma}_{12} \\ \underline{\Sigma}_{21} & \underline{\Sigma}_{12} \end{bmatrix}$$

तो सिद कोजिये कि $\underline{P}' \Sigma^{-1} \underline{F} > \underline{F}(1)' \Sigma^{-1}_{11} \underline{F}(1)$ जबिर $\underline{F}(1)$ के K_2 सीर $\underline{F}(2)$ के K_2 सबरक है चौर $K_2 + K_2 = K$



चव नाथौं म प्राय यह समस्या सामा प्रानी है नि एक एवन या तुछ एनको का समूह निस्त समय म ग है। जसे धानस्यनिन (botan cal) प्रस्थतना म जानि (species) का निर्मय करने की समस्या प्रानी है। पारण प्रजनन (plant breed ng) मक्ष्यी समस्यापा म यह जानन की प्रमायका होनी है कि एक पान्य सनिन (plant progeny) उक्क उपत्र काल समस्य प्रमायक प्रयास समस्याएँ गामने प्राता है।

यपियांगत अवहार म ममया के विषय म जात नहीं होता है यथात इतक प्रावस क्षात नहीं होते हैं। किन्तु प्रत्यक समय से एक प्रतित्य सकर समय के विषय म जातकारों प्राप्त करारी लाती है। इस जातकारों का प्रयाग यह जातक के लिए क्या जाता है कि एन माय एक का का करा तथा एक माय कर की कि की माय कर है। इस जातकारों के प्रत्य पर है। इस माय कर माय कर है। किन्तु बहुवा दो साथ एक हुनरें से सनका सक्षात्र (अप) म जिस होत है। इस या प्रयक्त कर हारा हुछ सके ने मिलता है कि एक कि साथ है। भी जात कर होते हुछ सके ने मिलता है कि एक कि साथ होते हैं। भी जात कर का कि स्वार्थ कर होते हुछ सके ने मिलता है कि एक कि साथ को है जिससा कि एक को नियं साथ का है उसके मिलता है कि एक कि माय का मायन की जुटि म्यूनता हो। एस एक को विविक्त र पनत कर है है। विविक्त र पनत प्रतिक्रिय माय को माय को आप को कर एक कि स्वार्थ हो कि कि स्वार्थ के स्विक्त र पनत प्रतिक्रिय के साथ का अपने साथ हो कि कि साथ साथ है। विविक्त र पनत प्रतिक्रिय का स्वार्थ के साथ हो है अपनि कर हो कि स्वार्थ है। विविक्त र पनत प्रतिक्रिय का स्वार्थ हो कि स्वार्थ है। विविक्त र पनत प्रतिक्रिय के स्वार्थ हो कि स्वर्थ के स्वर्थ है। विविक्त र पनत कि साथ है। विविक्त र पनत का स्वर्थ कर ने साथ प्रतिक्र साथ साथ है। विविक्त स्वर्थ है। विविक्त स्वर्य है। विविक्त स्वर्थ है। विविक्त स्वर्थ है। विविक्त स्वर्थ है। विविक्त स्वर्य स्वर्थ है। विविक्त स्वर्थ है। विविक्त स्वर्य है। विविक्त स्वर्थ है। विविक्त स्वर्थ है। विविक्त स्वर्य है। विविक्त

है तथा साद प्रसाण σ^2 है तो सानक विज्ञान के पढ़ा सहन माहतों के बीचको हूरी का बार $\left(\frac{1-\mu_2}{\sigma}\right)^2$ न समान है। स्पाटत एक प्रक्षण X को समस्र π_1 का माना जायणा पाँद यह μ_1 के दिक्ट है धोर m_2 का साना जायणा पाँद यह μ_2 के निकट है। किन्तु क्याँकरण करन म पूर्ट को सामावना कम होगी याँ $\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma}\right)^2$ कुछ हा बसाबि दम स्पादित म द्वा प्रमामान्य वक्त एक दूसर स पर्योग्त दूरी पर हान। एक विचारों के स्थित म पूर्टियुक्त क्योंकरण की समावना साधिक हान। के क्षत एक कर का साधार पर क्षांकर क्योंकरण का पर्योग्त का प्रयोग का प्रमान कि साधान स्थापन का प्रमान की समावना साधिक हान। के क्षत एक कर का साधार पर क्षांकरण की समावना की किन्त की कर की साधान साधिक होता साधान साधिक होता की साधान साधान साधिक होता की साधान साधिक होता साधान
मन्दो एक चर समझ (प्रशासास्य) अ_व च अ_व है जिनके सास्य क्सका म_ा भीर म_व

K-दर (X, X, X, ,,,,,,X,) प्रमामान्य समग्रो की स्थिति मे प्रा० रिशर ने सुमाया

दि इन K-सलक्षों का एक ऐसा रैनिक पत्नन ज्ञान किया जाना चाहिये जिसके लिए $\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma}\right)^2$ पश्चितनम हो भीर वर्गीकरण इन इच्ट्रतम रैलिक समोजन (Optimum linear combination) पर भाषारित होना चाहिये । इस प्रकार पत्नन $\underline{\sigma}' X$ तैवर X

Innear combination) पर प्रापारित होना चाहिय। इस प्रवार पलन α' Χ तेहर १८-विमीय वर्गीवर्ष प्रक्रिया को एक विभीय प्रविद्या से परिवर्तन वर दिया जाना है। इप्टरेश पलात α' X वा इस प्रवार रिया जाना है कि जिसके लिए α के सबध से हूरी का वर्ग,

$$\left(\frac{\pi_1}{n}\frac{\alpha'}{n}\frac{X}{n}$$
 हा साध्य $-\frac{\pi_2}{n}\frac{\alpha'}{n}\frac{X}{n}$ हा साध्य $-\frac{\pi_2}{n}$ $\frac{1}{n}$ $\frac{1}{n$

मधिकतम है।

माना वि' K चरो X₁, X₂ X₃ ...X_k ना रैलिक फलन 'Z निस्त है —

$$Z = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + + \alpha_k X_k$$
 (19.2)

फलन (19.2) मे गुणाको α_1 , α_2 , α_3 , \dots , α_k का इस प्रकार चयन किया जाना है कि रैनिक फलन द्वारा दो समग्रो स मधिकतम कियेद प्राप्त हो। यह । उसके लिए प्रक्रिय (19.1) दिया गया है।

फतन,
$$(a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + + a_k X_k)$$
 रा प्रसरण
$$= \sum_i \sum_j \sigma_{ij} a_i a_j(193)$$

$$i, j = 1, 2, 3, K$$

है भीर दो समग्रो के लिए इस फलन के माध्य मानो ये बन्तर का वर्ग,

$$(\alpha_1 \delta_1 + \alpha_2 \delta_2 + \dots + \alpha_k \delta_k)^2$$
(19.4)

है जब कि बहुंचर समग्र प्रसामान्य बटित हैं जिन दोनों का विसेरण प्राप्यूह (ϵ_0) हैं स्रीर माध्यों में सन्तर $\delta_1=(\mu_1,-\mu_2)$ के हैं 1

माना कि प्रतिदर्श साध्यों से सन्तर $(\overline{X}_{21} - \overline{X}_{21}) = d_1$ घीर चरो $X_i \in X_j$ में दोनी प्रतिदर्शों के लिए विशेषण प्राप्यह (S_2) है।

जहाँ,

$$\begin{split} \mathbf{S}_{i} &= \frac{1}{n_{1} + n_{2} - 2} \left\{ \sum_{l=1}^{n_{1}} \left(\mathbf{X}_{1i} - \overline{\mathbf{X}_{1l}} \right) \left(\mathbf{X}_{1i} - \overline{\mathbf{X}_{1l}} \right) \\ &+ \sum_{u=1}^{n_{2}} \left(\mathbf{X}_{2v} - \overline{\mathbf{X}_{2l}} \right) \left(\mathbf{X}_{2v} - \overline{\mathbf{\lambda}_{2l}} \right) \right\} \quad (19.5) \end{split}$$

उपर्युक्त वर्षन में \mathcal{E}_{i} का बाक्त कर्ष, भीर σ_{ij} का धाकत क S_{ij} है। विविक्त कर प्रभन Z के लिए सम्बा

$$Q = \frac{\left(\sum_{i} \alpha_{i} d_{i}\right)^{2}}{\sum_{i} \sum_{\alpha_{i}} \alpha_{i} S_{\alpha_{i}}} \dots (19.6)$$

को पश्चित्रतम करना होता है।

सप्राज-मुनक ' λ ' का प्रयोग करने सम्या Q का यिष्ठतम क्या आता है। इस विधि के प्रानर्गन सम्या $(\Sigma \Sigma a_i \ o_i \ d_i \ d_i - \lambda \ \Sigma \subseteq a_i \ o_i \ S_i)$ का $o_i \ (j=1,2,3,...K)$

ने सदय में ग्राधिक प्रवेशन करते भूग्य के मनान त्यन पर छोर सन्धा (a_1 d_1+ a_2 d_2+a_3 $d_2+\ldots+a_k$ d_k)/ λ को 1 मान सेन पर निज्न समीकरण प्राप्त होने हैं -

इन समीवरणों को हत करने छ, (j == 1, 2, 3, ...K) के धार्यालय मान ज्ञान हा बाते हैं। इन समीवरणों को उत्ती प्रकार हन कर सकते हैं जैसे कि सप्याद 13 से बहु समाध्यक्य रेखा की स्थिति में सामिक समाध्यम गुणाकों का ज्ञान करने के तिए हैन किया समा है।

माना हि याच्युह (Sa) का प्रतिसोग बाध्युह (S1) है ता

$$a_1 = S^a d_1 + S^a d_2 + ... + S^a d_k$$
 (..., 19.8)
 $a_1 = 1, 2, 3, ... K$

धारमित o_1 , o_2 , o_3 ,..., o_4 का समीवरण (19.2) म प्रतिस्वादन करन पर विकित्तर रुपन Z जान हो जाना है। मित्र करा $X_1, X_2, X_3,...X_k$ ने माध्य समान हो धोर पूनरे विविक्तपर मान (discriminating value) गयान हो तो $X_1, X_2, X_3,...X_k$ भार o_1 , o_2 , o_3 ,..., o_4 , स्थान होने है धीर दम स्थिति ने विविक्तपर रुपन,

$$Z=X_1+X_2+X_3+....+X_k$$
(1991

होता है। दिन्तुं, क्रियान्यक हरिद से ऐसी स्थिति बहुत कम पाई आती है क्योंकि कुछ करा को विदित्तकर सक्ति प्राधिक धीर कुछ की कम होता है। यत करा को तरहुकार आर्थित करता प्रावस्वक हा काता है। बात्रक में विदित्तकर कात वा विश्वय बहुकर किनेत्वन काम है धीर इसके प्रमानित हम दो या दो ने प्राधिक करों ने मुंदरत विकरण का प्रमान करते हैं। परिकल्पना H_0 : सब चरों के लिए समग्र माध्यों से ग्रन्तर शून्य है, की H_1 : कम से कम किन्ही दो समग्र माध्यों में ग्रन्तर शून्य नहीं है, के विरुद्ध परीक्षा महालानवीस (Mabalanobis) D^2 की सहायता से कर सकते हैं। महालानवीस D^2 के लिए गणितीय सुत्र निम्न हैं:—

$$D_k^2 = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} S^i d_i d_j$$
(19.10)

$$= a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 + \dots + a_k d_k \qquad \dots (19.10.1)$$

जहां D² का सनुष्यक्त K यह प्रदक्षित करता है कि सब्ययन में K चरी को लिया गया है।

परिकल्पनाः H_0 की F-परीक्षा निम्न प्रकार की जाती है \cdot — यहाँ प्रतिदर्शेज.

$$F = \frac{n_1 \ n_1 \ (n_1 + n_2 - K - 1)}{K \ (n_1 + n_2) \ (n_1 + n_2 - 2)} D_1^2 \qquad (19.11)$$

.

प्रतिवर्शन F की स्थ० को० K और (n_1+n_2-k-1) होती है। परिवर्शित F की a सा० स्त० व K और (n_1+n_2-k-1) स्व० को० ने लिए सारणीबर्क F ये तुलना करके H_0 के विषय में नियम सनुसार निर्णय कर निया जाना है।

लक्षणों की संस्था बढ़ाने पर परीक्षा

यदि लक्षणों (चरो) की संस्था बढाकर m कर दो गई हो तो परिकल्पना H_0 कि (m-k) लक्षणों हारा और मधिक विविक्तकर-ग्रांक नहीं बढ़ी है, की परीक्षा, F-परीक्षा हारा को जाती है जबकि प्रतिदर्शन.

$$F = \frac{n_1 \, n_2 \, (n_1 + n_2 - m - 1)}{(m - k) \, \{(n_1 + n_2) \, (n_1 + n_3 - 2) + n_1 \, n_2 \, D_k^2\}} \, (D_m^2 - D_k^2) \, \dots (19.12)$$

है। यहाँ िको स्व॰ को॰ (m-k) ग्रीर (n_1+n_2-m-1) है। यरिकेनित F को सारणीबद्ध F से तुलना करके H_0 के विषय में निर्णय कर तिया जाता है यदि H_0 को स्वीकार कर तिया जाता है तो इसका यनिप्राय. है कि (m-k) चरों के बढाने पर विविक्तकर प्रक्ति में कोई वृद्धि नहीं हुई है। H_0 को श्रस्त्वीकार कर देने की स्थिति में विपरीत निर्णय तिया जाता है।

दिल्क $-\Lambda$ निकव द्वारा श्रमकों समग्रों के माध्य मानों में झन्तर को परीक्षा

परिकल्पना H₀ धनेको समग्रो के लिए समस्त करो (सहायो) के साध्य माना पे मन्तर भूत्य के समान है की परीक्षा बिल्क-A निक्य के भ्राधार पर निम्न प्रशार की जाती है:-

माना कि p-समग्री में से कमब. परिमाण n₁, n₂, n₃,...n_p के p प्रतिदर्श लिये गर्य हे ग्रीर प्रत्येक प्रनिदर्श द्वारा K लक्षणों का यध्ययन किया गया है।

माना कि कि प्रनिदश ने लिए K नक्षणा व माध्य त्रमध 📆 🔀 🔀 प्रोर वर्गो तमागुणनाका योग S_{h ।} िञाकि (n_h I) स्व∘का॰ पर घोधारित है जही

$$h=123$$
 p
माना कि $\Sigma n_h=n$ तथा \overline{X}_1 \overline{X}_2 \overline{X}_3 \overline{X}_3

मद्र प्रतिदर्शों को सम्मिलित करने पर थाध्य है भार 5, चरा X व X, क बर्गों नधा गुणना कंग्रोग का ब्रद्धित करत है। अनिदर्जी के बीच गुणना का योग

$$B_d = \sum_{h=1}^{p} n_h \overline{X_M} \overline{X_{h_j}} - n X_i \overline{X_j}$$
 (1913)

या

$$B_j = \sum_{h=1}^{p} \frac{T_h \times T_{hj}}{\eta_h} - \frac{T_i \times T_j}{n}$$
 (19 13 1)

अक्र कि Thi Thi क्षमश विज्ञातिदश म पर Xiव पर Xi स्वाग है गार T क Ti प्रतिदर्शों का सम्मितित करन पर करा \lambda व X₁ क याग 🔭 ।

प्रतिदशों के चादर गुणना का याग

$$W_1 = S_1 - B_0$$
 (1914)

$$= \sum_{h=1}^{p} S_{h_1}$$
 (19141)

विल्ल ∧ - निकथ क सनुसार

$$A = \frac{1 \text{ W}}{1 \text{ W} + \text{B} 1} \tag{19.15}$$

जह कि | W | बीर | W+B) अमन विकास बास्ट्राट (Wa) बीर (Wa+ Bil) के सारणिक है।

wife
$$m = n - \frac{k+q+1}{2} \quad q = (k-1)$$

$$\lambda = \frac{K \times q - 2}{4}, \quad s = \sqrt{\frac{k^2q^2 - 4}{k^2 + q^2 - 4}}$$
 $r = Kq/2$

तो,
$$\chi^2_{K(p-1)} = -m \log_{e^{\frac{\pi}{4}}}$$
 (1916)

=
$$- \text{m log}_{\bullet} \Lambda \log_{\bullet} 10$$
(19,16.1)
= $- (2.3026) \text{m log}_{10} \Lambda$ (19,16.2)

= - (2°3026) m log₂₀ A (19.

परिकल्पना H_0 को परीक्षा बिल्क $-\Lambda$ की सहायना से F परीक्षा द्वारा भी की जा सकती है जबकि प्रतिदर्शन,

$$F_{\{2r, \{ms-2\lambda\}\}} = \frac{ms-2\lambda}{2r} \frac{1-\Lambda^{1/s}}{\Lambda^{1/s}} \dots (19.17)$$

पूर्व निर्मारित साक स्त्रक व प्रतिदर्शन F को स्वक को के लिए प्राप्त सारणीवढ मान को F के परिकत्तित मान से तुलना करके नियमानुभार H_0 वे विषय में निर्णय से लिया जाता है।

उदाहरण 19.1 . एक प्रजाती-परोक्षण (varietal test) में ली गई तिल (sesamum) की दो प्रजातियों के तीन लक्षणों के प्रति घष्ट्ययन किया गया है। प्रयोग में प्रायेक प्रजाति के प्रत्येक लक्षण के लिए तीन मेक्षण लिये गये जो कि निम्न प्रकार थे:—

মন্যবি	য়ৰি গ	रीधो की उप	ৰ (ঘান)		रीडे में सम teles) की	-	থবি	গীর দ	লাকাণ
		(X ₁)			(X_2)			(X ₂)
	R_1	R_2	R_3	R_1	R ₂	R_3	R_1	R ₂	R ₃
v	4.965	5.967	5-444	29.6	32.0	29.6	5.4	4.8	5.0
V_{\pm}	4.953	5.075	6.262	36.8	34-2	41-2	5 6	5.6	4.4

इन दो प्रजातियों के लिए विवक्तकर फलन.

$$Z=\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+\alpha_3 X_3$$

का समजन,

- (2) दोनों प्रजातियों में दूरी महालानदील D2,
- (3) परिकल्पना H₀ दो प्रजातियों के सक्षणों के माध्यों में चन्तर शूच्य के समान है, की एन साथ परीक्षा, निम्न प्रकार कर सकते हैं.

सूत्र (19.5) का त्रयोग करके संस्थाधी S, का परिकलन किया।

$$S_{11} = \frac{1}{(3+3-2)} \left\{ (4.965^2 + 5.967^2 + 5.444^2) - \frac{(16.476)^2}{3} + (4.953^2 + 5.075^2 + 6.565^2) - \frac{(16.593)^2}{3} \right\}$$

$$S_{12} = \frac{1}{(3+3-2)} \left\{ \{4.965 \times 26.6 + 5.967 \times 32.0 + 5.444 \times 29.6\} - \frac{\{16.476\}\{88.20\}}{3} + \{4.953 \times 36.8 + 5.075 \times 34.2 + 6.565 \times 41.2\} - \frac{(16.593)(112.20)}{3} \right\}$$

=2.1140

इसी प्रकार,

$$S_{23} = 9 9200$$
, $S_{23} = -1 5500$ $S_{13} = -0.3867$, $S_{23} = 0.2867$
With X_1 , X_2 of X_3 of X_4 of first states,

	X 1	\overline{X}_{t}	\overline{X}_3
v ₁	5.492	29.400	5.067
$\mathbf{v_s}$	5-531	37-400	5-200
$V_2 - V_1 = d$	0 039	8 000	0 133

मर मास्पूह $\{S_i\}$ को निवकर, इतका प्रनियोग सास्पूह $\{S^{ij}\}$ कीतकीय समान (Pavotal condensation) विधि द्वारा ज्ञान किया । (इस विधि वन वर्णन परिकिय्द-क में दिया गया है।)

	(S_{ij})			Ī	
0.5293	2.1140	- 0.3867] 1	0	Ö
2.1140	9.9200	- 1.5500	ů	1	D
- 0 3867	-1:5500	0.2867	- 6	0	1
1	3.993954	- 0.730587	1.889387	a	0
0	1-476782	~ 0·0055440	- 3*3993952	1	D
U	- 0 005538	0 004183	0 730587	8	1
	1	- 0 003751	- 2.704496	0.677148	0
	0	0.004163	0 715610	0 003750	1

ı

1	3.993954	- 0 730587	1-889287	0	a
0	1	~ 0.003751	- 2.704496	0.677148	O
0	0	1	171 897669	0 900792	240-211386
ı	0	- 0.715606	12-690919 -	- 2.704497	0
ō	1	0	- 2.059708	0.680526	0 901032
ū	D	1	171-898669	0.900792	240-211384
1	0	0	135-701920 -	- 2-059885	171-897669
0	1	0	- 2.059708	0.680526	0.901032
ø	0	í	171-897669	0.900792	240-211384
	I		(2	54)	

सूत्र (19.8) की सहायता से,

$$a_1 = S^{11} d_1 + S^{13} d_2 + S^{13} d_3$$

इसी प्रकार,

मीर a₃=45.8584

विविक्तकर फलन,

Z=11.6757 X1+5.4837 X2+45.8584 X3 8 1

(2) महालानवीस D² सूत्र (19.10.1) के ग्रनुसार निस्न है:---

 $D_3^2 = a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3$

=50.4241

परिकल्पना H₈ की परोक्षा के लिए (19.11) के प्रमुखार प्रतिदर्शन

$$F = \frac{3 \times 3(3+3-3-1)}{3(3+3)(3+3-2)} D_{3}^{2}$$

सारणी (परि० प-52) द्वारा a = 0.5 और रव० रो० 3 और 2 पर F ना मान 19.16 है जो कि से दे परिथितन बान से ब्रिवर है बन H_0 को क्वीपार कर लिया जाता है।

उदाहरण 192 वर्ष, उदाहरण (191) में तीन नदाणों के प्रतिरिक्त एवं कर X_4 को धौर निया जाय ने परिकल्पना Y_6 चीचे नदाल को कहाने में विकित्तर जिल्ल प्रति है, की परीक्षा जिल्ल प्रकार ने कर नान्ते हैं —

पार सक्षणो X_1, X_2, X_3, X_4 वर दिवे गये प्रेराण 3 कुनरावृत्तियो के प्रमुतार निम्न हैं। इनने योग तथा प्राध्य पादि भी निम्न सारणी में दिसाये वये हैं:—

•			-	
नदाग	স্বাদিবট	V ₁	V _a	
	R ₁	4 965	4 953	
X_1	R ₃	5 967	5.075	
	Ra	5 544	6.565	
	भीग	16.476	16.593	
	भाष्य	5-492	5.531	
	R_1	26 6	36 8	
X ₂	R ₂	32.0	34.2	
=	R ₂	29 6	41-2	
	बोग	88-20	112-20	
	माध्य	29-400	37-400	
	R ₂	5-4	5.6	
X _a	Ra	4.8	5.6	
	R_3	50	44	
	योग	152	156	
	महस्य	5 066	5 200	
	\mathbb{R}_{1}	71.2	58 4	
$\mathbf{x_i}$	R_g	69 2	57 0	
-	R ₁	71-6	59-4	
	योग	2120	1748	
	माध्य	70 666	58 265	

विभिन्न चरो के लिए माध्यों के धन्तर (V2 - V1) के प्रनुसार,

$$d_1 = 0.039$$
, $d_2 = 8.000$, $d_3 = 0.133$, $d_4 = -12.40$
सूत्र (19.5) के धतुशार मध्यायो S_q को परिकलित किया जहाँ 1, $j = 1, 2, 3, 4$
 $S_{11} = 0.5293$, $S_{12} = 2.1140$, $S_{13} = -0.3867$
 $S_{14} = 0.3448$, $S_{22} = 9.9200$, $S_{23} = -1.5500$
 $S_{24} = 0.7900$, $S_{33} = 0.2867$, $S_{34} = -0.2133$

S₄₄ = 1·5533 ग्रतः विशेषण ग्राब्युह निम्न हैः—

माम्यूह (S_0) का कीलकीय समयन या महिस्ट डूसिटिल विधि (abbreviated Doollittle method) डारा प्रतिकोम म्राय्यूह (S^0) शांत किया जो कि निम्न प्रकार है। इन विधियों का वर्णन परिकिट्ट-क में दिया गया है।

सूत्र (19 5) की सहायना से α_1 , α_2 , α_3 , α_4 ज्ञान निये,

इसी प्रकार,

$$\alpha_2 = 0.3302$$
, $\alpha_3 = 169.4065$, $\alpha_4 = -14.1280$
 $D^2_4 = \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \alpha_3 d_3 + \alpha_3 d_4$
 $= 205.4971$

सूत्र (1912) ने धनुमार

$$F = \frac{3 \times 3(3 + 3 - 4 - 1)}{(4 - 3)(3 + 3)(3 + 3 - 2) + 3 \times 3 \times 504241} (2054971 - 504241)$$

$$=\frac{9}{24+4538169}\times1550730$$

e= 2 92

सारणी (परि० प -52) द्वारा $\alpha = 05$ तथा 1 घौर 1 स्व० को० पर F का मान 161 4 है जा कि परिवलित F के मान से खिल है। यत परिवल्पना H_0 कि चौथे लग्ग X_4 को सेने पर विविक्तकर शक्ति नहीं बड़ी है को स्वीवार कर सिया जाता है।

नवार प्रशास प्राप्त कर विश्व कर विश्व कर कर कर कर कर है कि जाने के लिए प्रयोग दिया नया भौर तीन सक्यों के प्रति प्रयान किये गये। यजिकस्पना य उ पुत्रसङ्ग्तियाँ सी गई। येलस्प निम्न सारणी के सनुसार प्राप्त हेए

	सदाण		লমানিবা		यीष
		V ₁	V _e	V _B	
	R ₁	4 965	4 953	6 056	
X_1	Rg	\$ 967	5 075	6 022	
	R_3	5 544	6 565	6 967	
	वोग	16 476	16 593	19 045	52 114
	माध्य	5 492	5 531	6 348	
	R ₁	26 6	36 8	32 D	
X ₃	R_{g}	32 0	34 2	352	
	Rg	29 6	41 2	32 0	
	योग	88 20	112 20	99 20	299 60
	साध्य	29 400	37 400	33 066	
	R ₁	5 4	5 6	16	
X,	R ₂	4 8	56	10	
	R,	5 0	4 4	1.4	
	योग	15.2	15 M	4 0	14 8
	मध्य	5 066	< 200	1 333	

परिकट्यना H_{θ} : इन तीनो प्रजातियों में तिये गये। सक्षपों के प्रनुमार, प्रन्तर नहीं है, की परोक्षा विल्क $-\Lambda$ निक्ष द्वारा निक्त प्रकार कर सकते हैं।

यहाँ चरो X_1 व X_1 के बगों तथा गुलनों ने योग S_4 निस्त्र प्रवार ज्ञात विये गये हैं:- $S_{11} = \left(4.965^2 + 5.967^2 + 5.544^2\right) + \left(4.953^2 + 5.075^2 + 6.565^2\right) + \left(6.056^2 + 6.022^2 + 6.967^2\right) - \frac{\left(52.114\right)^2}{9}$

=4.094797

चौर S₁₂=(4.965×26.6+5.967×32.0+....+6.022×35.2

$$+6.967 \times 32.0$$
 - $\frac{(52.114)(299.60)}{9}$

= 7.322045

इसी प्रकार,

 $S_{22} = 142.728889$, $S_{23} = 30.240000$

wit $S_{13} = -7.836266$, $S_{23} = -3.1333333$

सूत्र (19.13.1) की सहायता से,

$$B_{11} = \frac{1}{3} \left\{ (16.475)^2 + (16.593)^2 + (18.045)^2 \right\} - \frac{(52.114)^2}{9}$$
$$= 1.402862$$

मोर B₁₂=1/3 {(16 475)(88-2)+(16-593)(112-20)

- 0 089889

इसी प्रकार,

B₂₂ = 96·222222, B₃₃=28·906666

मौर B₁₃= ~ 6 352133, B₂₅= 4·1333333

मूत्र (19.14) नी महायता से सार्याकः $\|W+B\|$ को तिसकर इसका मात्र क्षात्र कर लिया। यह जात है कि $S_a=W_0+B_0$.

$$W_{ij} = S_{ij} - B_{i}$$

$$W_{2i} = S_{2i} - B_{2i}$$

$$= 4.094797 - 1 402862$$

$$= 2 691935$$

इसी प्रकार

सार्णिक | 77 | का बाद भी जात किया जो कि निस्द है —

$$A = \frac{8962041}{7607212585}$$
=0.001178

मूत्र (19.162) के चतुसार,

$$\chi^2 = -(2\ 3026) \times 5 \times \log_{10}(0\ 001178) - (2\ 3026) \times 5 \times (2\ 928855)$$

= 33 7198

 χ^{3} el eq e el = 3 × (3 - 1) = 6

a = 05 व 6 न्य॰ की॰ पर χ^2 का सारणीयक मान 12 59 है जो कि परिस्कित भान से बस है धन परिवास्थना H_0 सस्वीकृत है। इनका समित्राय है कि विकासधीत सक्षमा के प्राचार पर दन जनातिया ने सार्थक सन्तर है।

H_वकी F-क्सीना, प्रतिवर्णक (1917) वे खतुमार निघ्न बवार कर सकते हैं ~ इस उदाहरण के लिए.

$$m = 9 - \frac{3+2+1}{2} = 6$$
, $q = (3-1) = 2$
 $\lambda = \frac{3\times 2 - 2}{4} = 1$, $s = \sqrt{\frac{9\times 4 - 4}{9+4-5}} = 2$
 $f = \frac{3\times 2}{2} = 3$

$$F = \frac{6 \times 2 - 2 \times 1}{2 \times 3} \times \frac{1 - (0.001178)^{\frac{1}{3}}}{(0.001178)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{10}{6} \times \frac{0.965678}{0.034322} = \frac{9.65678}{0.205932}$$

$$= 46.88$$

सारणी (परि० य-52) हारा $\alpha=01$ तथा 6 चौर 10 स्व० की σ पर F का मान 5:39 है । F का परिकासन सान सारणीयद्ध मान से चित्रक है धन परिकासना H_0 को सम्बोकार कर दिया । धन यह कह मकते हैं कि प्रजातियों म मार्थक प्रस्तर है ।

चपर्युक्त वराहरणो का न्यान कृषि महाविद्यालय उदयपुर के एक छात थी इस्काल हुमैन के सीमन्य से प्राप्त हवा ।

प्रश्नावली

- विवेचक पलन वा उपयोग विन म्चितियों में उपयुक्त है स्पष्ट कीजिये।
- मक्वा की प्रजातियों में विभेद जानने के हेतु एक परीक्षण किया गया¹। निम्न सारणी में ग्यास पांच प्रजातियों तथा पांच सक्ष्मों के प्रति दिया गया है। प्रत्येक प्रजाति के लिए चार पुनरावृत्तियों का प्रयोग किया गया।

प्रमा	ति मंख्या	उपन	प्रति पौडे में	प्रति मुद्दो में	100 दानों का	पीपे की ऊँबाई
		रकीन्टल प्रति हैस्टर	बानिया की सम्मा	दानों की संक्या	शर (शम में)	(सं गी)
_		(X ₁)	(X ₂)	(X3)	(X ₄)	(X ₅)
	R ₁	11 43	0 850	3416	11 73	195 65
ì	R_2	17 35	0 666	434-8	16 93	205.71
	R_3	19 14	0 909	382.8	16 13	211.40
	R_4	22 17	0 863	438 6	16 66	225 91
2	R_1	15 39	1 000	270 2	16 20	155.32
	R_2	16.98	0.904	3210	17-70	187.52
	R_3	9-39	0.695	230 0	16.12	137.82
	R_4	13 80	0 826	318-2	14.70	171.26
3	R_1	9 79	0.590	245.0	17-12	236.45
	R_2	8 02	0 541	298-0	13 56	208 79
	R_3	8-40	0 700	255 5	19 97	211-55
	R_4	7-73	0-545	256 0	16-35	201-50

इस प्रश्न का न्यास थी योगेन्द्र नुवार गुप्ता, राज⊕ कृषि महाविद्यालय, उदयपुर के मौप्रत्य से प्राप्त हुआ।

4	R,	24 88	0-956	423°6	17-40	232-91
	R ₂	20-90	1.000	373 0	1514	217-87
	Ra	22-17	0.952	425*4	16 81	234.00
	R.	24 07	0-950	435 6	17-76	217.90
5	R ₁	26.47	0-875	'29'6	19 38	255-58
	R _a	12 52	0 782	211.4	20-76	201-47
	Ra	10 04	0-826	227-6	15 46	202-47
	R ₄	10 01	189.0	251 4	17-32	220 07

उपर्युक्त श्याम ने लिए (१) प्रवानि । व 2 मे विवेषक पनन $Z=a_1X_1+a_2X_2+a_2X_3+a_4X_4+a_5X_5$ ज्ञान की विवे ।

⁽m) विभिन्न प्रजातियों में मनार्तायता की विस्त-A डीस परीक्षा कीजिए।



485

^(॥) विमिन्न प्रजातियों में दूरियों D° क्षान शीजिये और उनशी सार्थश्ता की परीशा वीजिय।

मनेक जैब प्रध्ययों में विभिन्त रसायिनक योगिको का कीटो पर विर्यसापन झात किया जाता है। इसके लिए प्रयोगों में या तो मिन्त-योगिकों को लिया जाता है या एक ही योगिक की विभिन्न सान्द्रताओं या भाजाओं को प्रयुक्त किया जाना है। इन प्रयोगों में मं जीवित कीटो की गणना प्रत्येक प्रायोगिक यूनिट (Experimental unit) पर टाक्सिन (Toxin) प्रयुक्त करने से पूर्व व पक्ष्यात् कर ली जाती है। माना कि टाक्सिन प्रयुक्त करने से पूर्व एक प्रायोगिक एकक में 8 कीट थे और टाक्सिन के कारणा कीट सर गये। सत

ग्रमुपान $\frac{r}{n}$ या $\frac{r}{n} imes 100$ प्रतिकृत कोट उस योगिक के शहण मरे। कीटा देसरन

की सस्या टाविसन के विवेसेपन एव साइता पर विभेर करती है।

उपर्युक्त बर्गन से स्पष्ट है कि हमे इस प्रकार के प्रयोगों मे दो बरो से सम्बन्ध रहना है, एक तो यौगिक के पोल की साइता या मात्रा से घोर दूसरा भून कोटो की प्रितंत्रत सख्या से । यह पिद्ध किया जा चुका है कि इन दोनों बरों म म रिसी एक का भी बटन प्रसामान्य नहीं है। घनः साइता को समुग्राक साइना म घार प्रनिशत मृतको को मत्या को प्रोविट में क्यान्तरित कर दिया जाता है।

किसी टास्सिन की वह माजा या साइता, जिसके कम प्रमुक्त करन पर इसका कोई प्रभाव नहीं होता है। किन्तु इससे प्रक्षित माजा को प्रयुक्त करने पर इसका प्रभाव स्थप्ट प्रतीत होता हो, सहिष्णुता (tolerance) कहताती है। नहिष्णुता को प्राय ४ द्वारा मुस्कि विचा जाना है। ४ को डी॰ के॰ किने (D J. Funncy) ने साइता है कहा और प्रतिबद विचलपण में साइता के तसुमाफ को ही किया जाना है। ४ का लयुनाक कपानतरण करने पर क्यान्तरिक कर ४ (मान निया) का बदन प्रसायान्य हो जाता है वही

पर X का बाताओं णां (Dosage) कहते हैं। किसी विशेष स्थित म कोई मन्य क्यान्तरण उपित ही सकता है किन्नु साधारमतः संयुग्नक रूपान्तरण ही उपयुक्त है। स्पटत λ का परास 0 से ∞ है किन्तु $10S_{10}$ λ =X का परास $-\infty$ से ∞ हो जाता है जो कि पX का बटन प्रसामान्य होने के सिए एक प्रतिबन्ध है।

यदि λ का प्रायिकता यनस्य फसन I(λ) है तो मुत कोटो का सनुपात जो कि टारिनन की सोदता को λ से λ-|-dλ तक बढ़ाने से प्राप्त होता है, माना dP है। यत

किही भीव-हरूपा को एक रसायनिक यौगिक की मात्रा A₁, जो कि मॉहरणुना ने प्रीप्रक हैं देने पर मृत कीटो का घनुषात 'P' निम्न होता है :

$$P = \int_{0}^{\lambda_{1}} f(\lambda) d\lambda \qquad ...(203)$$

जो मात्रा 50% बोटो को मास्ती है उसे माध्य घातक मात्रा (median lethal dose) कहते हैं थीर इस LDS₀ द्वारा निरुपित करते हैं। यदि प्रयोग ऐसा है कि जीव मरते नहीं किन्तु इस पर केवल पदार्थ का प्रभाव देखा जाता है तो जो मात्रा 50% जोवो का प्रभावित करती हो, मध्यत्र प्रभावी मात्रा (median effective dose) कहताती है और इसे ED 50 द्वारा निर्मापन करते हैं। इसी प्रकार किनी सम्ब अनुगत के हेनु प्रमुक्त महेतन दिये जा सकत है जैसे 80% के लिए LD 80 या ED 80 ता 75% के लिए LD 75 या ED 75 द्वारा निर्मापन करते हैं। LD 50 या ED 50 जात करत का प्रभाव नारा वह है नि इस मात्रा का करत प्रतिकात मानो की अपेक्षा प्रधिक परिगृद्ध मात्रा का करत प्रतिकात मानो की अपेक्षा प्रधिक परिगृद्ध मात्रा सन सात्रा है।

महिष्णुनानानोई भी बटन हो, LD 50 या ED 50 के लिए मात्रा λ_0 निस्न समीक्षण द्वारा सात वर सकते है,

$$\int_{0}^{\lambda_0} f(\lambda) d\lambda = 0.5 \qquad(20.4)$$

स्पर्वहार में महित्तुता A का बटन फलन रि.A) जात करना प्रत्यक्षिक कटिन है । श्रृपुणक स्पानरण के परवान् कर ४ का बटन प्रतामान्य हा जाता है जिसके बनुकार,

$$dP = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x-\mu)^2 dx \right\} \qquad ... (20.5)$$

समीवरण (205) म » समय के लिए मध्यम सहित्युना या मध्यम प्रभाकी मात्रा श्रीणी है भ्रम

भीर a² इस बटन का प्रसरा है।

हो जेब विय के निए सामा LD 50 या ED 50 कात करने वाज से पूर्ण सामय मही जिस्तता है यदि देस की कियर के निए सहिए जात करने में इसरण इसरे जेव विय के निए करने के प्रसारण में यदिक हो स्वानं व² 2 जिल्हें हैं इसरण इसरे जेव विय के निए करने प्रसार में यदिक हो स्वानं व² 2 क व² 2 पहले व इसरे किय के निए करने प्रसार हो जाना है। ऐसे उद्दीय की नियंत्र से विदेश हैं प्रसार के निए मृत्यु सहसा से प्रशिक्त सन्तर हो जाना है। ऐसे उद्दीय की निवक्त के तरि रासर्पर्स के (pbysological) प्रभाव एक से हो प्रार्थन साथन स्वानं है ते प्रसार भी मिमप्रस साथन होते हैं त्यापि इनकी सायम पानक सामायों से स्वयोग सन्तर होता है। ऐसी स्वित स्वता प्रशिक सन्तर होता है। ऐसी स्वित स्वता प्रशिक सन्तर होता है। ऐसी स्वित स्वता प्रशिक सन्तर होता है। इसरे में कियन प्रशिक्त सन्तर होता है। इसरे स्वता प्रशिक्त सन्तर होता है।

क्रपर दिये हुए विवरण के धनुसार x=iog₁₀ λ के प्रावल λ धीर σ^2 का धागणन प्रमोग में प्राप्त मृतकों को सस्या के रूपान्तरित मान प्रॉविट घर निभंद है। इस रूपान्तरित को प्रॉविट शब्द सर्वप्रयम विलिस (Bliss) ने 1934 म दिया। इसमें पूर्व गाउुम (Gaddum) ने इनी मान को प्रसामान्य तुस्य विचल (normal equivalent deviate) का नाम दिया था। धनुषात P के प्रॉविट की परिजाया इस प्रकार कर सकते हैं।

यह प्रसामान्य बटन जिसना माध्य 5 घीर प्रभरण 1 है, म नृजा श्रेश (Abscissa) पर वह बिन्दु है कि खिसके बाई घोर का क्षेत्र सम्भाविता P के ममान 2 । P के नदतुर ने प्रॉबिट को Y में निरुपिन करते हैं घीर P तथा Y म मणितीय मध्यश्य निम्न हाना है

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{Y} \exp \left\{ -\frac{1}{8} (X-5)^{2} \right\} dx \qquad ...(207)$$

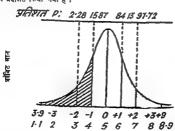
मामा कि X∽5≔धाता dx ≕du सौर ॥ की सीमाएँ अब X ≕ - ∞, υ≕ - ∞ X ≕ Y, υ≕ Y - 5

चत ॥ के पदो में X ना प्रतिस्थापन करन पर.

$$y - 5$$

 $P = \int \exp\{-\frac{1}{3}u^2 du\}$...(2071)

मनुपात P के समान क्षेत्र भीर प्रॉबिट Y में जबस को प्रसामान्य वक्र द्वारा [€]बन .(20-1) में प्रदक्षित किया गया है।



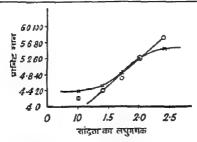
किम 20-1 प्रतिशत P और प्रांबिट Y में सबध का चित्रीय प्रदर्शन

जब प्रॉबिट Y का मान 8 9 होता है तो इसके बाई म्रोर का बक्त के नीचे ना क्षेत्र लगभग 1 होता है। इसी प्रकार जब Y=11 हो तो वाई म्रोर ना क्षेत्र लगभग पूर्य होता है। इसी प्रकार जब Y=11 हो तो वाई म्रोर ना क्षेत्र लगभग पूर्य होता है। धरा, प्रॉबिट Y बा भाग 1-1 से 8 9 तक विचर सबता है बंधीं मिं मृत्यु-मरवा 0 प्रतिशत से कम मीर 100 प्रतिशत से मधिव नहीं हो सकती है।

यदि समुगमक मंदिना घोर प्रनिधन मृतकों से बाद बलाये तो यह ∫ (एम) के रूप का एक वक होना है जिले मिगमाइड (Sigmoid) वक नक़त हैं। यदि प्रतिकत मृत्यु को प्रांबिट में रूपान्तरित कर वें ता बहु वक एक सरन रेसा से परिवर्गन होता है।

एक प्रयोग द्वारा एनद्रोन (Endrin) की योच सादवाबा पर प्राप्त प्रतियन मृत्यु सम्या घोर भागनरित सान निस्त सारणी से दिय गये हैं। सादता ने लघुगणक मानो घोर प्रतिजत मृत्यु भन्या का धानेतित करने नियमाइड वक घोर बांदना ने लघुगणक मानो घोर प्रतियत सृत्यु सद्या ने नद्युनार अधिट माना को धानेतिन करक द्वीदिट देशा का विष (20.2) से प्रदित्तित किया गया है ---

দারবা বিশীয়াথ সবি 1000 ঘৰ দ∻ (১)	log ₁₀ λ (X)	प्रतिवत्तं युग्तु संस्था (P)	प्रो ^ट स्ट साम (Y)
250	2 4	76-6	5.7
100	2 0	60 0	5 2
50	17	40 0	4 7
25	1 4	26 6	4 4
10	10	20 0	4.2



चित्र 20.2 सिन्माइड वक तथा गोविट रेगा सेवावित

यदि सबु॰ महिएनुता का बटन प्रमायान्य न हो तो प्रीविट बिन्दुमा का मानेन्य करन पर भी किन देखीय नहीं होना है। विश्व का देनीय न होना, कोटा के नमूह एकते न होने के कारण हो सकता है बना इस स्थिति ये विश्व प्रक्षीणे माहण होना है। प्रीयः एवी स्थिति में महिएनुता भे को सबुगनक स्थाननस्य स्थित नहीं होता है। कुछ फर्फूटनाधियों के सिए स्थान्तरण X⇒\ ने चयुक्त है जबकि । < 1 होता है किन्तु व्यवहार में सपुराणक घौर प्रॉबिट स्थान्तरण ही प्रयोग किये जाते हैं जब तक कि धनके प्रमुचित होने के बिगेष कारण जात न हो चुके हो ।

न्यास का प्रॉबिट विश्लेषण

स्पान्तरण के पश्यात् न्यास का सास्यिकीय विश्लेषण विया जाता है। इसका उद्देश्य LD 50 या ED 50 को सात करना, विभिन्न परिवन्तमा की परीक्षा करना या X पर प्रशिवर Y का समाध्यण जात करना हो। सक्या है। समाध्यण रेला का समजन करना प्रश्लात उपयोगी है क्योंकि इसकी सहायता से LD 50 या ED 50 या प्रस्य किसी भी प्रतिकात के तुत्य प्रश्लिवर के लिए साइता का व्यान्तित मान जात कर सकते हैं। इसके प्रतिकात के तुत्य प्रश्लिवर के लिए साइता का व्यान्तित मान जात कर सकते हैं। इसके प्रतिकात के तुत्य प्रश्लिवर के सिप साइता कि उपान होनी है। या विश्लिवर प्रतिकात की सामन होनी है। यदि रेला का बलान व्यक्ति होना है तो माना-अंगी में एक निष्टित प्रतिकात-पूत्रती के परास के लिए कम प्रनित्त होता है सन्यवा इनके विपरीत स्थित होती है। यदि प्रावित

समाश्रयण रेला का समीकरण Үँ≔ च † bर है तो रेलाका ढलान b के समान है। 'b' प्राविट मान म वह वृद्धि है जो कि प्रमे प्रति इकाई वृद्धि करने से उत्पन्न होनी है।

गणिनीय रूप से $b=rac{1}{s}$ है जहाँ s, x के मानक दिवलन $oldsymbol{s}$ का श्राकलक है।

प्रॉबिट समाश्रवण रेला का नेत्र समंजन

प्राविट समाअपण रेखा का समजन, साधारणन दो वरों में समाध्यण स भिन्न है । साधारण स्थिति में यह करूपना की यह है कि ज्वनन्त्र वर प्रके प्रत्येक मान के लिए माध्यत स्थाप हिमान रहता है कि जू यह करूपना प्राविट रेखा के समजन की विषयित में मध्य मही है। LD 50 पर प्राविट Y का प्रमरण ज्यूनतम भीर 0% या 100% मृतकों की स्थिति में प्रधिवत्तम (०० तक) होता है। भ्रतः प्राविट रेखा का प्रधाय रेखा का प्रधाय के प्रतिकों में प्रधिवत्तम (०० तक) होता है। भ्रतः प्राविट रेखा का प्रधाय समजन करने के लिए X के प्रत्येक महन की वर X के प्रस्था के प्रतिकों में भ्रारित करता होता है। मर्थित क कीटों के एक समूह पर किसी कीटनाशी को प्रयुक्त करने पर मृतक कीटों का भ्रायान महनता महिता है होता के प्रयुक्त करने पर मृतक कीटों का भ्रायान कामण (P+Q)क के क्षित्र पर दी होता सकती है, क्यों कि स्थरत कामण (P+Q)के के क्षित्र चेता है कीटों के मरी कि स्था का बटन दिवद बटन होता है और P+Q=1 है। मानारिक करने पर में कीट पर जाते हैं (प्रमाविन होती है) तो दिपद बटन के धनुसार प्रेतित प्रपुरात

 $\frac{r}{n}\!=\!P$ का प्रमरण, $\frac{PQ}{n}$ है। धन धनुपान P, n के प्रतिलोमानुपानी है। वह विदिन हो

कि प्रसरण के प्रनिसोम नाप्राय जानकारी को साक्षा (quantity of information) भी कहने हैं जो कि छ ने समानुषानी है। इस जानकारी नी सात्राको ही समूह पर प्रेक्षण के भार के रूप में लिया जाता है। भार जुणक,

$$w = \frac{Z^2}{PQ} \qquad ...(20 8)$$

होसा है ।

जबरि Z प्रायक्ता P के तदनुसार कोटि मान है। परिकलन नो मरल बनान क सिए बिसिस (Bliss) ने रेखा कर प्राविट मान Y के लिए नदनुसार भार गुणांक W के मानों को सारणीवद किया।

चर X दा भारित साध्य.

$$X = \frac{1 = 1}{k} - \dots (20,9)$$

$$X = \frac{1 = 1}{k} - \dots (20,9)$$

जहाँ 1=1, 2, 3, k

मूत्र (20,9) में कोटो के k बगे है और । वेदबंस कोटो वी सब्दात, है। w_i, W_i का सागणित सन है।

स्यबहार में प्राचलो, Z, P व Q व मान ताल वरना संयथन सतस्थव है छन इन्ह सालतित मान z, p, q कमत प्रयोग म नाय जाने हैं और इन्हीं व प्राधार गर w कं मान जात विषे जाते हैं।

माना कि सम्बस् घातक नात्रा m र प्रयानुका⇔LD 50 ना A का बात m आं

रता $\stackrel{\checkmark}{Y}_{r=k}$ + bx को सन्तुष्ट करना। b का मान प्रशेख किन्दुमा को दशक्त कर समिति रेसा द्वारा मान कर नकते हैं। इस सरकारी रेसा वर ये करम किन्दु नेकर (एक क्या और दूसरा बृहुत् मान का) उनके निर्देशक का से देशकर आन कर किये जाने है।

माना कि यह निर्देशांक (X_1, Y_2) भ्रोग (X_2, Y_2) है जानि देखा $\hat{Y} \Rightarrow 2 + b \lambda$ को सन्तर्द्ध करते है।

$$\begin{array}{c} \hat{Y}_1 = a + bX_1 \\ \text{wit} \quad \hat{Y}_2 = a + bX_2. \end{array} \right\} \qquad (20 10)$$

इत समोर एको को इस कॉर्नि वर,

$$b = \frac{Y_1 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

है। धीद विकारक समोकरण से bका परिकलित सान रणन पर बका सान नागही जाता है। समजित समीवरण में Y=5 रखने पर X का मान ज्ञात हो जाता है जो कि m के समान है मर्पात्

समाध्याय रक्षा का नेत्र समजन करने समय यह सावधानी बतैनी होनी है कि रेक्षा 40 से 60 प्रतिक्षत तक वे किन्दुयों में होकर जाय या ये किन्दु रेक्षा से निकटतम हा। चरम किन्दुसा की घोर कोई ध्यान नहीं दना चाहिय प्रथात वह रेक्षा से प्रधिक दूरी पर भी हो सकते हैं।

m की मानक बुटि,

$$s_m = \frac{1}{b\sqrt{\sum n_i w_i}} \qquad ...(20.12)$$

यदि m मीर X म मधिव सन्तर हातायह कम स्नागणन होना है सन m के प्रसरण का मधिक परिगुढ़ मान,

$$v(m) = \frac{1}{b^2} \left\{ \frac{1}{\sum_i n_i w_i} + \sum_i \frac{(m-X)^2}{n_i w_i (X_i - \overline{X})^2} \right\} \dots (20.13)$$

$$s_m = \sqrt{\widehat{v(m)}} \qquad ..., (20.14)$$

a प्रतिशत सा॰ स्त॰ पर m की विश्वास्यता सीमाएँ (Fiducial limits)1,

$$m \pm s_m t_g$$
 (2015)

青山

जहीं t_{α} , n सा॰ स्त॰ व (k-2) स्व॰ को॰ पर t का सारणीबढ मान है। b का प्रसरण,

$$v(b) \Rightarrow \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} n_i w_i (X_i - \overline{X})^2}$$
(2016)

$$v (b) = \frac{1}{\sum_{n, w, \pi^2}} \dots (20161)$$

जहां
$$\sum_{i} n_{i} w_{i} x_{i}^{2} = \sum_{i} n_{i} w_{i} X_{i}^{2} - \frac{\left(\sum_{i} n_{i} w_{i} X_{i}\right)^{2}}{\sum_{i} n_{i} w_{i}}$$

1 Fiducial limits, जा कि बा॰ किसर द्वारा मुझाई गई भी, confidence limits के बीवकाम परिस्थितियों में परिलामन जिन्न नहीं है तकारि कोओं से मीजिक क्षेत्र में के सेन्सर है। इसकी विश्वह स्थावना इस पुलान के क्शर के अनुनय नहीं है जब इसकी यहाँ उपमा कर दी गई है।

$$s_b = \sqrt{v(b)}$$
(20.17)

प्राप्त β मी (1 - α) 100 प्रतिशत विश्वास्थना मीमाएँ

$$b \pm s_b t_a$$
 ...(20.18)

हैं जहाँ b प्राचल β का ग्राक्सक है।

s_b का मान (20.16) के धनुसार है घोर ι वा मान α साक स्तक्य (k - 2)

स्व॰ को • के लिए सारणी द्वारा ज्ञात वर विया जाता है।

जपर्युक्त बर्णन में भार, प्रसरण शादि का परिकतन इस कलना पर झाधारिन है कि सन्देश बिन्दुसी भीर सवाधवण रेला पर तुस्य बिन्दुसी में विषमायता नहीं है। सत विक्षेत्रण से पूर्व विषमागता को x2-परीशा करना सावक्यक है। जबकि यहाँ प्रतिदर्शन,

$$x^{2} = \sum_{i} \frac{(r_{i} - nP_{i})^{2}}{r_{i} F_{i} Q_{i}} \dots (20.19)$$

$$(1 = 1, 2, 3, ..., k)$$

है। यह! । वं समूह मे प्रेबित मृत्यु-मन्त्रा s_1 है और प्रत्याधित अनुपात P_1 है। x^2 की स्व॰ को॰ (k-2) है।

यदि परिकत्तित x^2 का मान, पूर्व निर्धारित सा॰ स्त॰ α व $\{k-2\}$ स्व॰ को॰ के निए सारणीबद मान से प्रधिक हो तो विषयांगन। सार्पक सिद्ध होती है। इस स्पिति में भार, $x^2/(k-2)$ के समान प्रधित भारत होते हैं। सस्या $x^2/(k-2)$ को विषयांगता गुणक कहते हैं। प्रधित भारत होने के बारण उत्तप्त सर्ति पूर्ति करने के निए सभी प्रमाणी को सम्या $x^2/(k-2)$ से गुणा कर दिया जाना है।

माना कि विषयांगता गुणक 🕏 है, तो

$$\phi = \frac{\chi^2}{k-2}$$
 (20.20)

पत bका संशोधित प्रसरण.

$$v'(b) = \frac{\phi}{\frac{\pi}{3}(n_1 w, \tau_1^2)}$$
(20,21)

धौर

$$s'_b \Rightarrow \sqrt{v'(b)} \qquad ...(2022)$$

B की संगोधित विद्यास्त्रता सोमाएँ निम्न हैं *---

बराहरण 2011 एक बीटनाओं ट्रार्ट्सनोरणीन की विक्रिय माटलायी का कीट, केंद्र पापरिन बीटट (red pumplan beetle) पर प्रभाव बानने के हेनु प्रपेत निया गया। इस प्रयोग म प्रत्येक माइता के घोल को 30 कीटा पर प्रयुक्त किया गया जिमके परिणाम स्वरूप निम्न मौकडे प्राप्त हुए —

घोल की माइता (जिली ग्राम प्रति 100 घन सें∙)	मृत कीटो की सच्या	ন্নবিহার মৃন্যু নৰ্ম্যা
00	ū	0
7 5	4	13 33
10 0	7	23 33
25 0	13	43 33
50 0	20	66 66
75 0	25	83 33

(इस प्रयोग का पान डॉ॰ बी॰ एन॰ कांकडिया, उच्यपुर विश्वविद्यालय उदयपुर ने सीमन्य दे प्राप्त हुवा।)

(1) इस न्यास मे प्रॉबिट समाध्यण रेला Y=2+bX का नेत्र समजन तथा प्राचल β को 99 प्रतिगत विश्वास्थता सीमाएँ इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

पहते पोल की साइता के लघुगणक मान 'X' और प्रतिशत मृत्यु-संख्या के स्थान्यस्ति मान Y और P के विभिन्न मानों के सिए बार w, इनके लिए दी गई सार्राणयों (पि॰ प-13) व (परि॰ प-14) द्वारा जात किये, जो कि निम्न सारणी में दिये गये हैं —

log ₁₀ λ (X)	प्रॉविट गान (Y)	भार (w=Z²/pq)
0 8757	3 89	0 405
1 0000	4 27	0 532
1 3979	4 83	0 627
1 6990	5 43	0 601
1 8751	5 97	0 439

इस उदाहरण के प्रत्येक समूद मे कीटा की सस्या समान है जो कि 30 है मत प्रापेक \mathbf{n}_1 का मान 30 ही रखना होगा।

$$\sum_{i} n_{i} w_{i} = n \sum_{i} w_{i}$$
= 30 × 2 604
= 78 120

$$\sum_{i} n_{i} w_{i} X_{i} = r \sum_{i} w_{i} X_{i}$$

$$- 30(0.08757 \times 0.405 + 1.0000 \times 0.532 + 1.8751 \times 0.439)$$

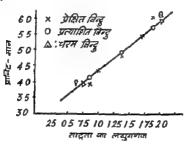
$$- 30 \times 3.6074$$

$$= 108.2220$$

सूत्र (20 9) की सहायता से

$$\overline{X} = \frac{108 \ 222}{78 \ 120} = 1 \ 3853$$

माना कि नव गमजित रेखा पर दो चरम मान P व Q है जैबा कि चित्र (20-3) में दिखामा गया है। बिन्दु P व Q के निर्देशोक जमज (75, 39) और (20, 585) है।



विष 20-3 नेत्र समंजिन प्रोंबिट समाध्यय रेमा

$$b = \frac{y_1 - y_1}{X_2 - X_1} = \frac{5.85 - 3.90}{2.0 - 0.75}$$
$$= \frac{1.95}{1.05} = 1.56$$

नमी ररण $\hat{Y_1}$ =a +b X_1 में X_1 Y_2 द b का मान रनने पर क्रजान हो जाता है। 39 ≈a + 1.56 \times 75

मत नेत्र समजित समाययण रेखा वा निम्न समीवरण प्राप्त हो जाता है।

LD 50 के लिए m का मान (2011) के अनुसार निम्त है -

$$5 = 2.73 + 1.56 \text{ m}$$

$$m = \frac{2.27}{1.56}$$

नेप्तावित्रीय विधि द्वारा प्रॉबिट समाध्यम रेखा की सहायता से LD 50 का मान 1 47 है जैसा कि चित्र से दिवाया गया है। यह सान प्रोविट Y = 5 के ददनुसार X का निर्देशाक है। सूत्र (2012) की सहायदा से 🙉 की मानक पुटि,

$$s_{m} = \frac{1}{156 \sqrt{7812}}$$

$$= \frac{1}{156 \times 8.84} = \frac{1}{13.79} = 0.0725 \frac{8}{6} = \frac{1}{1}$$

सूत्र (20,13) द्वारा m का स्रधिक परिशृद्ध प्रभरण,

$$v(m) = \frac{1}{(1.56)^2} \left\{ \frac{1}{.78 \cdot 12} + \frac{(1.457 - 1.385)^2}{8.331} \right\}$$

जबकि ध्यंजक

$$\sum_{i} n_{i} w_{i} (X_{i} - \overline{X})^{2} = 30 \sum_{i} W_{i} (X_{i} - 1.3853)^{2}$$

$$= 30 \{ 0.405 (0.8757 - 1.3853)^{2} + \dots + 0.439 \{ 1.875 - 1.3853 \}^{2} \}$$

$$= 8.331$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{m}) = \frac{1}{2.4336} \left\{ 0.0128 + \frac{.004858}{8.331} \right\}$$

$$= \frac{1}{2.4336} \{ 0.0128 + .00058 \}$$

या

 $=\frac{1}{24336}$ (0 01338)

मूत्र (2015) की महायता से LD 50 की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ,

C L =
$$1455 \pm .0741 \times 3.812$$

= 1.455 ± 0.2358
= $1.455 + 0.2358$
= 1.6908
= $1450 - 0.2358$
= 12192

मूत्र (20.16) के बनुसार b का प्रमरक

m की उपरि मीमा

भीर m की निस्त सीमा

$$v(b) = \frac{1}{x \cdot 331} = -0120$$

यही सम्या $x_n, w_i(X_i - X_i)^2$ को, v(m) का वरिषक्षत करते समय ज्ञात किया जा पूजा है बढ़: v(b) के लिए इसका सीधा प्रतिस्करण कर दिया गया है।

सूत्र (20.18) द्वारा b की विश्वास्थता सीमाएँ,

b की उपरि सीमा == 1.91

b भी निम्न सीमा == 1.21

कीडो नी प्रेशित मृत्यु-पंच्या तथा समाध्यम देखा डारा प्राप्त बरनुनार दिन्दुमी से प्राप्त मृत्यु-मन्या में नियमांगता नी परीता निम्न प्रकार कर तनते हैं :---

			•		
log ₁₀ λ (X)	रेबा डारा प्राप्त (Y)	होतिन मृत्यु-संबना (भू) स≅ १।	Y के तरनुवार (P)	nP ==30F	$\frac{(r-nP)^2}{nPQ}$
0.8757	4.10	4	0.184	5.52	2-223
1.0000	4.27	7	0 233	7:00	00
1.3979	4.90	13	0.460	13 80	0 086
1.6990	5 4 3	20	0 666	20-00	00
1.8751	5 65	25	0.742	22 30	1 267

$$x_3^2 = \sum_{i=1}^5 \frac{(r_i - n_i P_i)^2}{n_i P_i Q_i}$$
= 3.576

5 प्रतिगत सा॰ स्त॰ व 3 स्व॰ को॰ के लिए ४² का सारपीयढ मान 7.815 है जो कि परिकत्तित ४² से अधिक है। इससे सिद्ध होता है कि आनेल विन्दुमों तथा समाजयम रेला पर तुस्य बिन्दुमों में सार्थक विषमानता नहीं है। अतः विषमानता गुणक ज्ञात करने तथा संशोधन करने की कोई आवश्यक्ता नहीं है।

मधिकतम सम्भाविता विधि द्वारा प्रोबिट समाध्यय रेखा का समंजन

प्रायः ऐसा देखा गया है कि मात्रा-येची के सपुराणक और प्रॉबिट मृतको के धरुसार से साचित्र पर धालेखित बिन्दुधो के हारा नेत्र समजन करना लगभग धलम्भव है वर्गों कि मानेखित बिन्दु प्रधिक प्रकीर्ण पाये जाते हैं। यह स्थिति प्राय वितिन्न प्रकार नी प्रयोग सामधी या धिक्क शोधन मात्राधों के कारण भी उत्पन्न हो सन्ती है। घतः नेत्र सन्तेशन करके किसी वित्रेश प्रविधिक प्रविधि को धपनाना चाहिये। यहाँ ध्रिवस्तम सम्भाविता विधि का चर्णन विना किसी पर्णिताय प्रमाण के दिया यथा है, समजन विधि को निन्न प्रशार समक्ष सन्ते हैं:—

- (1) मात्रा को मात्रा-श्रेणी (X) में बीर प्रतिचत मृतकों को प्रॉबिट (Y) में करास्त्रित कर निजा जाता है।
- (2) इन मानुमबिक प्रॉबिट (empirical probit) Y बा X के साम बाक पेपर पर पालेख करके, अधिततम प्रॉबिट देखा का नेज समंग्रन कर दिया जाता है। उन मानेखित जिन्दुमों के तदनुनार मन्तःकालीन देखा पर स्मित बिन्दुमों के तियु प्रनंतिम प्रॉबिट, (Provisional probit) Yo. केबल एक दशमतब तक, पढ लिये जाते हैं।
- (3) प्रत्येक मान Y_0 के धनुसार ही। जें। एत्ने (D. J. Finney) द्वारा दो गर्ष सारणी से Y_0 के तबनुसार भार पूर्णाक भ के मान ज्ञात कर सिये जाते हैं। चाहें तो पूर्व $\frac{Z^2}{PQ}.$ द्वारा भ के मान ज्ञात कर सकते हैं किन्तु सारणी द्वारा यह मान घोप्रता एवं मुगमता से प्राप्त हो जाते हैं।
- (4) समूह में कीटों की संस्था n से w को भुगा करके संस्थाएँ nw झात कर सी जाती हैं।
- (5) ऐसा देखा गया है कि प्रेक्षित धनुषात का प्रॉबिट में क्यान्तरण द्वारा समीकरण रेखीय नहीं होवा है मतः प्रॉबिट समाध्ययण समीकरण को वार्यकर प्रॉबिट (working probits) Y₁ का प्रयोग करने समजित करते हैं। कार्यकर प्रॉबिट को निम्न सूत्र द्वारा परिस्तित करते हैं:—

$$Y_1 = Y_0 + \frac{p - P}{Z}$$
 (20 24)

 $Y_1 = Y_0 - \frac{q - Q}{7}$ या ... (20.241)

जहाँ Z, Yn के तदनुसार कोटि है और p प्रेसित प्रतिकत मृत्यु-सब्या के प्रवृत्तार प्रमामान्य वत्र का क्षेत्र है ग्रीर यु≔् १ - p है। P. Y₀ के तदकुगार प्रमामान्य वत्र का क्षेत्र है और

0=1 - P 2 :

यदि परीक्षा में लिए गये सब कीट यर जाते हैं चर्चान् अन प्रतिग्रन मृत्य-सम्या हो तो Y₁₆₀ की मधिशतम कार्यकर प्रोबिट कहत हैं। इस स्थिति स

$$Y_{100} = Y_0 + \frac{1-P}{Z}$$
 (20 25)

$$\Psi_{100} = Y_0 + \frac{Q}{Z}$$
(20.251)

पिगर भीर येद्ग ने मारणी (Table XI) व में बीर फिने ने मारणी (Table IV) व

में पवित्रतम तथा स्वूनतम नार्य नर प्रोंबट थीर 🚾 ने पराम ने लिए सारणियों थी है।

मदि सारणी में दिये हुए P के मान के श्राविरिक्त किसी श्राय मान के सदनुसार जार्यकर प्रॉबिट बात करना हो तो नूत्र (20 24) हारा इसका परिकलन कर सकते हैं। विभिन्न मानगरी ने परिवासन के लिए सुन निगन प्रकार है। इस मुनों में Y, ने महिरिक्त सभी सनेतन पिछले लग्ड ने धनुस्य हैं।

$$\frac{x_{n_{1}} w_{1} \chi_{n_{1}}}{x_{n_{1}} w_{1}}, \frac{x_{n_{1}} w_{1} \chi_{n_{1}}}{x_{n_{1}} w_{1}} \dots (2026)$$

$$\frac{x_{n_{1}} \chi_{n_{1}} w_{1}}{x_{n_{1}} \chi_{n_{1}} \chi_{n_{1}}} \dots (2026)$$

मंदि K बीटों के समूह है जिग्हें K विभिन्न पदार्थ दिये गये हैं ती.

$$x (n_1 w_1 x_1^2) = x n_1 w_1 X_1^2 - \frac{(x n_1 w_1 X_1)^2}{\frac{x}{x} n_1 w_1} (20 27)$$

$$(x n_2 w_1 X_1) (x n_3 w_1 Y_{31})$$

$$\sum_{i} (n_{i} w_{i} x_{i} y_{1i}) = \sum_{i} n_{i} w_{i} X_{i} Y_{1i} - \frac{\sum_{i} n_{i} w_{i}}{\sum_{i} n_{i} w_{i}} \frac{(\sum n_{i} w_{i} X_{1})}{\sum n_{i} w_{i}} \dots (20.28)$$

$$\sum_{i} n_{i} w_{i} y_{1}^{2} = \sum_{i} n_{i} w_{i} Y_{1}^{2} = \frac{\left(\sum_{i} n_{i} w_{i} Y_{1}\right)^{2}}{\sum_{i} n_{i} w_{i}} \dots (20.29)$$

- Statistical Tables for Biological and Agricultural Workers by Fisher . 2 R. A and Yates F. 3
 - Probit Analysis by Finney D J

$$\sum_{i=1}^{\infty} n_i w_i x_i y_{1i} \\
b_{max} \frac{1}{\sum_{i=1}^{\infty} n_i w_i x_i^2} (20 30)$$

$$X^{2}_{k-2} = \left(\sum_{i} n_{i} w_{i} y_{1i}^{2} \right) - \frac{\left(\sum_{i} n_{i} w_{i} x_{i} y_{1i} \right)^{2}}{\sum_{i} \left(n_{i} w_{i} x_{i}^{2} \right)} \qquad (2031)$$

$$v(b) = \frac{1}{\sum_{i} (n_i \ w_i \ X_i^2)} \qquad(20.32)$$

 $s_b = \sqrt{\overline{v(b)}}$

$$\phi = \frac{\chi^2}{K - 2}$$
 (20 34)

मीर

यत प्रॉविट समाध्यव रेखा.

$$(\hat{Y} - \hat{Y}_1) = b (X - \hat{X})$$
(20.36)

है। जहाँ $\overset{f A}{\mathbf{Y}}$, \mathbf{X} के निष्चित मान \mathbf{X}_0 के लिए द्यायणित मान है, तो

$$v(Y) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} n_{i} w_{i}^{2}} + \frac{(X_{0} - \overline{X})^{2}}{(\sum_{i=1}^{N} n_{i} w_{i} x_{i}^{2})} \dots (2037)$$

$$s_{\Upsilon}^{\Lambda} = \sqrt{\frac{\Lambda}{V(\Upsilon)}}$$
(20 38)

Υूँ की (I – α) 100 प्रतिघत विश्वास्यता सीमाएँ

है। LD 50 या ED 50 के लिए X≔m, Y≕5 को समीकरण (2036) मे रखक्र m कामान बात कर लिया जाता है।

50% मृत्यु सस्या के लिए मात्रा, धपनी पूर्व इकाइयों में (प्रतिसपु m)/5 के समान होती है। यदि x² परोक्षा डारा विषमागता सिद्ध हो तो इसकी उपेक्षा नहीं की जा सकती है। मत मधिक यपार्थ विश्वास्थता भीमाएँ ज्ञात करन के लिए पहते 4 का भीर इसके पश्चाद 8 का परिकलन करना होता है जबकि

$$g = \frac{t^2 \phi}{b^2 \equiv (n_1 w_1 x^2)} ... (2040)$$

LD 50 की यथार्थ विश्वास्पता सीमाएँ निम्न सूत्र द्वारा परिकलित की जाती हैं:-

$$\begin{cases} m + \frac{g}{1-g} (m - \overline{X}) \end{bmatrix} \pm \frac{t}{b(1-g)} \times \\ \sqrt{\left[-\frac{1}{2 n_1 w_1} + -\frac{(m - \overline{X})^2}{(2 n_1 w_1 x^2)} \right]} \phi \qquad ...(24.41)$$

यदि χ^2 निर्देश हो ना g = 0 रन दिया जाता है। इस स्थिति सं t = 1.96 शंसान रक्षते हैं।

प्रशिक्तम सभाविता विधि के प्रयोग को निम्न उदाहरण द्वारा और स्पष्ट समभ गक्त हैं।

उवाहरण 20 2 — विक्रने लण्ड में दिसे यस उदाहरण (20 1) वे प्रेक्षणो सथा विज (20-1) वा प्रमान वरण अधिवनम मणाविता विधि द्वारा प्रोविट समाध्रयण रेला वा समजन, LD 50 वा परिवतन नचा LD 50 वरे 95 शिवस्त विश्वास्थता सीमायो वा परिकासन निम्न मवार वर सवते हैं:---

गयंग पहले निम्म मारणी भी रचना वी गई है।

समा पहल लग्न मारणा का स्थाना वा गई है।						
मात्रा थें जी	सपूहा में कोटों की सक्या	प्रविश्वन मृश्यु मध्या	आनु वश्चि प्राविट	प्राप्तिः प्रास्टि	नार्यकर प्रविट	Yo के शत्नुनार भार
(X)	(n)	(P)	(Y)	(Y ₀)	(Y1)	(w)
1	2	3	4	5	6	7
0 8757	30	13 33	3 89	4 15	3 912	0,487
1 0000	30	23 33	4 27	4 27	4 274	0 532
1 3979	30	45 33	4 83	4 90	4 832	0 634
1 6990	30	66 66	5 4 3	5 43	5 430	0 601
1 8751	30	83 33	5 97	5 6 5	5 9 3 2	0.545

उपर्युक्त सारमी के स्तरम (5) में प्रत्याचित प्रोबिट मान वित्र (20-1) की सहा-मता से मीर स्तरम (6) में वार्यकर प्रोबिट Y₂ के मान, बी० वे० किने द्वारा निसित पुस्तक प्रोबिट विश्वेचण (Probit analysis, by D. J. Finney) के परिविद्य हैं हो गई सारमी 4 (table IV) में देनकर रन दिय गये हैं। Y₃ मानो को Y₆ तथा p दे मानों के सनुभार ध-त्वेचन करने रक्षा गया है। यदि साव्ययक्ता हो तो प्रत्यावित प्रोबिट Y₆ के सनुभार ट व P ने मान सारमियो द्वारा जात करने गृद (20 24) की महायनों से कार्यकर प्रीविट (Y₁) भी परिवित्तत किये जा गरते हैं। किन्तु परियम को क्यांने के हेत् गर्यक सारमी का ही प्रयोग किया जाता है।

धार मस्याधी का परिकात इस प्रवार वर सवते हैं :--

मूत्रो (20,27) से (20,33) तक का प्रयोग करके निम्न सस्यामो का परिकलन किया गया है:—

I
$$\sigma_i \le x_i^2 = 173.8620 - \frac{(116.6329)^2}{83.970}$$

= 173.8620 - 162.0011
= 11.8609

$$\begin{array}{c} x \ n_1 \ w_1 \ x_1 \ y_{31} = 594 \cdot 9330 \ - \ \frac{(116 \ 6329) \ (412 \ 1631)}{83 \ 970} \\ = 594 \ 9330 \ - 572 \ 4875 \\ = 22 \cdot 4455 \\ x \ n_t \ w_1 \ y_{31} = 2066 \ 1600 \ - \ \frac{(412 \ 1631)^3}{83 \ 970} \\ = 2066 \cdot 1606 \ - 2023 \ 0847 \\ = 43 \ 0753 \\ b = \frac{22 \ 4455}{11 \ 8609} \\ = 1 \ 8924 \\ v \ (b) = \frac{1}{11 \ 8609} \\ = 0 \ 0843 \end{array}$$

≈0°2903 (20 36) के धनुसार प्रॉविट समाध्यम रेखा

1b= 100843

 है। माता कि X का निश्चित मान X₀ = 2 है तो Y वा परिकलित मान == 6 0647 सुत्र (20.37) की सहायता से,

$${}^{V}(\hat{Y}) = \frac{1}{83970} + \frac{(2-13890)^{2}}{11.8609}$$
= 0 0434
$${}^{S}\hat{Y} = 0.2137$$

है। (20,39) की महायना से Y को 95 प्रतिशत विश्वास्थना भीमाएँ

है। LD 50 ज्ञात करने के लिए प्रॉबिट समाध्यय रखा मे X=m धौर Y=5 रखकर m. का मान ज्ञात कर लिया।

$$5=1.8924 \times m + 2.2799$$

साइता λ शात करने के लिए m का प्रतिलघु लिया

=27·38 मिलीयास प्रति 100 चन से०

मृत्र (20·31) की सहायता ने, X2 का मान विवर्गायता के प्रति परिकल्पना-परीक्षा के लिए ज्ञात कर मकते हैं।

$$\chi^2 = 43.0753 - \frac{(22.4455)^2}{11.8609}$$

$$=0.5996$$

x² का परिवालित मान c == 05 सा∙ स्त∙ तथा 3 स्व० को० पर, x² के सारगीबद्ध मान 7.815 से क्म है बत विषमागना का सार्यक नहीं होना मिद्ध होता है ।

x1 निरर्थम हाने पर विषमागना गुणक ई को ज्ञात करने और उसके उपराम्न g का परिकलन करके m नी परिणुद्ध विश्वास्यता सीमाएँ जात नरने नी भावश्यकता नहीं है क्योंकि इस स्पिति में g=0 निया जाता है। ऐसा होते हुए भी यहाँ परिकलन करने की विधि को प्रश्नीत करने के लिए ¢ तथा g का परिकलन करके m की परिश्रद विद्यास्यता सीमामी को जान किया गया है। सूत्र (20.34) की सहायता से,

$$\phi = \frac{0.5996}{3}$$

=0.1999

सूत्र (20.35) से,

सुत्र (20·40) मे a=·05 गौर 3 स्व०को० के लिए सारणी द्वारा प्राप्त १ मान का3·182 रखने पर

$$g = \frac{(3 \cdot 182)^2 (0 \cdot 1999)}{(1 \cdot 8924)^2 (1 \cdot 1 \cdot 8609)}$$
$$= \frac{2 \cdot 0244}{42 \cdot 2763}$$

=0·0477

है। मत. सूत्र (20:41) की महायता से m की 95 प्रीतिशन परिशुद्ध विश्वास्थना

सीमाएँ हैं —

$$C.L = \left\{ 1.4374 + \frac{0.0477}{1 - 0477} \quad (1.4374 - 1.3890) \right\}$$

$$\pm \frac{3.182}{1 \cdot 8924 (1 - 0477)} \sqrt{\frac{1}{83.970} + \frac{(1.4374 - 1.3980)^2}{11.8609}} \times 0.1999$$

$$= (1.4374 + 0.020) + 1.7657 \times 4.00024$$

 $= (1 4374 + 0020) \pm 17657 \times \sqrt{00024}$

⇒1.4394±1.7657 × 05 ⇒1.4394+0.0883

m की उपरि सीमा=1·5277

nu की निम्न सोमा = 1:3511

प्राकृतिक मृत्यु-संस्था के लिए समायोजन

उपर्नुक्त विधियों के बर्जन म सहैन यह करनान की गई है कि परीक्षा के हुन लिए गये की दो या जीवाणु पर जो भी प्रभाव है ने बन उद्दोपक या दाविवन ने कारण ही है बार इस मोर कोई प्रभान नहीं दिया गया है कि इनम कुछ अनुक्तिया इन उद्दोशक या दाविवन के किना भी होती है जिसे कि किड़ी बीटनाक का बीदी पर नहीं विद्यक्त गया हो तो भी अनमें से हुए प्राइतिक मीत से मर जाते हैं या किसी फर्कुरनाची का प्रभाव की जातु (Sposes) प्रकुरण के ब्राह्मार दिखना हो तो उन अध्यापुष्पी की सक्या के बित समा-पीजन करना नाहिये जो कि किसी फर्कुरनाची को प्रमुक्त-नहीं करने की स्पिति में महुतित नहीं होते हैं। इस प्रकार के सक्ताधन को उस्त्यू ० एस० एवाट (W S. Aboot) ने 1925 में निकास था जो कि किसा कर में दिया गया है —

यदि श्रीबागुमा दा कोटो का बहु धनुषात C है जो कि बिना श्रीबनाकी मा कीटनाती कै ही मर गये हैं जोर P मेक्कित मृतको का धनुषात है जो शोधन के कारण मरे हैं तो बुन मृतको का धनुषात P, यदि दो मृत्यु खक्या स्वतम्ब हो तो विम्न होना है —

मत विष (उपचार) डारा मृतकी वा धनुपात

$$P = \frac{P_1 - C}{1 - C}$$
 (20 43)

है। सूत्र (2042) को एकाट का सूत्र कहते हैं। इसके यक्कात् विसित्त ने कताया कि सहित्युता के बटन ने प्राथकों का अधिकतन सम्मानिता विधि द्वारा धाक्तन करने में प्राइतिक मृत्यु सक्या के प्रभाव को धीयकतर उत्तेसा कर देते हैं किन्तु इसने स्थाव पर कार्यकर सक्या, जिस पर विष प्रयुक्त किया गया है, a न होकर स्व(1 - C) हाती है। फिने ने एकाट एवं बिनिस द्वारा निये गये सतोधनों को सबुक्त कर से धार गुनीह से परिवर्तित करके प्रयोग करने की विधि को शुक्ताया। यदि C का वास्तविक मान ज्ञात हो तो फिने ने भार w' के लिए निम्न सूत्र दिया—

$$w' = \frac{Z^2}{Q(P + \frac{C}{1 - C})} \qquad \dots (20.44)$$

इन भारों के लिए फिन ने घपनी पुस्तव प्रॉबिट-विस्लेषण (Probit analysis) में सारणो-2 (table-II) दी है। यह सारणी 0 से 90 तक प्रतिशत मृत्यु सब्दा के तुस्य प्रॉबिट Y में 0 । प्रस्तरात घौर C में 0 1% धन्तरात के लिए दी गई है। यदि C=0 हो तो किसी प्रवार के समायोजन की धावश्यकता नहीं है। सून्य के धातिरिक्त C किसी भी मान के लिए भार w और w' में सम्मन्स w' = 8w के रूप में स्थापित कर सकते हैं।

यह जात है कि,

$$w = \frac{Z^2}{PQ} \quad \text{at} \quad Z^2 = PQw$$

$$\text{at} \quad w' = \frac{PQw}{Q(P + \frac{C}{L-C})} = gw \qquad(20.44 \text{ I})$$

जबकि याना,

$$\theta = \frac{P}{P + \frac{C}{1 - C}}$$

$$W' = \frac{P}{P + \frac{C}{1 - C}} \times W \qquad \dots (2045)$$

C का मान नियन्त्रक वर्ग धर्मात् वह कोट समूह जिसे कोई उपचार न दिया हो। द्वारा द्वार करते हैं। यदि इस वर्ग में कीटो की सक्या धन्य वर्गों की सक्या से बृहद् हों तो C का ध्राक्षतित मान धनभिनत होता है। यदि C का ध्राक्तन घरिक या कम हो ती इसमें सभीधन विप्ताइट (sigmoid) कक की सहायता से किया जा सकता है। यदि C का मान नृहद् न हो प्रयाद् 20% के कम हो तो भ का सीधा प्रयोग करके प्रॉवट विस्तेषण कर निया जाना है। यदि प्राकृतिक मृत्यु सस्यादर उच्च हो घोर परीक्षित वर्गों में मृत्यु सस्या दर प्रत्यक्षित सन्यित्त हो तो C का ध्राक्तन किन है। ऐसी निर्मात में साहियकीय विप्तेषपण, एक छहायक विचन X' नेकर करते हैं।

जहाँ,

$$X' = \frac{Q}{Z}$$
 (20 46)

उशहरण 20.3 : कोटो वर चिडेन (Lindance) की तीन मान्द्रतामी का प्रभाव तया नियन्त्रण (0 सान्द्रना) की बयेला प्रधाव देन्द्रने के हेतु एक प्रयोग निया शिया गया। इस प्रयाग के मन्तर्गत निन्न प्रेशक प्राप्त हुए। प्रयाग क प्रत्येक समूह में 30 कीट सिव गये थे —

सान्द्रवा मिसीप्राप प्रति 1000 यन से•	48 पटो के बाद युन कीटों की संख्या	प्रतिषद मृत्यु सध्या	ulfac Y	मार W
0	5	16 66	4 0313	449
100	26	86 66	6-1104	-401
50	20	66 66	5 4305	-594
25	11	36 66	4 6591	610

उदर्बुक्त न्यास का प्रोबिट विश्लेषण नरने से पूर्व यह धावष्यक है कि प्राप्तिक पृत्यु संस्था, जो कि निधन्त्रण समूह हारा जात है, का प्रयोग करके प्रत्य उपवारों के कारण मृत्यु संस्था प्रतुपात का समायोजन किया जाये।

उपर्युक्त न्यास के अनुसार,

बिभिन्न सान्द्रताको पर कुन जुतका के स्रमुगन P_1 का मान सूत्र (2043) म रेफकर समायोजिल स्रमुगत P प्राप्त हा जात है।

मतः तीनी दी हुई सान्द्रतामी के लिए समायीजित प्रतिगत, भृत्यु सस्या का प्रयोग करना होता है।

सान्द्रता मि॰ घा॰ 100 c.c.	समायोजित प्रतिहत मृत्यु सम्मा	मॉब्टि मान Y	भार
10	83 99	599	35 66
5	59 99	5 2 5	4665
2.5	24 00	4 29	-2912

समायोजित प्रतिशत मृत्यु सस्या के लिए भार फ सारणी से देखकर रख लिये गये हैं। यदि सारणी उपनव्य न हो तो इन्हें सुत्र की सहायता से परिकलित बर सकते हैं।

यहाँ सूत्र (2044) का प्रयोग करने 10% सान्द्रवा के लिए सार भ'का परिकाल करके दिलाया गया है।

$$\theta = \frac{8399}{8399 + \frac{1666}{8334}}$$

$$= \frac{8399}{10399}$$

$$= -80767$$

$$w' = -80767 \times w$$

$$= 80767 \times 449$$

$$= -3626$$

मारणी से देखे गये भार तथा परिकलित भार में कुछ बस्तर है जो कि झन्तर्वेशन के कारण है।

प्राकृतिक मृत्यु सस्या हे लिए समायोजन करने पर प्राप्त प्रतिगत मृत्यु सस्या तथा तदनुसार भारो को प्रयोग करके धावस्यकनानुसार प्रोविट विस्तेषण कर मक्ते हैं।

सापेक्ष स्नान्त शक्ति

प्राय क्सी नवे रसायनिक पदार्थ कीटनाधी, उद्दोकक या फर्फ्ट्नासी का प्रमाद एक किसी प्रान्त पदार्थ को चलन में है, उससे लुतनात्मक प्रभाव वानने की प्रावस्यकता होती है। किसी उपवारित वर्ष की नियन्त्रक वर्ष से लुनना करके प्रभाव सुगमना से झात हो जाता है। किन्तु एक पदार्थ की दूसरे पदार्थ से लुनना करने हेतु क्सी विकेष विधि की प्रपनाना पडता है। सेये पदार्थ पर केवल परोक्षण करके सानक पदार्थ ने झात परिणामो से तुनना करने निष्यर्थं निकासना चित्रत नहीं है क्योंकि अब ब्राय्यन में भिन्न नित्र समयों पर विभिन्न पणुष्पो या कोटो के साथ त्रयोग करने पर परिस्थितियाँ भी नित्र पिन्न होती हैं भत सदेव नये पदार्थं और मानक पदार्थं को एक साथ लेकर एक-सी परिस्थितियों से परीक्षण करना होता है।

किसी प्रदेशक की भाषेश यन्त सक्ति समान यमाथी मात्रायों के घनुपान के समान होती है। एक या एक से प्रशिक रसायनिक पदार्थों की मानक पदार्थ से सापस सन्त प्रक्ति की मुलना संयान्तर प्रॉबिट समाध्यण रेसायों के द्वारा कर सकते हैं। यदि ये रेसाएँ समान्तर न हों तो घन्य किसी बिधि को घपनाना पडडा है। इस विषय के किस्तुत साम्यन की सिए पुस्तक "Statistical methods in biological essays" by D J Finney का प्राययन कीजिये।

माध्य प्रांबिट ग्रन्तर

दो प्रेक्षण श्रेणी, जिनसे समान्तर प्रॉबिट समाध्यवण देवाएँ प्राप्त होती हैं, उनमे यन्तर ना मुख्य माप, माध्य प्रॉबिट धन्तर '∆' है ।

 Δ . दो समान्तर प्रॉबिट रेखामो में कर्म्यांगर बन्तर वे समान होता है। गणितीय क्ष्म में Δ को निम्न रूप में दिया जा सकता है—

$$\Delta_{13} = \{Y_1 - Y_2\} = bM_{13}$$

$$= \{Y_1 - b(X - X_1)\} - \{Y_2 - b(X - X_2)\} \quad(20.47)$$

$$= \{Y_1 - Y_3\} - b\{X_1 - X_2\}$$

$$bM_{12} = \{Y_1 - Y_2\} - b\{X_1 - X_2\}$$

$$\forall M_{13} = \{X_2 - X_1\} - \{\frac{(Y_2 - Y_1)}{b}\} \qquad ...(20.48)$$

△ का प्रसरण जब विषमानता गुगाक की मादश्यकता त हो तो निम्त होता है --

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\Delta) &= \mathbf{v} \left\{ (\overline{\mathbf{Y}}_1 - \overline{\mathbf{Y}}_2) - \mathbf{b} (\overline{\mathbf{X}}_1 - \overline{\mathbf{X}}_2) \right\} \\ \mathbf{v}(\Delta) &= \mathbf{v} \left(\overline{\mathbf{Y}}_1\right) + \mathbf{v}(\overline{\mathbf{Y}}_2) + (\overline{\mathbf{X}}_1 - \overline{\mathbf{X}}_2)^2 \mathbf{v}(\mathbf{b}) \\ &= \frac{1}{\sum n_1 w_1} + \frac{1}{\sum n_2 w} + \frac{(\overline{\mathbf{X}}_2 - \overline{\mathbf{X}}_2)^2}{5 \mathbf{x}^2} \end{aligned}$$
(20 49)

उपर्युक्त समीकरणों में M_{12} किन्हीं दो मात्रा खेलियों म स्विर प्रस्तर है। यहां M या Δ का प्रमुखन 12 खेलियों का सुक्त है जबकि विश्वचेष्य दो से खिल खेलियों के प्रति किया जा रहा है। M को प्रयोद्धा Δ के प्रति परिवतन मृत्य हैं। इसके द्वारा विश्वसम्बन्ध मीमार्स भी महत्तन से बात कर सकते हैं।

प्रयोग सभिकल्पना

प्रियंकाश प्रयोगों में एक साथ कई वियंत पदार्थों, उद्दीपकों घादि की तुलना करने का उद्देश्य होता है। इन पदार्थों की निमिश्न मात्राघों का स्वय में अन्तर, दूसरे पदार्थों से तुलना एव परस्पर त्रिया (Interaction) वे विषय मे आनकारी प्राप्त करने हेतु दिन-प्रतिदिन प्रयोग दिये जाते हैं। काल, स्थान, प्रयोगकर्ता तथा कीट या पणु, जिन पर अभाव देखा जाना है, का परिणामों पर प्रभाव पड़ता है। इन सभी की समानता को प्राप्त करके एक-सी परिस्थितियों उपलब्ध करना कठिन है या स्वयम्त प्रसम्भव है। यह प्रयोग प्रयोग-प्रिकल्पना के प्रति ज्ञान प्राप्त करने के जिए इस विषय परपुल्तक "Experimental Design" by W. T. Federer या संग्य किसी पुरसक को पढ़िये।

िस्सी प्रयोग की योजना बनाते समय दो मुख्य समस्याएँ और उत्पन्न होती हैं। एक तो यह कि विषेते पदार्थ की कितनी माना (सान्द्रता) की जाये। इसके लिए कोई नियम बताना तो गठिन है पर यह माना जाता है कि मानाएँ ऐसी होनी चाहिए कि वो 16 से 84 प्रतिवात तक मृतको की मध्या प्रदान करें। ऐसा कप्ते से धाकतक सगम्य समान पिषुद्धि के ताथ प्राप्त होते हैं। वर्तमान नान के सनुमार ऐसा समभा जाता है कि 10g LD 50 के प्रति तभी माकतन समान पिषुद्ध होते हैं। सान्द्रताएँ जो 16 प्रतिवात के कम या 84 प्रतिवात से प्रधिक मृत्यु सस्या प्रदान करती हैं उनसे LD 50 की प्रपेता वहत कम जानकारी प्राप्त होती हैं।

तूसरी समस्या यह सामने झाती है कि प्रत्येव वर्ग में कितने बीट या पशु होने चाहिए।

इसके लिए भी कोई नियम तो नहीं है फिर भी यह उपलब्ध कीटों या पशुमों की सल्या,
उनमें मिमता की मात्रा और आकल्पन में इन्छित परिवृद्धि पर निर्मेर करती है।

साधारणतः बृहत् वर्गों की कम सस्या की धरेक्षा लघु परिवाल के अधिक वर्ग प्रिमानीय

है। व्यवहार में प्रत्येक वर्ग में 20 में 30 तक कीट सस्या उपयुक्त समन्ती आती है।

प्रश्नावसी

- प्रॉबिट विश्लेषण में रूपान्तरण की शावश्यकता एव उपयोगिता पर टिप्पणी लिखिए।
- उन स्थितियो का उदाहरण सहित वर्णन कीजिये जिनमे वर्गमूल क्यान्तरण की ग्रावश्यकता होती है।
- 3 प्रॉबिट विश्लेषण करने भी एक उत्तम विधि का विवरण की बिथे।
- 4 एबाट का मूत्र क्या है ? प्रोंबिट विश्लेषण मे इसके महत्त्व पर प्रकाश डालिए।
- 5 एलक्ट्रिन (Aldran) की पाँच सान्द्रताधों वे घोल का कीटो पर प्रभाव जानने के हेतु एक प्रयोग विधा । धोल की सान्द्रताधें तथा वीटा वी सच्या निम्न प्रकार थी --

साथता Fg/Fl	समूहों में कीटों की सकता	48 बाटे के बाद कृत कीटों की सकता
5 00	30	24
2.50	30	17
1.00	30	15
.50	30	12
•25	30	6

उपर्युक्त स्यास के लिए,

- (1) प्रॉविट समाजयम रेखा का समझन नीविये ।
- (II) LD 50 जात शीविये ।
- (iii) अध्यम बातक मात्रा 'm' नी 99 प्रतिगत परिगुद विश्वस्थित सीमार्ग जात
 नीमिये ।



प्रमरण विश्लेषण सास्त्रिको का प्रयत्न महत्वपूर्ण धन है। घषिकाणत प्रयोगों द्वारा उचित एव गुद्ध तिरूपं निकासत हेनु इसना प्रयोग हाता है घत सास्त्रिको में इसका समुचित जात प्राप्त करना घावस्थक है। नगभग सभी घष्ट्यनो में प्रसरण को जात है। समस्या जाता है भीर ममस्या के घनुनार इसका विश्लेषण करना चित्रवार्य हो जाता है। समस्या कोई घीर किसी प्रकार को हो परन्तु प्रमरण विश्लेषण का मूल निद्धान्त की रहता है। समस्या क घाषार पर नेवल प्रसरण के सातो म परिवर्तन होता रहता है। प्रसरण-विश्लेषण की विधि एव इसका उपयोग कुछ प्रचलित धनिकस्थनामाँ (Design of experiments) के लिए इस प्रध्यास में दिया गया है।

परिभाषा एवं सिद्धान्त

प्रक्षणा ने एक समुज्यय ने पूर्ण प्रसरण ना निन्ही परिस्थितियों के अनुसार घटकों में पूपनन रण निया जा सनता है यदि यह घटन प्रेक्षणों ने बर्गीन रखें में प्रसरण और से मन्दग्य हो। माद ही इन घटनों ने प्रति परिकल्पनाधी नी F-परीक्षा नी जाती है। इस विक्तियण नो प्रसरण विक्तियण नहते हैं।

प्रसरण विश्लेषण की विधि को सर्वप्रयम सन् 1920 में बार ॰ ए॰ शिशर ने दिया या बौर तब से इसका प्रयोग दिन प्रति दिन बढता ही बा रहा है। उपर्युक्त परिमादा से स्पष्ट है कि प्रसरण विश्लेषण के जिल्ला दो उद्देश्य हैं —

(1) पूर्ण प्रसरण को घटको के प्रमरण में विपाटित (split) करना !

(2) इन घटनो ने प्रति परिनल्पनायो की F-परीक्षा करना।

F-परीक्षा द्वारा अधिकतर वर्ग के खण्डो की समानना की परीक्षा की जाती है।

प्रमरण के बिषय में प्रध्याय 4 म पर्यान्त दिया ना चुना है। किर मी यहाँ प्रसरण के सूत्र के द्वारा परिकान का निवंचन करना जीवन प्रतीत होता है। हम जानते हैं कि एक n प्रेसणा के प्रतिदर्श $X_1, X_2, X_3 \cdots X_n$ के निए, बाहन्स्तिक वर X का प्रसरण,

$$\hat{V}(X) = \frac{1}{n-1} I(X_i - \overline{X})^2 \qquad ... (211)$$

$$= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i} X_{i}^{2} - \frac{(\sum_{i} X_{i})^{2}}{n} \right\} ...(2111)$$

मूत्र (2111) के नीन सकड हैं $\mathbf{x} \mathbf{x}_i^2$, प्रेनिन भावा के वर्ग के बाय का निरूपित \mathbf{x}_i के प्रेस करता है भीर सक्या ($\mathbf{x} \mathbf{x}_i$) \mathbf{x}_i / \mathbf{n} माज्या के निरूप संशोधन का प्रदानिन करता है। दूसरे

सन्दों में, सन्द्रमा $\{\Sigma X_i\}^2/n$ को घना देने पर उस मानी के वर्ग का मोग काल हो जाता है के कि सम्बद्ध की मूल बिन्दु पर से जाने से प्राप्त होता है। (n-1) प्रेरीन माना की स्वतन्त्रता कोटि है जिससे कि भाग देने पर प्रसद्ध ताल हा जाता है।

प्रमाण विश्मेषण से मस्या (XX_t)2/n को संगोधन कारक (संक कार) (contection

(सारची 21.1) प्रतरण विस्तेषण सारची

विवरण न्दोत	स्वतन्त्रतः कोटि (स्व+ वो+)	वर्ष दीप (द० स०)	নাম্য ধৰ্ণ থান (মাত ৰত ২০)	F-414
4				
त ! प				
पूटि				
पूर्व				

जब दि उपर्युत्त नार्षी से ब, सन्, अस्य स्वादि विकरण कोश है सर्पान् विकित्र स्वरू है। सार्षी में स्वधिकतर स्वन्त्रता कोटि को स्वरू को , वर्षों क योग को वर पर सीन माद्य वर्ष योग को सारू वरू यून के रूप से नित्ता जाता है जेता कि लघु कोष्टर में दिया गया है।

विषर्ण मोत ने स्तम्भ मं यहने ने नाम, जो भी प्रसरण ने नस्बद्ध हों, तथा पूरि न पूर्ण, ग्रस्ट निग दिये जाते हैं। पूर्ण वर्ण योग ना थटना ने वर्ध योग ने जो प्रान्तर होता है उसे पूर्णि (या वर्षों ने स्वस्टर) थटन ने नाबद्ध थाना जाता है या पूरि या वर्षों ने प्राट्स पटन नी स्वल् नोल, पूर्ण स्वल् नोल मंत्रे स्वर्ण नी स्वल् नोल न थोग नो प्रान्तर प्राप्त हो जाती है। दुनी प्रकार पूर्णि ने निग् नल्यल, पूर्ण नल्यल न ते पटनों ने नन्यल गर्पे हैं। एक्छा वर्षीकरण के लिए प्रगरण विक्लेषण का प्रयोग निम्न प्रमिक्ताना की स्थिति में होता है।

पूर्णतमा पाद्धिकीवृत अभिकल्पना (पृ०यान्यन)

इस प्रभिक्त्यना का प्रयोग सब प्रयोगधन यूनिटां (Experimental units) के सवानीय (एक-मा) होने के स्थिति से किया जाता है। प्रत्येक उपचार एक की विभिन्न सक्या पर सबुक्त कर नकते हैं सर्वान् प्रत्येक उपचार की धुनरावृति (sephesiion) भिन्न हो सकती है।

साना कि k उपचारा (प्रतिवर्गो) हे लिए प्रेश्चन निम्न सारणी हे बनुसार है जबकि उपचारों की पुनरावृति सम्या (प्रतिवर्ग परिमान) जयन (1, 13, 13 1 है। इस प्रयोग द्वारा प्राप्त प्रैश्चनों को निम्न सारणी से दिखा जा सकता है —

(सारको 212) प्रेसको का सारकीकाक

बपदार प्रजित्त चंदवा			प्रेसन	मेरन	শাস
1	X ₁₁	X ₁₃	X ₁₃ X _{1i} X _{1ri}	X ₁	'X ₁
2	X_{22}	X,,	X33X35X2.3	X3	\mathbf{x}_{s}
3	X ₃₁	X ₃₂	X ₃₃ X _{3/} X _{3/g} X ₈ X ₆ X _M	Х _э .	X,
k	x_{x_1}	X,2	X23X2 XP4	X _k .	X_{b}
			पूर्व	X. = G	X

प्रेराण X_{II} में प्रवत्त चतुनात, । तथबार संस्था और दूधरा धतुनात, j वी प्रेराण को निर्माणक करता है।

माना कि ¥ रा=ा अहाँ । = 1,2,3 ,k

इस प्रकार के स्थान के लिए निस्न प्रमारण विश्वेषण सारणी का प्रथीन किया सता है।

मही समीक्षत कारक
$$= \frac{X^3}{2} \frac{G^3}{r_i} \Rightarrow \frac{G^3}{n}$$
 होता है।

(सारणी 21.3) पू॰ या॰ ब॰ ने लिए प्रभरष-विश्लेषण सारणी

विचरण क्षोत	स्वः वोः	र∙ ४०	মাণ বণ বণ	F
ज्यवारो (प्रतिदहाँ) के बीच	(k-1)	$\sum_{i=1}^{k} X_{i}^{2} / r_{i} - \frac{G^{2}}{n} = S_{XX}$	S _{XX} / _{k-1}	$\frac{s_{XX}}{s_{EE}} \xrightarrow{n-1} = F$
चुटि (प्रतिदशों के भन्दर)	(n-k)	$(T_{XX} - S_{XX}) = S_{EE}$	S _{EE/n-1} , =5,2	
पूर्ण	(n-1)	$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	x	

वर्गी या उपनारों ने सन्दर जुटि नो प्रयोग-जुटि श बेबल जुटि भी नहते हैं। प्रयोग-गत समिनन्तरार्भों नो स्थिति में जुटि उन्द्र ना प्रयोग विया जाता है।

$$\begin{array}{rcl} \underbrace{x_{1}}_{1} \underbrace{x_{2}}_{1} & \underbrace{x_{1}}_{2} - \underbrace{\frac{G^{2}}{n}}_{2} & \dots & (21\ 2\ 1) \\ & = \underbrace{x_{11}}_{1} + \underbrace{x_{12}}_{1} + \dots + \underbrace{x_{k}}_{k} \underbrace{x_{k}}_{n} - \underbrace{\frac{G^{2}}{n}}_{n} & \dots & (21.2) \end{array}$$

=प्रेसणों के वर्गों का सोग्न सब काव

इसी प्रकार उपकारी या प्रतिदर्शों के बीच,

$$\frac{\chi_{0}}{r_{1}} = \frac{\chi_{1}^{2}}{r_{1}} + \frac{\chi_{2}^{2}}{r_{2}} + \dots + \frac{\chi_{1}^{2}}{r_{k}} - \frac{G^{2}}{\pi} \qquad \dots (21.3)$$

$$= \frac{\chi_{1}}{\chi_{1}} + \frac{\chi_{2}^{2}}{\eta_{1}} - \frac{G^{2}}{\eta_{1}} \qquad \dots (21.31)$$

पनिदशों या उपवारों ने बन्दर त्रुटि,

$$qeqo = \left(\sum_{i=1}^{n} X_{i}^{2} - \frac{G^{2}}{n} \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_{i}^{2}}{f_{i}} - \frac{G^{2}}{n} \right) \\
= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{j}^{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{i}^{2}}{i} \qquad (214)$$

इस प्रकार विश्लेषण सारणी से दिये स्तम्मो से विषयण सीन के चतुमार सस्याएँ ज्ञात करने की विधि उपलब्ध है। इसी विधि का प्रयोग उदाहरण द्वारा स्वस्ट हो जायेगा।

यह तात है कि दो प्रसन्धों का अनुपान F-बटन होना है धन: यहाँ परिवरतना Ho की F-परीक्षा की आनी है। प्रमुख विक्तियण सार्थी से प्रसुख सन्धात,

था F = उत्तवार माध्य वन-धान घटि माध्य वर्ग-धान

यदि परिवित्त Γ ना मान, α सा॰ स्त॰ व (n_1, n_2) , स्व॰ बो॰ ने लिए Γ के संस्पीबद्ध मान से मधित हो वो H_0 नो मन्त्रीकार कर दिवा जाना है प्रधार मुन्ते को स्वीकार कर निवा जाना है भीर इनके विषयीन स्वित म H_0 को स्वीकार कर स्वाचा जाना है। प्रारं स्वित में उपर्युक्त निर्यंग का इन प्रकार भी कहते हैं। H_0 मस्त्रीष्ट्रत होने का सर्वं है कि कम में कम को दे दा उपराद एक दूसरे से सर्वं कर से भिन्न है। H_0 स्वीकृत करने का सर्वं है कि इनमें प्रस्तु है। H_0 स्वीकृत करने का सर्वं है कि इनमें प्रस्तु निर्यंग है।

हिप्पणी: यदि परिवित्त में का मान एवं से कम हो पर्धात् में<! हो ता दिना । प्रावित्ता सारणी देने Ho को स्वीकार करन का निर्णय से सबने हैं।

चशहरण 21.1: तीन प्रकार ने कोड़ (Leprosy) के रोवियो होर 20 मरोगियों के प्रतिकार्ग में मीरम एकस्पूर्णन (Serum Albumin) की प्रति 100 दिन सीटर में विकास माना (प्रामों में। प्राप्त हर्द —

रागियों की सकरा	नियन्त्रण (Control)	नेपरोने द्न कोड़ (Lepromatous Leprosy)	Equipment wis (Tuberculoid (Leprosy)	fretful z (Intermittent)
(1)	(n)	(m)	(14)	(v)
1	4 20	3 65	3 20	3.90
2.	4.00	3 65	4 10	3 10
3	4.10	3 60	4.20	3.20
4.	3 80	2.70	3.65	4.20
5.	3.30	3-15	4 65	3.00
6.	4.20	4 00	3 70	3.40
7.	4.60	3 60	3.40	
8,	4:30	2 95	4 80	
9.	4.10	2 8 5	3-20	

(i)	(n)	(m)	(n)	(v)
10.	3 20	3 30	3 90	
11.	4 10	3.80	3 75	
12.	3 20	3 60		
13.	3 90	3 80		
14	4 40	3 05		
15.	3 70	2 65		
16	4 50	2 90		
17.	3.60	3 10		
18.	3 50	3 75		
19.	3 80	3 80		
20.	3 40	3 60		
21.		3.70		
22.		3 65		
23;		3.60		
योग	78-20	75 45	42 55	20.80
माध्य	3.91	3.28	3.87	3.47

पूर्ण योग = 217 00
स॰ का॰ =
$$\frac{(217.00)^2}{60}$$
 =784.81

प्रसिदशों के बीच व॰ यं॰.

$$=\frac{(78\cdot20)^2}{20} + \frac{(75\cdot45)^2}{23} + \frac{(42\cdot55)^2}{11} + \frac{(20\,80)^2}{6} - 90\,\text{effo}$$

■789.97 - 784.81

= 5.16

≈36.65

प्रसरण विश्लेषण सारणी,

निषरण सीव	स्व+ को≉	इ. इ.	माञ्च श्रे	F-414
प्रतिदर्शों के भोच	3	516	1 72	$\frac{172}{0.56} = 3071$
प्रतिदशों के अन्दर	56	31-48	0 56	
पूर्ण	59			

a = 0.5 सीर (3,56) स्व० वी० वे लिए F वा सारणीबद्ध मान (परि० प-5.2) 2.76 है जो कि F वे परिवित्त मान से वन है। यन इससे यह निष्यर निकसता है कि प्रिन्न प्रकार के रोगिया म सोरण एतन्यूनिन की बाध्य साक्ष्म से एक दूसरे से सार्थक सन्तर है।

युगल माध्यो की तुलना

यदि प्रसरण विश्लेषण के धनार्थत F-परीका द्वारा निरिक्तरणीय परिश्लवना H_0 को सस्वीकार कर दिया गया हो तो इसका प्रभिन्नाय है कि H_1 को स्वीकार किया है। इस स्थिति के सह जानात्र प्रशासकार हो जाता है कि $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_K$ उपकार साध्यों के सक्षा में साध्य एक दूसरे के साध्य के कार्य समान है या सक ही साध्य एक दूसरे के साध्य समान है या सक ही साध्य एक दूसरे के साध्य समान है या सक

इन मुक्त माध्यो य सार्थक सन्तर जानने को एक प्रवस्ति विधि, स्पूर्णम सार्थक सन्तर मूरू सार्थ स (least significant difference : LSD) विधि है जब कि,

म्बू॰ स्१० स॰ =
$$\sqrt{s_e^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)} \times t_{05(error d f) \cdot ...(21.5)}$$

सूत्र (21.5) स ६, वृद्धि वा॰ व॰ व॰ है सीर 1, व ६, विन मास्यो सी परीशा सी जा रही है अन जवबारा (वगी) की त्रमण जुनरावृत्ति सम्या है।

परि
$$r_1 = r_2 = r$$
 हो ती,
$$r_{10} = \sqrt{\frac{2}{r}} \cdot s_0^2 \qquad(21.5.1)$$

यहाँ १ $_{05}$ प्रतिसन सार्यक्ता स्तर तथा पृष्टि क्वनन्त्रता कोटिके निर्मारणीक्द्र मान्हें।

च्हाहरा 21.1 का व्यान वॉ॰ एवं॰ के लेवा, र्रावडनार्थ देशेर अपूर्णनान महत्त्वपाचन उत्तरहरू के श्रीमान के जात हुवा। यदि । का सारणीबढ मान 1 प्रतिमत मार्यकता स्तर व त्रृटि स्वनन्त्रना कोटि के लिए सुत्र में रख दें तो मन्या

$$\sqrt{\frac{2}{r}} \, s_o^2 \, t_{01(error d f)}$$

को प्रधिकतम नार्यक्ना प्रन्तर (most significant difference MSD) कहते हैं।

यदि किन्ही दो माध्यो में घन्तर न्यू० सा० घ० में सिधव या न्यू० मा० प्र० के समान हो तो यह माना जाता है वि यह साध्य मार्थव रूप में एव दूसरे में पिन्न है धौर इसके विषरोत स्थित में माध्यो वा समान प्रयांत् मजातीय समभा जाता है। न्यूनतम्मार्थव सार्थव प्रान्त के शांतिक प्राप्त के शांतिक प्रान्त के शांतिक प्

डंकन-बहुपरास परीक्षा

यह परीक्षा प्रन्य की प्रयोक्षा उत्तम है। इस वरीक्षा की विदेयता यह है कि इसमें एक स्वृत्तवम सार्यक पराम की गुगत माध्यों में घन्तर से तुलका न कर के, क्रीमक माध्य मेंची में ये एक दूसरे से किनतों दूरी पर हैं इस सम्य की भी महत्त्व दिया गया है। दूरों के माधार पर भिन्न-भिन्न म्यूननम सार्यक पराम जात किये जाते हैं भीर इन स्वृत्ततम पराम की सद्वासर पुगत माध्यों में धन्तर से तुलना कर के उनके सार्यक रूप में मिन्न होने या न होने का पता कल जाता है। यदि गुलस माध्यों में धन्तर स्वृत्तनम पराम के समान हो सहसंस मिछ हो नों वे उपकार सार्यक रूप में मिन्न कीने जाते हैं घन्यया नहीं। इन स्वीस में धन्तर हो नों वे उपकार सार्यक रूप में मिन्न भीने जाते हैं घन्यया नहीं। इन स्वीस में धन्तर हो नों वे उपकार सार्यक रूप में मिन्न भीने जाते हैं घन्यया नहीं। इन स्वीस में धन्तर की मीति, D, के मान 5% या 1% नामकता स्वर पर बी करते (B D. Duncan) द्वारा दी गई सारकी (विरि० स-15) का प्रयोग करने जात करते

हैं। इनने की बहुपराम विधि को निम्न रूप म कामान्वित कर सकते है।

- (1) उपचार मार्क्या नो दिन सार्क्या के एन भार भारोही और दूनरी भार भवरोही प्रमाम लिख लेते हैं। इस मारकी नी प्रस्तेन नोध्विना मा इन मारको ने भन्तर जिल दिवे जाते हैं। इस मनार सन सन्धव बुवन उपचार सारको ने भन्तर प्राप्त हो जाते हैं। बाहे तो मनरोही माध्य धनुनम संस्कृतनस माध्य और सारोही सनुत्रम की भोर प्रधितनम मारव छोड सनते हैं नवेशिन यह सन्तर पहुंच हो सारकी न सा जाते है।
 - (2) उपचार माध्य की मानक यूटि, सूत्र $\sqrt{\frac{s_s^2}{r}}$ द्वारा ज्ञान कर भी जानी r।
- (3) पूर्व निर्धारण व धनुसाद मार्ववना स्नर $\alpha = 05$ या 01 स्नादि स निर्व जात हैं।
- (4) उनन-मारणी द्वारा माध्यों ने दूरी p योर शूटि श्वनन्त्रना बाटि n_2 व α मा॰ स्न ॰ ने निए D_p के मान जात कर लिए जान है। इस D_0 के मान कात कर लिए जान है। इस D_0 के मान कात कर लिए जान है। इस D_0 के मान कात कर लिए जान है।

ग गुणा करने परिकारन स्थानन प्रशास कार हो जाता है। धाँघवनस व स्थानस माध्य सही 'p' उपचारों को सम्या के समाव होनी है। यह दूरी क्वस वित्त साध्यों से एक' करने पटती जाती है जैते सामा कि चांक मारोही वित्तन साध्य X_2 X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 , X_6 ,

- (5) सारको म दिव मन्तरा नो दूरी p क खतुवार न्यूननम परान स तुन्ता वरक उपचार माध्यो में मन्तर की सार्थकता क विषय म गहमें दिव नियमानुमार निर्मय कर निया जाता है। इस विधि के प्रयोग को निस्त उदाहरक द्वारा दिलाया गया है।
- (6) प्राविशिक प्रभितन्त्रता कोई भी हा, उदन की बहुबरास परीस्ता काय विधि वही रहती है। वेदन प्रभार दनना वरता होना है नि उपकारों के निए प्रभितन्त्रता के सनुसार मुटि साध्य नर्ग-योग का प्रनिन्धापन करके स्त्रुतन्त्र नाथक पराय ज्ञान कर निधा जाना है।

उदाहरण 21.2 सांधाबीन नो श्रीय प्रजातियों क युगत आपनी में सम्पर की सामेक्टा परीक्षा, उदाहरण (21.3) में दिवे न्याम तथा प्रमाण विश्वेषण को प्रयोग करने, देवन बहुपराम विधि द्वारा विस्त प्रकार कर सबने हैं।

पर्टम मात्या में मन्तर के लिए गारणी निम्त प्रकार तैयार कर सकते हैं :--

স্থাবি	त्रम सच्या	4	1	2	5	3
प्रजाति कम सस्या	माध्य	14 69	11 18	10 15	8 34	8-20
3	8 20	6 49	2 98	195	0.14	_
5	8 34	6 3 5	2 84	181	_	
2	10.15	4 54	1 03	_		_
1	11-18	3 5 1		_	_	
4	14.69		_	_	_	

साना कि इन शाध्यों में अन्तर की सार्थक्ता-परीक्षा 5 प्रतिशत सार्थक्ता स्तर पर करना है।

माध्य की मानक जुटि 5
$$\frac{1}{X} = \sqrt{\frac{s_0^2}{r}} = \sqrt{\frac{318}{4}}$$

$$= 0.89$$

सारणी (परि॰ प-15) डकन के न्यूनतम सार्थक परासो का परिकलन $a \approx 05$ प्रीर पृष्टि स्व॰ को॰ 12 के लिए इस प्रकार कर सकते हैं —

$$D_{p=3} = 3.36 \times 89 = 2.99$$

 $D_{p=4} = 3.33 \times 89 = 2.96$
 $D_{p=3} = 3.23 \times 89 = 2.87$
 $D_{n=2} = 3.08 \times 89 = 2.74$

उपचारा को प्रारोही कम में व्यवस्थित किया और उपचार माध्यों में दूरी के प्रनुसार प्रन्तरा की उकन के बहुपरास माना से तुलना कर सी गई है। निम्न लेलाचित्रीय सरणी (graphical array) में निर्धिक घन्नरा के नीचे रखा लीच दी गई है।

apinear array)	4 14(44	911111	114 (01	-414 41 4	18 81	
प्रजाति सस्या	3	5	2	1	4	

उपर्युक्त रेलाओं सं स्पष्ट है कि प्रजातियों V_3 व V_1 घोर V_3 व V_4 , V_5 व V_4 V_2 व V_4 में प्राच्य ग्रन्तर सार्थेक है और ग्रन्य युगल प्रजानि माध्यों में मन्तर निर्यंक है।

सोरियकीय प्रतिरूप उपागम

पूर्णतया याहन्छित्रीवृत सभिकत्यना, जिसस वि प्रत्यत प्रवासक्षत सकता पर सक प्रेसण सिया सुधा हो, व तिए निम्न सास्यिकीय प्रतिरूप दिया जाता है ।

$$X_{ij} = \mu + \tau_i + c_k$$
 (216)
 $i = 1, 2, K$
 $j = 1, 2, r,$

जबनि Xii] में एवज को । वां उपचार देने व पश्चात् प्राप्त प्रेशिन मान है।

म समस्त माध्य प्रदक्षित बरता है।

T, । वे उपचार का वास्त्विक प्रभाव है।

c,] वें एकव का, जिसके लिए। वी उपचार दिया गया है, बाह्य कारका के प्रभाव का प्रदक्षित करना है, इस पद की पटि भी कहते हैं।

दिष्पणी यदि सब उपचारा वे लिए समान पुनरावृति मध्या 'र हा ना

प्रतिकष (2.1.6) के स्वाधार पर प्रमरण विश्लेषण करने संबुख कल्पनार्में का जाती है जाकि निम्म प्रकार है ⊶

- (1) प्रेद्याण X₀ एक प्रमासस्य समग्र का ग्रज है।
- (2) प्रेशका Xi त सम्बन्धित सभी प्रभाव याज्य (additive) है !
- (3) प्रेशन प्रीर प्रभावी नारक रेशिन रूप म (linearly) सम्बन्धित है।
- (3) अवार्ग भार अभागा गारक रात्तव रूप म १ वावकारपुर सम्बद्ध वा ह (4) म का एक वायर माना गया ह घोर सम रा, व ८, स्वतन्त्र है।
- (5) c_{।।} का बटन प्रमामान्य के बार इसके प्राचन (0 कु-) है।
- (6) ना का बटन N (0, ०००) माना जाता है। साथ हा ≤ रा रा ≈ ए
- (7) यह भी माना गया है वि उपधारा वे प्रमरण गयासीय है। यदि प्रमरणा व सन्तासीय होन के विश्वय म शका हा ता बार्टेल (Bartlett) परीभा या स्रय विभी परीक्षा द्वारा संजातीयना की पुष्टि कर तना चाहिय।

स्थिर प्रभाव प्रतिरूप

यदि ग्रावेदण कर्ता वा कवि कवत । विश्वादा का याध्य प्रभाव जानन तक हा हो। प्रांत को प्रयाद आ भी विश्वास जात करने हा बहु दन उपवादा तक ही सीमिन रसन हा हा हम प्रवादा में किए प्रनिद्ध के प्रभाव प्रतिकृत कहते हैं। जेन उपप्र पर कि ही सादा का प्रभाव जानना हो और तिया क्षम त्याद के दिन को प्रशादा न निकासन हो या कुछ रवाद्या का प्रभाव जानना हो। जव कि या व टवाद्यो स्वाद प्रभाव जानना हो। जव कि या व टवाद्यो स्वाद प्रभाव जानना हो। जव कि या व व्याद्यो स्वाद प्रभाव जानना हो। यो सीपिकां प्रभाव का विश्वास के विष्ठ भी भी सीपिकां प्रभाव का विश्वास के विष्ठ भी क्षाद किया जाता है उमें स्विद प्रभाव प्रतिकृत या प्रतिकृत । (Model I) वहते है। इस स्वित्त मा,

$$\Sigma_i, \tau_i = 0$$
 or $\Sigma_{i} \tau_1 = 0$
or $\{\epsilon : \tau_i = t, (i=1, 2, 3, ..., k) \text{ with } E(\tau_i) = \tau$

यावृष्टिक प्रभाव और प्रतिरूप

यदि प्रयोग में ऐसे उपचारों या कारकों का प्रभाव जानना हो जो हवय किसी समग्र के मंग के रूप में हो तो इन उपचारों के लिए दिये गये प्रतिरूप नो याइन्छिक प्रभाव प्रतिरूप या प्रसरण-सपटक प्रतिरूप (Component of variance model) या प्रतिरूप ! (model II) वहते हैं। जैसे विन्हीं चूहों की जातियों में सक्षणों का प्रध्यपन करता हो नो प्रयोग में लिये गये चूहों वो प्रजाति के याइन्छिक प्रतिरूप ने रूप में माना जायेगा। इनके घाय्यपन में जो भी सक्षण प्राप्त होंगे वह प्रजाति के घाय्य चूहों के लिए वहीं मही होंगे। इसके घातिरिक्त एक प्रयोगमाला में वाम वर्षने वाले कुछ तक्षनीमानों (Technicians) की दक्षता या कुंगलता ज्ञात करना हो तो इन चारेक म से कुछ तक्षनीमानों सक्ष्म के सक्षम ज्ञाता है। इनके द्वारा जो परिणाम प्राप्त होते हैं उन्हें इन तक्षनीमानों तक सोमित्र न रत्यकर, सम्पूर्ण समुदाय के लिए संस्य सममा जाता है, ऐसे उपचारों के हेतु प्रतिरूप को याइन्छिक प्रभाव प्रतिरूप न हते हैं। इस प्रतिरूप के प्रतिरूप के याइन्छिक प्रभाव प्रतिरूप न हते हैं। इस प्रतिरूप के प्रतिरूप के याइन्छिक प्रभाव प्रतिरूप न हते हैं।

मिधित प्रतिरूप

किसी भी सास्यिकीय प्रतिरूप में म एक निश्चित प्रभाव घौर ० एक याइण्डिस प्रभाव है। इस प्रकार सभी प्रतिरूप में मिश्चित प्रतिरूप महा जा सकता है। इसके या ० के प्राधार पर किसी भी प्रतिरूप में बात प्रतिरूप में कुछ प्रभाव निश्चित हो सीत प्रतिरूप में कुछ प्रभाव निश्चित हो सीर कुछ प्रभाव निश्चित हो सीर कुछ प्रभाव याइण्डिम हो तो ऐसे प्रतिरूप को मिश्चित प्रतिरूप करहे हैं। जैसे सिसी पूर्वा की नामिय याइण्डिम हो तो ऐसे प्रतिरूप को मिश्चित प्रतिरूप कर कर के हैं। जैसे सम्बन्धी प्रभाव तो याइण्डिश हैं धीर भोजनों के प्रभाव सियर प्रवार के हैं। प्रत. इस दिखा वर्गी हत प्रयोग के लिए साह्यकीय प्रतिरूप को मिश्चित प्रतिरूप करार के हैं। प्रत. इस दिखा वर्गी हत प्रयोग के लिए साह्यकीय प्रतिरूप को मिश्चित प्रतिरूप करार के हैं। प्रत. इस दिखा वर्गी हत प्रयोग के लिए साह्यकीय प्रतिरूप को मिश्चित प्रतिरूप करार के हैं। प्रत. इस

दिष्यची किसी भी प्रतिरुप को याहाँ च्याह स्वर्था सिधित कहा जा सकता है स्वांकि यह प्रयापनती के ऊपर निर्मर करना है कि वह उपवारों या कारको के प्रभाव किस रूप में जातना चाहता है। जीते तकनीयनों की कुशनता सम्बंखी प्रयोग में कैवत उन्हीं तक परिणामां की सीमित रखा जाये जिन पर प्रयोग किया गया है तो तकनीयनों सम्बंखी प्रभाव स्थिर प्रकार के हो जाते हैं और देह स्थिति में प्रतिरुप स्थिर प्रभाव प्रप्रतिरूप कहा जायेगा। इसी प्रकार का विवेचन प्रज्य समस्यामों के लिए भी दिया जा सकता है। पत. किसी भी प्रतिरुप का प्रकार उपवारों या कारको की परिमाणा तथा उनके क्षेत्र पर प्राधारित है। यही कारण है कि प्रधिकाणतः विवेचनण स्थिर प्रभाव प्रतिरूप पर प्रमाव प्रतिरूप पर प्रमाव प्रतिरूप का सकता है। किये जाते हैं।

प्रतिरूप I व II की स्थिति मे पूर्ण बाहिन्छक समिकत्वना के लिए प्रसरण विवलेयण सारणी निम्न रूप में दी जा सनती हैं:---

प्रतिरूप I : जब प्रति उपचार पुनराङ्गृत्ति-सस्या वसमान हो ।

(सारणी 21.4)

विषरेण स्रोत	१९० को	र∙ द॰	मा॰ व॰ य॰	F-मान	प्रत्यातित मा• म• य•
उपवारो ने बीच	(k - 1)	S _{TT}	$S_{TT} = T$	T/E	$\sigma_s^2 + \frac{\sum_i r_i \tau_i^2}{(k-1)}$
प्रयोग तुटि	$ \begin{array}{l} x r_i - k \\ = x (r_i - 1) \end{array} $	See	$S_{ee} / \mathbb{I}(r_i - 1) = E$		ø,²
पूर्ण	Ση-1	ΣΣ X _{ij} 2 - 0	CF		

यदि प्रति उपचार पुनरावृति संस्था सभाग हो अर्थाद् $\epsilon_i = \epsilon$ हो तो सारणी (21.4) में, $\sum_i (\epsilon_i - 1) = k \ (\epsilon - 1)$ और $\sum_i \epsilon_i - 1 = (k\epsilon - 1)$ ने समान हो जाता है।

प्रस्थापित सा॰ व॰ य॰ मे पद $\stackrel{<}{\sim}$ $r_i = r_i^2 / k - 1 \Longrightarrow \stackrel{<}{\sim} r_i^2 / k - 1$

प्रतिरूप-11

(सारणी 215) जब प्रति उपवार पुनरावृत्ति-सस्या सससान हो

विश्वरण स्रोत	स्य+ गी०	ष० व०	मा० द० द०	F-मान	त्रत्यादित सा०१०४०
उपवारी के बीच	(k - 1)	Stt	$S_{fT}/k-1=T$	T/E	σ.1+r ₀ σ ₇ 2
प्रयोग चुटि	$\sum_{i} r_{i} - k$ $= \sum_{i} (r_{i} - 1)$	See	$S_{ee} / \mathbb{Z} (r_i - 1) =$	ΞĒ.	σ <u>.</u> 2
पूर्ण	Σ r _j = 1 Σ 1 1		CF		
	71.	× +2/3			

$$\frac{x_{r_1} - x_{r_1}^{r_2} / x_{r_1}}{(k-1)} \qquad \dots (21.7)$$

यदि सारणी (21.5) में सब उपचारों ने लिए पुनरावृत्ति सन्या समान हो प्रयान् ,= हो तो,

$$x(r_i-1)=k(r-1), x_i-1=(kr-1)$$

$$r_0 = \frac{kr - kr^2/kr}{(k-1)} = r$$
(2171)

ज़तर दो हुई सारणियों (21.4) व (21.5) से स्वष्ट है नि प्रमरण विग्लेषण दोनों प्रतिहयों वी स्थिति में बही रहता है। देवन उपर्युक्त सारणी में प्रत्यागित माध्य वर्ग योग में स्थिति के धनुसार पन्विनंन होता है। टभी धन्तर को प्रदक्षित करने के लिए उपर्युक्त मारणियों दो गई हैं। S_{TT} व See धादि का परिक्तन मारणी (213) वे प्रमुक्प है। पदानुकसानुसार वर्षोकरण की स्थिति में प्रसरण विश्लेषण

इस प्रकार के वर्गों रण नो समावेकों (nested) वर्गों वरण भी नहते हैं। नोई भी प्रध्ययन चाहे किसी प्रयाग पर धाषारित हा प्रतिदर्शी प्रध्ययन वहलाना है क्यों कि प्रयोगगत एक्क एक प्रतिचयन यूनिट वे घनुरूप है। धनक घष्ट्ययनों से प्रत्येक प्रतिचयन एक्क में से उप प्रतिचयन वर्गा होना है या प्रत्येक प्रयोगगन एक्का पर एक ही सक्षण के लिए क्ट प्रकास लेने होते हैं। जैसे —

(1) क्षेत्र प्रयोगों में प्राय पूर्ण प्रयोगगत प्रूपण्ड (plot) को उपज न लेक्ट, इसमें से कई पादो (quadrants) का याहण्छिक रोति से प्रतिचयन करके, इनकी उपज (वा धन्य किसी लक्षण) के प्रति माप ने नियं जाते हैं। इन प्रेक्षणों को प्रयोगगत एकक के प्रतिदर्श प्रेक्षण कहते हैं।

(2) एक क्षेत्र में स्थिति वीटाणुको पर किसी दवा का प्रभाव देखने या किन्हीं मन्य पदार्थी के नारण इनमें बृद्धि सादि देखने के हेतु प्रति उपचार के लिए कुछ कीटाणुमों का चयन करके समूह बना लिए जाते हैं और इन समूहो का कीटो पर इच्छिन माप ले लिए जाते हैं। एक समूह का प्रत्येक कीट एक उप-प्रनिचयन एकक के रूप में माना जाता है।

(3) किसी पेक्ट्री द्वारा जल्पादित बस्तु को प्राय कई तरह से प्रयोग करके इसकी क्षमता था गुढ्ता जानने के लिए प्रेक्षण लिए जाते हैं। इन प्रेक्षणों को उप-प्रतिचयन प्रेक्षणों के रूप से प्रयोग करते हैं।

(4) यदि एक पौधे या पेड पर एक उपकार प्रयुक्त किया गया है तो इस पर समी हुई सब पत्तियो या फनो पर किसी लक्षण के प्रति साप लेना लगभप प्रसम्भव है। धत इस पौधे या पेड से कुछ पीतियो या फनो का याइन्जिक रीति ये चयन कर तिया जाता है धौर इन चयनकुर पतियो या फनो पर प्रेषण निए जाते हैं धर्मान् उप-प्रतिचयन का प्रयोग दिया जाता है। इसी प्रकार प्रवेक स्वस्य उदाहरण दिये जा सकते हैं प्रीर उप-प्रतिचयन का प्रयोग विसी भी प्राधिकल्या वी स्थिति से किया जा सकते हैं प्रतिचयन का प्रयोग विसी भी प्राधिकल्या वी स्थिति से किया जा सकते हैं। इसी प्रतिचयन एक प्रतिचयन एक से संप्रसर्थ का प्रयोग विश्व वी स्थिति है। उप-प्रतिचयन पर्वा म विचरण ना सत्वा चल जाता है। उप-प्रतिचयन की स्थिति से प्रसरण विक्षेपण निम्न प्रवार विया जाता है —

स्थिति (क) माना कि पूर्णतया याहच्छिकीकृत समिकस्थना से k उपचार विभे गर्थे हैं, प्रत्येक उपचार की युनरावृत्ति सन्या है सीर प्रत्येक प्रयोगगत एक्क से m प्रेक्षण निर्धे गर्थे हैं।

इम ग्रभिकल्पना के लिये माग्यिकीय प्रतिरूप है,

$$X_{ijil} = \mu + \tau_i + e_{ij} + \eta_{ijil}$$
 (218)

 X_{iju} , $r_1 \approx c_{ij}$ प्रितिक (216) के धतुसार है और r_{uu} jà तक सामित । ता उपचार रिया गया है, अबे उत्पत्निवयन मृतित का प्रसाब है। इसे (1) अ) वे प्रतिवयन एक की युद्धि भी कहते हैं। इस प्रतिक्य ने प्रति भी यह बाता गया है कि अ एक सबर है और $c_{ij} \sim N(0, \sigma_{s}^{2})$ सामित $r_{ij} \sim N(0, \sigma_{s}^{2})$ का विशेष स्थित में प्रसाल विशेष सामित भी प्रमाल विशेष सारामी (21.6) के धनुवार कर सकते हैं। बहाँ परिकल्पता H_{0} $r_{ij} = r_{s} \sim 100$ की परिकल परिवास की बाती है।

सारणी (21.6) में प्रतिचयन चुटि ने निए स्व०वी०, सब्यव, पूर्व सब की। व वश्यक में से स्वयंक्षार व प्रयोग चुटि को स्व० वो० व व्यव्यक क्षतावर ज्ञान वरने हैं जैसा वि स्मार सारणी में स्वयन्द दिलामा गया है।

€.⁸ का मार्गलत मान.

$$s_e^2 = \frac{E - S}{m}$$
(21.9)

भौर i वें उपचार साध्य की सानक बुटि,

SE
$$(\overline{X}_i) = \sqrt{\frac{E}{rm}}$$
(21.10)

प्रायः E ना मान S में नम होता है (E<S) धनः e_s^2 का प्रायः न e_s^3 क्याराम हो माना है जो दि एन धनस्मन मान है। ऐसी स्थित में e_s^4 नो कृत्य मान मेते हैं तथारि मह एन धनिनम (blased) धायनक होता है। इस स्थित में उपचारों नी परीक्षा प्रति- भयन हैं। दे दिख्य नरते हैं या E a S नो बोहनर नृति मान व e_s के मर्थ में प्रयोग नरते हैं। हुछ ध्यतिक ऐसा भानते हैं दि बिंद E, S ने किया प्रतिमान करने पर निर्येष हो से अपना प्रतिमान है। हि परिक्र परिक्षा करने पर निर्येष हो से अपना प्रतिमान है। हि भी अपना है। है कि परिक्र परिक्षा है। है कि परिक्र परिक्ष करने सामित है। है कि परिक्ष है। भी अस्ति होती है।

महि प्रयोग में उपनामें नी पुनरावृति-सम्या तथा प्रयोग प्रयोग्यन एक में अतिकारी विश्वास मान मान में हो तो परिकलना मिं, $x_g \circ x_g \circ \dots \circ x_d$ उपूर्व किया मान मान में हो है। बहु प्रयोग की मानना बनाने प्रयोग मान प्रयोग मान किया प्रयोग मान प्रयोग

शिक्षति (त) माना वि पृत्र यात्र प्रत्ने विक्र मोनियवीय प्रतिनय तिकत् है, दिस्य है प्रयम्गद्र नियं एवं है, प्रत्यमद्र है, वी पुत्रनाष्ट्रीय त्रस्या हूं है स्रोत ३ वे एवल, जिसे । त्री प्रयमद्रिया गये। है, से 104, प्रयम्भियन गुरुवो की संक्ष्य है,

(सारणी 21 6) पदानुकमानुसार वर्गीकरण के तिए प्रमरण विश्तेषण सारणी

सास्यि	यकी के सि	डान्त ग्रीर ग्र	ानुप्रयोग	
प्रधासित भाश्यक्ष प्र	$T/E \left[\sigma_{\eta}^2 + m \ \sigma_{\tau}^2 + m \ \sigma_{\tau}^2 \right]$	67 + 111 € 2	262	
F-मान	T/E			
मीरु बंद बंद	$S_{TT}/_{k-1} = T$	Sec/r(k-1) =E	$-\frac{X_{H}^{2}}{m}$ = S_{XX} $S_{XX}/rk(m-1) = S$	
र्थ के संक	$\propto x_{\lambda_1/rm}^2 - \frac{G^2}{rkm} = S_{TT}$ $S_{TT}/_{k-1} = T$	$\frac{x}{1} \left\{ \frac{x}{x} \frac{X_k^2}{m} - \frac{X_l^2}{rm} \right\} = S_{cc} \left\{ \frac{x}{cc} / r(k-1) \right\} = E$	$ik (m-1) \begin{bmatrix} \sum_{i} \sum_{j} {x_{ij}^2 - \frac{X_{ij}^2}{m}} \end{bmatrix} = S_{XX}$	XXXX ² o G ³
हाल क्षेत्र	(k - 1)	k (r – 1)	rk (m – 1)	krm – 1
विचरण स्रोत	उपनारों के बीच	प्रयोग मृटि	प्रतिषयन युद्धि	1ti

$$X_{i_0} = s + r_1 + c_{ij} + q_{ij}$$
 (21 ii)
 $i = 1, 2, 3,, k$
 $j = i, 2, 3,, r_1$
 $u = 1, 2, 3,, m_n$

इस प्रकार की स्पिति समाज विज्ञान, पणु अनुविधिकी (Animal genetics) या वनस्पति विज्ञान साहि से प्राय पाई जाती है क्योंकि इनमें एक कुछ (family) धौर प्रायेक कुछ कि नार्किक सम्बद्धित या प्रमेद स्थित स्थाय समाज स्थाय स्था

$$H_0: \tau_1 \simeq \tau_2 \simeq \simeq \tau_K$$

की परीक्षा प्रसदश विश्लेषण सारणी (21.7) बनाकर की जा सकती है।

जबनि n=1 1 mg = उपप्रतिचयन एक्को की कृत शरपा

यहाँ

$$a_{1} = \frac{n - \frac{x_{1}}{2} \left(\frac{x_{1} m_{1}^{2}/x_{1} m_{1}}{x_{1} \left(x_{1} - 1 \right)} \right)}{\frac{x_{1}}{2} \left(x_{1} - 1 \right)} \dots (21.1 - 1)$$

$$\mathbf{R}_{g} := \frac{\sum\limits_{i} \left(\sum\limits_{j} m_{ij}^{2} / \sum\limits_{j} m_{ij} \right) - \sum\limits_{i} \sum\limits_{j} m_{ij}^{2} / n}{\left(k-1\right)} \qquad \left\{21.13\right\}$$

यदि प्रतिरुप 11 का प्रयोग करें तो त्रकरण विश्लेषण सारणी(21,7) वे सनुत्र होगी। के त्रवारो के प्रायाणिक मान में प्रान्तर हो जायेगा। इस स्थिति में प्रायाणिक उपचार मा० प० $\sigma_1^2+a_2\sigma_2^2+a_3\sigma_3^2$ के समान होता है, यहाँ

$$a_{2} = \frac{n - x (x m_{ij})^{2}/n}{(k-1)} ...(2114)$$

H₀: कु=क्व_{र्ड}=...=क्व्र की वरीया सारणी (21.7) हारा परिमृद्ध नहीं होनी है क्योंकि कुर्द्ध है। यह वहीं नक सम्भव हो ससमान पुनरावृति नथा सममान उपयंतिषयन एकको की सरवा को प्रयोग म नहीं नेता बाहियं। यदि ऐसा करना सावश्यक हो हो यह स्थान रक्तना बाहियं कि उपवारों के प्रति परीक्षा परिमृद्ध नहीं है।

गानुनमानुनार वर्गनिक्षा की मिन्नि स सम्य समित्रस्थनाओं के निक् विक्षेत्रक सनुक्य मार्ट्यी नगाकर कर सानते हैं। मार्ग्यी से समित्रस्थनाओं के सदुवार विकास स्थान बढ़ जाते हैं जिनके निक् तक्ष्मृतार स्थनन्त्रता-बोटि तथा क्ये सोस स्थानिकार कर निक् जाते हैं।

Trest 21.7)

मिक्टण स्रोड	è	a he h	मांक संक संक	F-मान	মংঘালিত সাল্ধান্থ
उपवारों के भी व	(k - 1)	X,2 G ² =S _{TT}	S _{TT} /k-1	T/E	$\left \sigma^{2}_{\eta} + a_{2} \sigma^{2}_{\bullet} + \frac{x(x n_{\parallel}^{2}) r_{\parallel}}{(k-1)} \right $
प्रयोग चुटि	м (г _і – 1)	$\sum_{j} \left\{ \frac{X_{ij} Z_{i}}{j} - \frac{X^{2}_{i, \cdot}}{m_{i}} \right\} = S_{00}$	$S_{ou}(\mathfrak{X}(\mathfrak{r}_{i}-1))$ $= \mathbb{E}$		63 + a16.2
प्रतिषयन चृद्धि	xx(m,-1)	$\sum_{j,j} \left\{ \sum_{ij} X^2_{iju} - \frac{X^2_{ij}}{m_{ij}} \right\} = S_{xx}$	$S_{xy}/xx(m_y-1)$ i j		م _ب ع
पूर्ण	(n - 1)	xxx X3gu-G2			

प्रप्राप्त मान

यदि एक तरका वर्गीकरण से कोई मान सुन्त हो गया हो तो इसका सावसन करने यी प्रावर्थकता नहीं होती है। इस प्रयोगगत एकक को छोड़ दिया जाता है जैने कि यह प्रयोग से मम्मिस्स ही नहीं था: किसी भी प्रयोग से मान सम्रान्त होने की स्थिति प्रनेव निरायों से उत्पन्न हो सकती है जीने कीट या पणु सम्बन्धी प्रयोग से यह सम्भव है कि प्रयोग समाप्त होने से पूर्व ही कीट या पणु को मुख्य हो जाये। क्षेत्र प्रयोगों में किसी भूत्रक की उद्युज को पणु हारा रेस जाने या कट कर देने के कारण या याग कमा जाने के कारण या कभी कभी किसी मन्य कारण से उपन ही न होने के कारण मान प्रमान हो जाते हैं, इसी प्रकार सम्य प्रयोगों से भी कुछ सन्य कारणों में समाप्त मान हो गकते हैं। पूर्णक्या वाह्मिछारीष्ट्रत समित्रक्षना की क्यित से इन समाप्त या मानो को छोड़ दिया जाता है सीर स्वास के प्रसत्त विस्तेषक से स्वयन्त्रता कोटि सेव प्रेसको के तक्ष्मार विद्य जाता है है। योग प्रेसको का सामास्त रूप में प्रमत्य विक्तेषक करने परिचाम निकास विद्य जाती है है। योग प्रेसको का सामास्त रूप में प्रमत्य विक्तेषक करने परिचाम निकास

दिया वर्गीकरण की स्थित में प्रसरण विश्लेषण

हिसी प्रयोग नी योजना बानि से पूर्व, प्रयोगनत एक्कों के विषय से जातना सरवाल साध्यस हो जाता है। इस विषय से सनिभाता होने पर यह सम्प्रव है कि जो उपकारों के बारण महीर प्रवृक्ष होने विषयान दिवसण के बारण में होनर एक्कों में विषयान दिवसण के कारण में होने एक्कों होते हैं। इससे यह सहेर पिताल हैं। ऐसी दिविन से उपकारों के ब्रांत निर्मय स्थाय नहीं होते हैं। इससे यह सहेर पिताल हिंदे था बात. एक्कों मि विकास होने की विस्ताल में इससे यह सहेर के विकास होने ही हिंदी साथ स्थाय होने ही है। इससे यह सहार कर कर साथ होने ही साथ साथ स्थाय होने ही साथ साथ होने हैं। साथ साथ साथ होना हो। इस साथ साथ हो सोर प्रयोग उपकार एक क्यों से एक बार सवस्य होना हो। इस साथ साथ होना हो। इस साथ साथ होना हो।

- (!) क्षेत्र प्रयोगो में वर्गीन रूप भूमि या किट्टी की उर्वरदाने काचार पर नरना होता है।
- (2) यह सममा जाता है कि एन ही फेनदी डारा 'जरगारित बन्तु या पराप दरला या समता या सन्य गुणी मे एन समान होते हैं । अता निष्ठी वर्ष में एन पैनदी हारा झत्यारित पानगुँ सेना जीवन है ।
- (3) वनु सम्बन्धी ब्रह्मयनों से बायु, नस्त्र था बारीरिक भार पादि के प्राचार कर सम्बन्ध की रक्ता की वाती है।
- (4) सर्वेशण शस्त्राधी प्रस्थानो भ पारिवारिक बाय, परिवार ने बरायों को सन्धा, स्पृतिमों ने प्रिया स्तर, रहने वे स्थान, बादि निक्य के बाबार पर वर्षीकरण बा स्तरीकरण विद्या जाता है।

इस प्रशास के उत्ताहरणों भी वोई क्षोगा नहीं है। यहां देवण समझने भी हिस्ट से सर्गीरुप्त के निष् नुख स्थितियाँ भी गई है। इस वर्गीकरण ने अन्तर्गत सदैव दो नारनों के प्रति परिकल्पनाथी नी परीक्षा करनी होती है। एक तो वर्गों के माध्यों को समानता के प्रति और दूसरी उपचारों ने माध्यों की समानता ने प्रति साह्यिकीय परीक्षा करनी होती है। यही कारण है कि इन वर्गीहत प्रयोगों को द्विया वर्गीकरण माना जाता है। द्विया वर्गीकरण के आधार पर रिचत प्रयोग पाइच्छिकीकृत पूर्ण सण्डल अभिकल्पना या॰ स्व अ (Randomized complete block devign: RBD) कहलाते हैं।

टिप्पणी: प्रपूर्ण खण्डक प्रमिक्त्पना (Incomplete block design) भी द्विया वर्गीकरण पर ब्राथारित होते हैं। या॰ व॰ घ॰ वे खिए बुछ प्रन्य प्रतिवन्ध भी होते हैं।

एक याइण्डिनी हत संपडन प्रिमित्स्पना बहु है जिसमें नि सजातीय प्रयोगान एक्टो का बागें या लण्डनों में बिनियान कर निया जाना है। इस लण्डक में एक्टो ने सिक्या, उपचारी की सक्या के समान होती है भीर प्रत्येन खण्डक में स्वतन्त्र भीर याइण्डिकी हत विश्वि से उपचारों का प्रयोगनत एक्को में विनियान कर दिया जाता है। इस प्रकार कर्योक्टल द्वारा मर्थात् लण्डनों की पत्ता से एक भीर विचयण लोत की तियश्चित कर निया जाता है जिससे कि प्रयोग की दक्षता वह जाती है। साना कि याइण्डिकीहत पूर्ण लण्डक मिक्टलना में में उपचार है जीर पुनराजित सक्या (खण्डकों की सर्वा में इस प्रकार के प्रयोग को करने के प्रवाय प्रति कर में स्वयंत्र कर सकते हैं:—

सारणी (218)

वपचार			पुनरावृत्ति या खण्डक	योग	माध्य
	1	2	3 jt		
1	Х ₁₁	X ₁₂	X ₁₃ X ₁₁ X _{1r}	X ₁	\overline{X}_1
2	X_{21}	X_{22}	X ₂₃ X ₂₁ X _{2r}	X ₂	X 2'
3	×31	X32	X_{33} X_{3j} X_{3r}	Xa	X a
1	ź,	$X_{\prime 2}$	X ₁₅ X _{ij} X _n	x,	Į. Ži
k	\dot{x}_{κ_1}	$X^{\kappa_{2}}$	$\mathbb{X}_{K3}\mathbb{X}_{KJ}\mathbb{X}_{Kr}$	$\mathbf{x}_{\kappa}^{\mathbf{i}}$	$\overline{\mathbf{x}}_{\kappa}$
योंग	X ₁	X,	X ₃ X _j X,	X⇒G	

पूर्ण प्रेक्षणो की सख्या=kr

उपर्युक्त सारणी में (i,j) वौ प्रेक्षण X_{ij} कहलाता है ग्रष्टीत् i उपचार जो j वीं पुनराष्ट्रित में प्रयोगगत एकको को दिया गया है उसका किसी लक्ष्ण के प्रति लिया गया मान X_j है i

मात्रा कि
$$X_i \sim N \ (\mu_i, e^2)$$

जहां $i = 1, 2, 3,, k$
 $j = 1, 2, 3,, r$.
 r
 $x = x X_j = x X_i = G = X$.
 $i = 1$ $i = 1$

यारिन्धिन पूर्ण सण्डक समिकल्पना यर साधारित या द्विधा वर्गीकरण के सन्तर्यंत क्ये गर्थ प्रायेषण द्वारा प्राप्त ग्यास का प्रसरण विक्षेत्रका पूर्ण यारिन्छकीका समिकल्पना भा एक तरका वर्गीक्षण के समस्य ही क्या जाता है। इसके लिए क्येज इनना धन्तर करना होता है कि प्रसरण विश्लेषण सारकों से एक विचरण खोत पुतरावृत्ति या खण्डकों के वारण सीर बढ़ जाता है। दूसरे इस स्थिति से उपवारों की पुतरावृत्ति-सक्या सर्वेद समान होता है।

याह्निस्तिकृत पूर्ण लण्डन प्रशिवन्त्यना ने लिए रैलिक सास्थिनीय प्रतिरूप जिसमे नि प्रतिरूप एक पर एक प्रेक्षण निवा गया हो किन्त होता है —

$$X_{ij} = s + \tau_1 + \beta_1 + \epsilon_{ij}$$
 (21.15)
we fee $i = 1, 2, 3, ..., N$

j=1,2,3,......

प्रतिरुप I के लिए, $\Sigma \tau_i = \Sigma \beta_i = 0$ तथा E $(\tau_i) = \tau_i$ व E $(\beta_i) = \beta_i$

प्रतिरूप मे ॥ समय माध्य है, r_p , वें उप ग्रार ना नास्तविक प्रभाव है, β_p , कें सचक का नास्तिक प्रभाव है धीर c_q , (1,1) वें एवर ना चृदि प्रभाव है, प्रापेक c_p , स्वतःश्र है धीर N $(0, \sigma_*^2)$ बटिन है। यही परिनस्वनायों

 H_0 $\tau_1 = \tau_p$ को H_3 $\tau_1 \neq \tau_p$ ने दिस्द परीक्षा (प्रतिरूप I) में नरनी होती। है जबकि $t \neq p$ और $\Sigma \tau_1 = 0$ । इसी प्रकार

 $H_0 \cdot \beta_1 = \beta_1$ थे $H_1 \cdot \beta_1 \neq \beta_1$ वे बिकड परीक्षा करनी होती है, जबिर $1 \neq l$ मीर $X \cdot \beta_1 = 0$ । स्थुनाथ वर्ग विधि का प्रयोग करके प्रावची का प्रस्तन कर लिए जाता है और वर्ग योग जान कर लिये जाते हैं जिछकी गणिनीय स्थुलिन निम्न प्रकार है.— साहिएकीय प्रतिकल्प (21.15) के स्थिर प्रभाव प्रतिकल्प की स्थित में प्रायमक तथा वर्ग-योग यही जान किये गर्म हैं —

(21.15) के प्रदुषार,

बा

$$c_{ij} = \{X_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j\}$$

 $c_{ij}^2 = \{X_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j\}^2$

ममस्त प्रेशमा के लिए दोग लेन पर,

$$\sum_{i} \sum_{i} e_{ij} = \sum_{i} \sum_{i} (X_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_i)^3$$

माना कि

$$Q = \sum_{i} \sum_{j} (X_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j)^2$$

न्यूनतम वर्ग-विधि के बन्तर्गत र र e ॄर्र को न्यूनतम करना होता है। मत: Q रा

 s, τ_1, β_1 के सम्बन्ध में जनगः धारिक धवकतन करके पून्य के नमान रखने पर s, τ_1, β_1 के धावलक जात हो जाते हैं।

$$\frac{\partial Q}{\partial \mu} = 2 \sum_{i} \sum_{j} (X_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j) = 0$$

$$\mathfrak{A} \qquad \Sigma \leq (X_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_i) = 0$$

$$\sum_{i} \sum_{j} X_{ij} - \sum_{j} \sum_{i} \beta_{i} - \sum_{j} T_{i} - \sum_{j} T_{i} - \sum_{j} \beta_{j} = 0$$

$$\sum \sum X_{ij} - k r \stackrel{\triangle}{P} = 0$$

$$\begin{array}{ll}
\stackrel{\text{A}}{\longrightarrow} & \sum_{i} \sum_{j} X_{ij} / \text{kr} \\
& = X
\end{array}$$

... (21.16)

इसी प्रकार

$$\frac{\dot{a}}{\partial \tau_{1}} = -2 \sum_{j} (X_{ij} - \overset{\wedge}{\rho} - \overset{\wedge}{\tau_{1}} - \beta_{j}) = 0$$

$$= \sum_{j} (X_{ij} - \overline{X} - \overset{\wedge}{\tau_{1}} - \beta_{j}) = 0$$

$$= \sum_{j} X_{ij} - \sum_{j} \overline{X} - \sum_{j} \overset{\wedge}{\tau_{1}} = 0$$

$$= \sum_{j} X_{ij} - \sum_{j} X_{ij} - \sum_{j} X_{ij} = 0$$

$$= \sum_{j} X_{ij} - \sum_{j} X_{ij} - \sum_{j} X_{ij} = 0$$

$$= \sum_{j} X_{ij} - \sum_{j} X_{ij} - \sum_{j} X_{ij} = 0$$

with
$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_1} = -2 \sum_i \{X_i - F - \tau_1 - \hat{\beta}_i\} = 0$$

at $\sum_i X_i - \sum_i \bar{X} - \sum_i \hat{\beta}_i = 0$

$$X_i - k \bar{X} - k \hat{\beta}_i = 0$$

$$\hat{\beta}_i = \frac{X_i}{k} - X$$

$$= (\bar{X}_1 - \bar{X}_1) \qquad(21.18)$$

प्रसरण विक्तेपण मारणी (214) व दिये वर्ष वागा का इस प्रकार समझाया जा सक्ता है। पूर्ण प्रमरण का विज्ञादिन करने जिल्ला क्या मिला जा सक्ता है जिसमा कि सीधी धीर के अध्यक्षक क्रमक लक्ष्यक, उपचार धीर कृटि वर्ष योग की निक्षिण करते हैं। जूटि वर्ष योग सर्वेदा पून वग योग ने धन्य वर्ष योगा के शेण का खन्तर लेकर ज्ञान किया आ सक्ता है। धना

$$\begin{array}{c} \sum_{i,j} (X_{ij} - \overline{X})^{2} = \sum_{i,j} \sum_{j} \{ (\overline{X}_{1} - \overline{X}) + (\overline{X}_{1} - \overline{X}) \\ + (X_{4} - \overline{X}_{1} - \overline{X}_{1} + \overline{X}) \}^{2} \\ = \sum_{i,j} \sum_{j} (\overline{X}_{1} - \overline{X})^{2} + \sum_{i,j} (\overline{X}_{1} - \overline{X})^{2}, \\ + \sum_{i,j} (X_{4} - \overline{X}_{1} - \overline{X}_{1} + \overline{X})^{2} & (2119) \end{array}$$

बराहि मभी बजीय गुणनपार (cross product) यह जून्य के समान हैं।

$$\begin{split} \Sigma & \stackrel{\cdot}{\times} (X_4 - \overline{X})^2 = k \stackrel{\cdot}{\times} (\overline{X}_1 - \overline{X})^2 + r \stackrel{\cdot}{\times} (\overline{X}_1 - \overline{X}) \\ & + \stackrel{\cdot}{\times} \stackrel{\cdot}{\times} (X_4 - \overline{X}_3 - \overline{X}_1 + \overline{X})^2 \\ = & \left(\stackrel{\cdot}{\times} \frac{X_1^2}{k} - \frac{G^2}{kr} \right) + \left(\stackrel{\cdot}{\times} \frac{X_1^2}{r} - \frac{G^2}{kr} \right) + \frac{1}{2} f_{\mathcal{E}} \stackrel{\cdot}{\times} \sigma_{\mathcal{E}} \\ & \dots (21.191) \end{split}$$

=सारह व॰ य॰ † उपबार व॰ य॰ † पुटि द॰ य॰

माध्य वर्ग योगों के प्रत्यासित मान

(21.15) सन पर विवार प्रभाव प्रतिकार की स्थिति में,

जबिक
$$\Sigma r_i = \Sigma \beta_i = 0$$
 सीर $c_{ij} \sim \mathbb{N} \{0 \text{ o. }^2\}$

प्रतिरूप को । के सम्बन्ध म ओडकर वास भागदेन पर

$$\frac{1}{r} \sum_{j} X_{ij} = \mu + \tau_{i} + 0 + \frac{1}{r} \sum_{j} c_{ij}$$

$$\bar{X}_{i} = \mu + \tau_{i} + \frac{1}{r} c_{i}$$

$$= \mu + \tau_{i} + \frac{1}{r} c_{i}$$
(21 20)

इसी प्रकार प्रतिरूप को । कंसम्बन्ध भंजोडकर, k. संभाग देने पर

$$\overline{X}_{j} = F + \beta_{j} + \overline{e}_{j}$$
 .(21 21)

सद । व । के सम्बन्ध म जाडकर, kr स भाग दन पर,

$$\frac{1}{kr} \underset{i}{\Sigma} \underset{j}{\Sigma} X_{ij} = \mu + \frac{1}{kr} \underset{i}{\Sigma} \underset{j}{\Sigma} \varepsilon_{ij}$$

 $\overline{X} = \mu + \overline{e} \qquad (21 22)$

(1) त्रिट बर्ग-योग का प्रस्याशित मान --

(21 19) द्वारा यह विदित है कि,

ৰূতি ৰও ধণ
$$(S_{EE}) \Rightarrow \Sigma \Sigma (X_{ij} - \overline{X}_{ij} - \overline{X}_{ij} + \overline{X})^2$$

🗓 🗓 🗓 प्र व 🎗 के उपमुक्त दिये मान रखने पर,

$$\begin{split} & \sum_{EE} = \sum_{e} \sum_{i} \left(\mu + \tau_{1} + \beta_{1} + c_{i} - \mu - \beta_{1} - \overline{c}_{1} - \mu - \tau_{1} - \overline{c}_{L} + \mu + \overline{c} \right)^{S} \\ & = \sum_{e} \sum_{i} \left(c_{ij} - \overline{c}_{1} - \overline{c}_{1} + \overline{c} \right)^{2} \\ & = \sum_{e} \sum_{i} \left(c_{ij} + \overline{c}_{1}^{2} + \overline{c}_{1}^{2} + \overline{c}_{2}^{2} - 2c_{1} - \overline{c}_{1} - 2c_{ij} \overline{c}_{1} \right) \\ & = \sum_{e} \sum_{i} \left(c_{ij} + \overline{c}_{1}^{2} + \overline{c}_{1}^{2} + \overline{c}_{2}^{2} - 2c_{1} - \overline{c}_{1} - 2c_{ij} \overline{c}_{1} \right) \\ & = \sum_{e} \sum_{i} \left(c_{ij} + \overline{c}_{1}^{2} + \overline{c}_{1}^{2} + \overline{c}_{2}^{2} - 2c_{1} \overline{c}_{2} \right) \\ & = \sum_{e} \sum_{i} c_{ij} + \sum_{e} \overline{c}_{j}^{2} + r \sum_{e} \overline{c}_{j}^{2} + r \sum_{e} \overline{c}_{i}^{2} + r \sum_{e} \overline{c}_{i}^{2} \right) \\ & = \sum_{e} \sum_{e} \sum_{i} c_{ij} - 2 \sum_{e} \sum_{e} c_{ij} + \sum_{e} c_{ij}^{2} \\ & = \sum_{e} \sum_{e} \sum_{e} c_{ij} - 2 \sum_{e} \sum_{e} c_{ij} - 2 \sum_{e} \sum_{e} c_{e} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i} \sum_{j} \frac{1}{i} + k \sum_{i} \frac{1}{i} + r \sum_{i} \frac{1}{i} + k r \frac{1}{e^{2}} - 2k \sum_{i} \frac{1}{e^{2}}$$

$$= 2r \sum_{i} \frac{1}{i} + 2k r \frac{1}{e^{2}} + 2k r \frac{1}{e^{2}} - 2k r \frac{1}{e^{2}} - 2k r \frac{1}{e^{2}}$$

$$= \sum_{i} \sum_{j} \frac{1}{e^{2}} - k \sum_{i} \frac{1}{e^{2}} - r \sum_{i} \frac{1}{e^{2}} + k r \frac{1}{e^{2}}$$

$$= \sum_{i} \sum_{j} \sum_{j} \frac{1}{i} - r \sum_{i} \frac{1}{e^{2}} + k r \frac{1}{e^{2}}$$

$$= \sum_{i} \sum_{j} \sum_{j} \sum_{i} \sum_{j} \frac{1}{e^{2}} - k \sum_{i} \sum_{j} \sum_{j} \sum_{i} \sum_{j} \sum_{j} \sum_{i} \sum_{j} \sum_{i} \sum_{j} \sum_{j} \sum_{i} \sum_{j} \sum_{j} \sum_{i} \sum_{j} \sum_{i} \sum_{j} \sum_{i} \sum_{j} \sum_{j} \sum_{i} \sum_{j} \sum_{i} \sum_{j} \sum_{j} \sum_{i} \sum_{j} \sum_{i} \sum_{j} \sum_{j} \sum_{j} \sum_{j} \sum_{i} \sum_{j} \sum_{j} \sum_{i} \sum_{j} \sum_{j} \sum_{j} \sum_{i} \sum_{j} \sum_{j} \sum_{j} \sum_{i} \sum_{j} $

हम जानते हैं वि बृद्धि मा॰ व॰ य॰ $= \frac{1}{(r-1)(k \ 1)}$ S_{EE}

🙏 बृटि माध्य वर्ग-योग का प्रत्यानित मान

$$E \left\{ \frac{1}{(r-1)(k-1)} S_{k\ell} \right\} = \frac{1}{(r-1)(k-1)} E \left\{ S_{k\ell} \right\}$$

$$= \sigma_0^2 \qquad (19.23)$$

(u) उपचार माध्य वर्ग-योग का प्रत्यांशित मान

(21 19) भी सहायता है,

उपचार ष॰ य॰ (S_{17}) = $\Sigma \Sigma (\overline{X}_1 - \overline{X})^2$

(21 20)
$$\hat{\mathbf{n}} = \overline{\lambda}_1 \text{ wit } (21 22) \hat{\mathbf{n}} = \overline{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}} + \hat{$$

$$= r \sum_{i} r_{i}^{2} + r \sum_{i} E(\overline{e_{i}}^{2}) - kr E(\overline{e^{2}})$$

धतः धद E (द.2) धौर E (ट2) जात करना है।

$$\begin{aligned} (\overline{c_r}^z) &= \left(\frac{1}{r} \sum_j c_{ij}\right)^z \\ &= \frac{1}{r^2} \sum_j c_{ij}^z + \frac{1}{r^2} \sum_{j \neq j'} c_{ij} c_{ij'} \\ &= \frac{1}{r^2} \sum_j c_{ij}^z + \frac{1}{r^2} \sum_{j \neq j'} c_{ij'} c_{ij'} c_{ij'} \\ &= \frac{1}{r^2} \sum_j c_{ij}^z & N \left(0, c_{ij}^z\right) \text{ afor } \xi i] \end{aligned}$$

$$E(\overline{c_i}^2) = \frac{1}{r^2} \sum_{j} E(c_q^2)$$

$$= \frac{1}{r^2} \sum_{j} V(c_q)$$

$$= \frac{1}{r^2} \sum_{j} V(c_q)$$

इसी प्रकार.

$$(\overline{e^2}) = \left(\frac{1}{\frac{1}{kr}} \sum_{i} \frac{e_i}{k}\right)^2$$

$$= \sum_{i} \sum_{j} e_i^2 / k^2 r^2 + \frac{1}{k^2 r^2} \sum_{i \neq i'} \sum_{j \neq j'} e_i e_{i'}^{r'}$$

$$E(\overline{e^2}) = E\left(\frac{1}{kr} \sum_{i} \sum_{i} e_i\right)^2$$

$$=\frac{1}{\lambda^2 r^2} \sum_{i} \sum_{j} E\left(\epsilon_{i}^2\right) +$$

$$=\frac{1}{12r^2} \quad \begin{array}{cc} \Sigma & \Sigma & E \left(c_i c_i' \right)' \\ i \neq i' j \neq j \end{array}$$

$$= \frac{1}{k^2 r^2} \text{ kr } \sigma_a^2 + 0$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{k r^2}$$

$$E (S_{TT}) = r \sum_{i} \tau_{i}^{2} + r \sum_{i} \frac{\sigma_{e}^{2}}{r} - kr \frac{\sigma_{e}^{3}}{kr}$$

$$= r \sum_{i} \tau_{i}^{2} + k \sigma_{e}^{3} - \sigma_{e}^{3}$$

$$\Rightarrow r \sum_{i} \tau_{i}^{2} + (k-1) \sigma_{e}^{2}$$

उपचार मा \bullet व \bullet व \bullet (T) = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ S_{rr}

$$E (T) = \frac{1}{(k-1)} E(S_{TT})$$

$$\frac{r}{k-1} \leq r_1^2 + \sigma_2^2$$

इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि प्रतिकृप 11 के धातग्रेत

$$F(T) = r \sigma_a^2 + \sigma_a^2$$

(21.21)
$$= (21.22) = 1$$
 agrees $= S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (s + \beta_j + \overline{c_j} - s - \overline{c_j})^2$
 $= k \sum_{j=1}^{n} \beta_j + k \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j}^2 - k \overline{c_j}^2$

मंद E (हैं, ट) ब्रात करनाहै। E (टेंट) का (॥) में ब्रात क्या का पुताहै।

$$\begin{split} \mathbb{E}\left(\overline{e_i^2}\right) &\cong \mathbb{E}\left(\frac{1}{k}\sum_i e_{ij}\right)^2 \\ &\cong \frac{1}{k^2}\sum_i \mathbb{E}\left(e_i^2\right) + \frac{1}{k^2}\sum_{i \neq i'} \mathbb{E}\left(e_i^i e_{i'}^i\right) \end{split}$$

$$= \frac{1}{k^2} \sum_{i} \sigma_i^2$$

$$= \sigma_i^2/k$$

$$\therefore \quad E(S_m) = k \sum_i \beta_i^2 + k \sum_i E(\frac{\sigma_i^2}{e^2}) - kr E(\frac{\sigma^2}{e^2})$$

$$= k \sum_i \beta_i^2 + k \sum_j \frac{\sigma_i^2}{k} - kr \frac{\sigma_i^2}{kr}$$

$$= k \sum_i \beta_i^2 + r \sigma_i^2 - \sigma_i^2$$

$$= k \sum_j \beta_i^2 + (r-1) \sigma_i^2$$

$$= k \sum_j \beta_i^2 + (r-1) \sigma_i^2$$

$$\therefore \quad E(B) = E(\frac{S_m}{r-1})$$

$$= \frac{1}{(r-1)} E(S_m)$$

इसी प्रकार यह निख किया जा सकता है कि प्रतिरूप 11 के अन्तर्गत.

$$E(B) = k \epsilon_R^2 + \epsilon_0^2$$

बाइच्छित पूर्ण सम्प्रक प्रित्रस्थना के लिए सब्दर्श के प्राक्तित मान तथा प्रत्यागित
माध्य वर्ग योग शात करने की विधि का उपर्युक्त वर्णन, पाठकों को विधि से प्रकार कराने
सभा इन दोनों के तास्पर्य को बताने की हिस्ट से दिया गया है। उपर्युक्त वर्णन एक प्रयोगमत एक पर एक प्रेराण लिए जान की स्थिति में दिया गया है। इसी विधि का प्रकृत्यों
करते हुए भावनक एव प्रत्याधित सम्मय वर्ष योग मन्य स्थितियों तथा विभिन्न प्रित्रस्थन
नायों के निए बात किये जा मनते हैं। इस सभी में परिवर्तन प्रतिकस्थना के सिए निये
गयं मारियकीय प्रतिक्ष के प्रतुतार करका होता है।

 $=\frac{k}{r-1} \Sigma \beta_1^2 + \sigma_0^2$

उपर्युक्त वर्ग यागा तया प्रत्यातिक खड्ड वर्ष योगा का प्रयोग करने निम्न प्रसरण विस्तेषण सारणी (219) सुगमता से तैयार की जा सकती है।

(सारची 219) या ब्स ब्यं के लिए प्रसरण विष्मेषण सारणी

		प्रसरण-वि	स्लेयण			
प्रत्याधित मा० व० म० (८०)	7.	$G_0^3 + \frac{r}{k - 1} \sum_i \sum_i 3 = G_0^3 + k \sigma_T$	F.*			
F-479	m °°	H #*				
(At)	_	$\frac{s_{TT}}{k-1} = T$	SEE =1,2			
(III)	1 2X3 - G3 Sr	$\frac{1}{r} \propto X_1^2 - \frac{G^2}{kr} = S_{TT}$	$(r-1)(k-1)$ $x = x_0^2 - \frac{1}{k} = x_1^2$	~ 1 x,3 + G3 = SEB	ZZX ² G ³	
FT. \$70 (11)	(r - 1)	(k - 1)	(r-1)(k-1)		1 - J	
किएग्य प्रोप्त (1)	AZA.	उत्तकार	प्रयोग चुटि		E	

एक उपचार माध्य की मानकत्रुटि
$$S \ E = \int rac{\overline{s_e^2}}{r}$$

हो उपचार माध्यों में बन्तर ($\vec{X}_1 - \vec{X_p}$) जबकि । $\neq p$, की मानक तृिंट

S.
$$E = s_e \sqrt{\frac{2}{r}} = \sqrt{\frac{2 s_e^2}{r}}$$

s,2, e,2 का ग्राकतित मान है।

र्कृका भी भावलन विया जासवता है। मानाकि र्वृका भावलित मान ऽर्व हैजब कि

$$s^2_{T} = \frac{T - s_0^2}{r}$$

यदि चाहें तो इसी प्रकार θ_b^2 का धारितन मान ς_b^2 , सुत्र $\frac{B-E}{k}$ gitt ब्रात कर सकते हैं। किन्तु व्यवहार में केवन उपवारों में ही मुख्यता रूपि होने के कारण, ς_b^2 का मान ब्रात नहीं किया जाता है '

उदाहरण 21.3 होयाबीन की पाँच प्रजातियों में मन्तर की परीक्षा करने के हेतु एक प्रयोग किया गया। प्रयोग का विन्यात यादिष्टाकी हत पूर्ण खण्डक प्रिक्तरणना या जिसमें की चार खण्डक थे। इस प्रयोग डास प्रति भूखण्ड उपव (किसी॰ में) निम्न प्रकार थी —

(10×15 मी॰) प्रति पूसण्ड सोयादीन की उपव (किसो॰ में)

ক্ষ	দাধীবীৰ মুমারি	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	योग	माध्य
1	बाग (Bragg)	11 43	9 58	12 70	11 00	4471	11.18
	सी (Lee)	8 54	8 93	9 42	13 70	40 59	10 15
	सी-68 (Lee-68)	6 01	6 56	7 9 5	12 30	32 82	8 20
	त्रे o – 3 (J–3)	15 00	1599	14 82	1297	58 78	14 69
	पुजाब-1 (Punjab 1)	7 54	7 22	8 97	965	33 38	8 34
_	योग					2102	

ত্ৰসাহতে (213) বা আদ যী ৰীত ত্ৰত গ্ৰহাৰ, যত ভূষি মসৰিবালৰ, সম্মুদ, ক শীত্ৰন নী

स॰ वा॰ =
$$\frac{(210\cdot28)^2}{20}$$
 = 2210 हम
प्रवासि व॰ प॰ = $\frac{1}{2}$ (44 712 + + 33 382) - स॰ वा॰
= 2323 25 - 2210 88
= 112 37
सन्दर्भ व॰ प॰ = $\frac{1}{8}$ (48 522 + + 59 622) - सं॰ वा॰
= 2228 18 - 2210 88
= 17 30
पूरों प॰ प॰ = (11 432 + 8 542 + + 12 972 + 9 652)
- पं॰ वा॰

प्रमारण विश्लेषण सारणी

m167 68

विचरण सीव	रवन मीन	Mode	মাণ্ডাংয়	F-मान
संबद्धः	3	17:30	3 76	576 318=181
ম ৰাবি	4	112-37	28 09	28 09 == 8 83
দৃ্তি	12	38 01	3-18	
पूर्ण	19	167 68		

सारणी (प-52) द्वारा $\Gamma_{123}=349$ को वि 181 से ब्रांगित है बत यही H_4 $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4$ को त्वीकार कर निया जाता है जिनका प्रश्नियां है कि सम्बन्धों से सार्वक प्रास्तु नहीं है।

इसी प्रकार सारणीवड $F_{05.618} = 3.26$ जो कि 8.83 ने कम है धन

को सस्वीकार कर दिया जाता है। इसका सिम्माग है कि सोबाबीन की अवातियों में सार्पक मान्य सन्तर है। सब यह परीसा करना है कि इनसे से कीनती अवातियों एक दूसरे में सार्पक कम मिन्स है। इस बनीसा को इकन-बहुबरास बरीसा हारा दिया जाना उसमुक्त है। इसको जराहरूल (212) में बकन-बहुबरास बरीसा की विधि को स्वस्ट करन के हेतु दिया जा चुका है। इन प्रकातियों ने युगल माध्य धन्नरों में मार्यक्ता की परीक्षा के विषय में जानने ने निए उदाहरण (212) नो पढिये।

यादृष्टिकोकृत पूर्णं खण्डक भ्रभिकल्पना मे उपप्रतिचयन की स्थित मे प्रसरण विश्लेषण

उपप्रतिचयन का विस्तृत वर्णन पूर्णनया बार्टन्छक्कीहन सचिवरूपना के माथ दिया वा चुका है। बार्ट्स्फ्रिकेहन पूर्व सण्डक स्मित्रस्थना की स्थिति से भी वही कारण तर्कक्षतर है। माला कि प्रत्येक प्रयोगणन एक्क से m उपप्रतिचयन एक्को वा चयन किया गया है स्थात् प्रत्येक प्रयोगणन एक्क पर m प्रेक्षण निष् गये हैं सो मान्यिकीय प्रतिरुप निम्न होता है —

$$X_{ij\alpha} = \mu + \tau_i + \beta_i + c_{ij} + \eta_{\phi \alpha}$$
 (21 16)
 $i=1, 2, 3,, k$
 $j=1, 2, 3,, r$

u=1. 2. 3. m

इस प्रतिरूप के प्रत्येक प्राथन से घाप परिचित हैं प्रत इनका धुनः बर्गन करना व्यर्थ है। प्रत्येक e_0 स्वतन्त्र है धौर N $(0,\sigma_a^2)$ बटित है धौर η_{ij} $N(0,\sigma_a^2)$ बटित है।

स्पिर प्रभाव प्रतिरुप (प्रतिरुप I) की स्थिति में यह भी क्ल्पनाएँ की गई हैं कि

$$\Sigma \tau_i = \Sigma \beta_i = 0$$
, $E(\beta_i) = \beta_i$; $E(\tau_i) = \tau_i$

यदि सब उपचारों का माध्य प्रभाव समान हो ग्रंपीत यदि

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_X$$
 (\hat{r}, \hat{r}) $(\hat{r}, \hat{r}) = r_2 = r_3 = \dots = r_X = 0$

होगा । इस प्रतिबन्ध के परिधास स्वरूप इस निष्मर्ष पर पहुँबते हैं कि उपचारों के अभाव की सम्पनता की परीक्षा करने में हमें परिकल्पनाओं.

$$H_0 : \tau_1 = 0, i = 1, 2, ..., k$$

या H_1 , इनमें से कम से दम्र एक 🕆 भून्य नहीं है, मैं से एक को स्वीकार करना होता है।

(मारमो 21,10) शतिकर 1, व्यापन प्रमरण बिस्तेषण सारणी जबकि याहन्छिनीहत पूर्ण खण्डक पमिकतनाम्मी में 111 प्रेराण प्रति एकक लिये गए हैं।	uredoup P-ura nucleur	$\frac{G^2}{km} = S_{rr}$ $\frac{S_{rr}}{r-1} = B$ B/E $\frac{s_T^2 + m\sigma_*^2 + km \frac{\pi}{2} \frac{B_T^2}{J^2 - 1}}{J^2 - 1}$	$\mathbb{E} \times \mathbb{E}_{\mu} = \frac{G^3}{Mm} = \mathbb{E}_{TT}$ $\mathbb{E}_{\mu} = \mathbb{E}_{TT}$ $\mathbb{E}_{\mu} = \mathbb{E}_{TT}$ $\mathbb{E}_{\mu} = \mathbb{E}_{TT}$	$x x x^{3}v - \frac{1}{10} x x^{2}v - \frac{1}{10} x^{2}v + 1$	$ \left(\begin{array}{c} x X^2_{10} - \frac{X^2_{11}}{m} \right) = S_{XX} \\ \frac{S_{XX}}{x K(m-1)} = S \end{array} \right) $	
)) प्रतिकष 1, स्वापक प्रमरण विश्लेषण सारणी	ones equest	$(r-1)$ $\frac{1}{km} \underset{j}{\times} X_j^2, \frac{G^2}{rkm} \Longrightarrow_{\Gamma_T}$	$(k-1)$ $\frac{1}{rm} \le X^3_{p_1} - \frac{1}{r}$	$ \frac{1}{m} \sum_{i} x X^{3} y_{i} - \frac{1}{m} \sum_{i} x X^{3} y_{i} - \frac{1}{m} \sum_{i} x X^{3} y_{i} - \frac{1}{m} \sum_{i} x X^{3} y_{i} + 1$		
(طلعم) 21.10	रिक्ताच सीत	24394	उनवारो	हु है ह ह ह	प्रतिसम्भ मृद्धि	-

जबकि
$$\sum_{i} \frac{T_{i}^{2}}{k-1} = \sigma_{T}^{2}$$
, सोर $\sum_{j} \frac{\beta_{j}^{2}}{r-1} = \sigma_{\beta}^{2}$

यहाँ व_वै ना माकलित मान,

$$s_0^2 = \frac{E - S}{m}$$

भीर एउ² का माकलित मान,

$$\epsilon_1 = \frac{T - E}{rm}$$

डबाहरण 21.4 पाँच पोपक (Host) पोछो का लारकी (Larvae) की वृद्धि पर प्रभाव जानने के हेतु एक प्रयोग किया गया। प्रयोग को यादिष्ठकीकृत पूर्ण लासक समि-कल्पना से व्यवस्थित किया गया और तीन पुनरावृत्तियाँ की गईं। प्रदेशक प्रयोगगत एकक से 10 लारकी का एक समूह निया गया। तृतीय सर्वेटर (III instar) के बारीर की लम्बाई प्रति लारका नापने पर प्रयानित प्रमुखार थी:—

इस न्यास का प्रसरण विश्लेषण तथा परिणामो का विवेचन निम्न प्रकार कर सकते हैं:--

दिये गये न्यास में प्रत्येन उपचार के लिए प्रयोगगत एकक से 10 प्रेक्तण नीटों पर लिये गए हैं जिनको कि उपप्रतिचयन एककों के रूप से प्रयोग किया जा सकता है। इस स्थिति में न्यास का प्रसरण विश्लेषण निम्न प्रकार कर सकते हैं:

स॰ का॰ =
$$\frac{(123474)^2}{150}$$
 = 10163·2370

पुनरावृत्तियों के योग,

$$R_1$$
=411·28, R_2 =412·01, R_3 =411·41
पुनरावृत्ति व॰ ग॰= $\frac{1}{10}$ { 411·28²+412·01²+411 41²}-स॰ का॰
=10163 3332 - 10163 2270
= 1062

उपचारी के योग

 $T_1 = 270 \cdot 10$, $T_2 = 258 \cdot 30$, $T_3 = 24^{\circ} \cdot 90$, $T_4 = 236 \cdot 30$, $T_5 = 222 \cdot 10$

उपचार य॰
$$\mathbf{z} = \frac{1}{80} \left\{ 270 \ 10^2 + + 222 \cdot 10^3 \right\}$$
—सं॰ का॰
= $10210 \ 018 - 10163 \cdot 227$
= $46 \ 553$

प्रसरण-विश्लेषण

नारवी के बरीर की सम्बाई (मि॰ मी॰ में)

	F					सारदी की कम बीक्या	क्ष्य संकता					F	7	जुपबार मध्य
	4	-	61	e	4	S	9	7	80	•	2			
	-	000	00 8	90 6	00 6	9 9 8	8 90	9 00	9 00	9 00	00 6		8 98	
4	Ē	2	000		8 96	9 00	9 00	9 00	9 10	9 00	006	90 16	9 02	9 20
F 1	<u>ر</u> م	9 00	01 6	9 10	8 90	9 00	9 00	9 00	00 6	00 6	006		9 02	
2		\$ 70	8 60	00	8 50	8 60	8 60	8 60	8 60	8 70	8 70	86 10	\$ 61	
;	-	200	8 50	00	8 70	8 70	8 70	8 60	8 70	8 70	8 70	86 00	8 66	8 63
	2	8 70	8 70	8 50	8 60	8 50	8 60	8 60	8 60	8 70	8 60	86 20	8 62	
_		8 20	8 20	00	8 80	8 30	8 50	8 30		8 20	8 30	83 50	8 35	
	- 2	0 0	8 10	80	8 20	8 20	8 30	8 30		00	8 20	82 10	8 21	8 26
_	E at	8 30	8 40	00	8 20	8 30	8 20	8 10		80	8 20	82 30	8 23	
6	2	7 40	7 80	7 90	795	7 90	7 90	7 90		5	2	78 50	7 8 5	
	- a	90	8 10	7 90	7 95	795	7 85	7 90		2	7 90	79 35	7 93	90 20 2
É	° 2.	7 95	7 95	7 95	7 80	7 80	7 80	7 95	795	7 95	-	78 45	7 84	
:	, 5 ₄	-	7 10	7 20	7 20	7 50	7 50	7 50		-	-	73 40	7 34	
4	T až	-	7 50	2	7 50	7 30	7 30	7 30		-	7 60	74 40	744	7 40
E	, E.	•	7 50	~	7 50	730	7 40	7 30			7		7 43	
											-	07 4501		

प्रयोगगृत एवको ने व॰ य०,

=46·791

प्रयोग मुहि = 46 791 - 46.553 - .0062

=0 2318

= 81 9517 प्रसरण विश्लेषण सारणी

विवरण स्रोत	स्व+ को०	व॰ य॰	मा॰ ष० य॰	F-मान
पुनरावृत्ति	2	1062	0.531	
उपचार	4	46-553	11 638	44 69
प्रयोग त्रुटि	8	0.2318	0 0289	
प्रतिचयन बुटि	135	35 1607	0 2604	
पूर्ण	149	81 9517		

प्रयोग बुटि, प्रतिचयन बुटि ने क्स है खत चुटि के रूप से प्रतिचयन बुटि का ही प्रयोग निरागण है। यदि चाहें तो इस स्थिति में दीनो बुटियों को जोडकर भी बुटि वर्ग योग के रूप में प्रयोग कर सकते हैं।

सारणी (परि० प-5.1) द्वारा $a \Rightarrow .01$ व (2, 3) स्व० को० के लिए F का मान 4 46 है जो कि F के परिकलित मान से बहुन कम है सत उपलगरों का सारवी की गरीर की सन्वाई पर सरविधक प्रभाव है।

युगत उपचारो में सार्थकता की परीक्षा ढकन की बहुपरास परीक्षण या ग्यूनतम सार्थक मन्तर की सहायता से कर सकते हैं। यहाँ ग्यूनतम सार्थक मन्तर परीक्षा का ही प्रयोग किया गया है। यदि अधिक परिमुख्ति से परीक्षा करनी हो तो अकन को बहुपरास परीक्षा का ही प्रयोग करना चाहिए।

धन सूत्र (2151) की सहस्यता से.

eti •
$$\forall v = \sqrt{\frac{2}{800}} \quad 2604 \times 2306$$

= 01736×2306
= 1318×2306
= 3038

उपचार माध्या को धनरोही नम म रख दिया और निन युगत माध्या में बन्तर 3038 से कम है उनके नीचे रेसा लीच दी। यह उपचार निरचक धन्तर की प्रशीतत करते हैं।

900 863 826 788 740

तब ही मुनल भाष्यों से सन्तर 3038 से भाषित है सेत अस्पेश रपचार वा प्रभाव एक-दूसरे से सार्थक रूप स सिन्न है।

यावृच्छिकोकृत पूर्णक्षण्डक अभिकल्पनामे एक अप्राप्त मान हो तो प्रसरण विश्लेषण

विसी प्रधाप म लुक्त मान विसी भी कारण स हो सकता है। इन कारण। का पूर्णत्या साईच्छितीहृत प्रभित्रक्यना म प्रभाग मान की हिविन म वस्ते ही दिया जा चुका है। यह बात प्रधाप के कि लवी काई विदेश नहीं है कि कियन द्वारा प्रप्राप्त मान का अह ता प्रधाप मान का अह ता किया जा सकता हा। उन प्रधाप मान के प्राप्त कर कर को उद्देश के कर दत्त ही। उन प्रधाप मान के प्रधाप ने प्रधाप के प्रधाप मान का प्रधाप ने प्रधाप ने प्रधाप ने प्रधाप ने प्रधाप ने प्रधाप ने प्रधापन म कर प्रधाप ने प्रधाप ने प्रधापन म किया जा सकता है। जाए भी प्रधापन मान के प्रधाप ने प्रधापन मान को प्रधापन मान की प्रधान में है। है है जिनके परिणाम- इसका प्रधापन मूंचित की की प्रधापन मान की प्रधापन मान की प्रधापन मान की प्रधापन मान कर प्रधापन में है।

गाएणी (218) ने चनुसार यदि। य उत्त्वार क विद् सुध्य भागा व सकार छ स्थिन है तो उत्तरा धारणित सार

$$\hat{X} = \frac{kT' + rB' - G}{(r-1)(k-1)} \qquad (21 17)$$

जब (र T', । में उपचार के सिरु प्राप्त प्रेसणी कर बोग है भीर B',) में स्तरण में विद्यसन प्रेपणा का मान है मर्थान् यह उप स्तरूभ का मोन है जिसान कि प्रयान मान है मीर C', प्रयान के मान प्रेपणा का यान है जिसकी सहगा (kr - 1) है जब कि उपचारों में सक्यों के हैं भीर क्षित्र का निर्माह में प्रयान मान के पाक्तिक मान का प्रयोग करने से उपचार वन यान वास्त्रीक ना कुछ मधिन हो जाता है। मन इस बसे बाग में समाचन करना होना है। यह नसीवन राहि है,

$$G_{T} = \frac{(kT' + B' - G')^2}{k(k-1)(t-1)^2}$$
 (21.18)

$$= \frac{\{B' - (k-1)\lambda\}^2}{k(k-1)} \qquad ...(21.181)$$

उपचार वर्ग योग में से, राशि C₁₁ को घटावर मुद्ध उपचार वर्ग योग जात हो जाता है। इस सक्षोधन को न करने की स्थिति में कभी-दभी उपचारों में सार्थक घन्तर न होते हुए भी यह प्रन्तर सार्थक सिद्ध हा जाते हैं। क्योंकि घप्राप्त मान के सार्वातत मान को रस्ते पर उपचार वर्ग-योग म गुरुकारी घिमनित (upward bias) प्रा जाती है। प्रत इस गुद्धि का प्रवश्य प्रयोग करना चाहिए।

भ्रप्राप्त मान वासे उपचार के भाष्य तथा धन्य किसी उपचार के माध्य मे मन्तर की मानक वृद्धि SE' निम्न होती है

$$SE' = \sqrt{s_e^2 \left\{ \frac{2}{r} + \frac{k}{r(r-1)(k-1)} \right\}}$$
 (2119)

दिष्यणी. यदि एक से प्रधिक मान घत्राप्त हो तो उनका घाकसन करके या सहप्रसरण विश्वेषण (प्रध्याय 22) की सहायता से विक्वेषण किया जा सकता है। इन विधियो का समुक्षित विदरण जानने के लिए प्रयोगगत घिंकरूपनायों व उनके विश्लेषण सम्बन्धी पुस्तक का प्रध्ययन करें। सहप्रसरण की सहायता से विश्लेषण विधि का सक्षिप्त विदरण प्रध्याय (23) के दिया गया है।

उदाहरण 215. गेहूँ के 8 जीनोटाइप (genotype) में इश्य-रूपी स्थितता (phenotypic stability) की परीक्षा करने के हेतु एक प्रयोग किया गया इस प्रयोग का विस्थास याइन्छिकीकृत पूर्ण लज्दक प्रधिकस्थना में किया गया जिसमें बार पुनरावृत्तियाँ एखी गई। किस्तु किसी दुर्यटना से इसमें एक प्रेक्षण जान सुस्त हो गया। प्रयोग में शेष प्राप्त मान निस्न बारणी के बनुसार थे —

प्रवादियाँ		3	न राजु तिय है		वीग	माम्य
	R ₁	R ₂	R ₃	\mathbb{R}_4		
V ₁	63.30	74 20	70 10	56 20	268 80	67.20
V,	84.30	86-95	77 00	(X)	327 06	81.76
V _a	78 90	81 65	70.60	73 15	304.30	76 08
V_4	72.80	85 50	73-15	82-40	313 85	78 46
V_{δ}	76 25	81 40	88-10	71 00	316 75	79 19
V_{d}	84 00	76 60	66.55	77.85	305 00	76 35
V,	69 20	60 50	66 40	56 30	252 40	63 10
V ₈	81.30	72 85	81-80	82 20	318 05	79 51
योग	614 95	619 65	593-70	499 10	2327 40	
				(577 91)	(2406 21)	
माध्य	76.87	77 46	74.21	62,39		

A
X-मद्राप्त मान (कोय्टरो में मान, मानसित मान रखने वर प्राप्त मान है)
(21·17) से म्राप्त मान का सानसित मान,

$$\hat{X} = \frac{8 \times 248\ 25 + 4 \times 499\ 10 - 2327 \cdot 40}{(4 - 1)(8 \cdot 1)}$$

es 78 81

^ X कै मान को श्रशप्त शान वे स्थान पर रक्षने पर,

V, का योग=327 06

=180932 70

खण्डन व॰ य॰ == ै (614 95°+619 65°+593.70°+577 91°)-तं • वर॰

== 181073 65 - 180932 70

= 140 95

मताति च॰ य॰== है (268 80° +.... +318 05°) –चं० रा०

= 182134·76 - 180932·70

-1202 08

प्रजाति वर्ग योग के लिए सूच (21.18.1)की सहायदा से संबोधन पानि,

$$C_{77} = \frac{(499\ 10 - 7 \times 78\ 81)^2}{8 \times 7} = \frac{(52.57)^2}{56}$$

m49 33

धत: प्रजातियो का गुड व० व० व 1202 08 - 49 35

=115273

पूर्ण थ • म • == (68·30° + 84 30° + + 56 30° + 82 20°} - € • • • • •

=2126.98

पुरि प • ए • = 2126.98 - 140.95 - 1152 73

= \$33'30

प्रसरण विश्नेषण सारणी

विचरण स्रोत	स्व० वा०	द॰ य०	मा <i>० ব० य०</i>	F-मान
खण्डन	3	140 95	46 98	1.13
प्रजातियाः	7	115273	164 68	3 9 5
त्रयोग त्रुटि	20	833 30	41.65	
पूर्ण	30	2126 98		

प्रजातियों ने लिए िका परिक्लित मान, $\alpha = 05$ भौर (7, 20) स्व० ना० के लिए िने सारणी (परि० प-52) मान द्वारा प्राप्त मान 2 52 से प्रधित्र है। घनः इससे सिद्ध होता है नि प्रजातियों से मार्थक धन्तर है। किन्हीं भी दो प्रजाति साध्यों से सम्तर नी भूटि,

जिनके लिए भ्रप्राप्त मान नहीं है

$$S_{E} = \sqrt{\frac{2 \times 41.65}{4}}$$

_=4 56

प्रजाति V₂ तथा धन्य किसी प्रजानि के माध्यों में बल्तर की मानक वृटि सूत्र (21.ा9) के द्वारा निम्न है ---

$$S_{E}' = \sqrt{41.65} \left(\frac{2}{4} + \frac{8}{4 \times 3 \times 7} \right)$$

$$= \sqrt{41.65 \times 6}$$

$$= \sqrt{24.99}$$

$$= 5.0$$

भन S_E व S_E ' का प्रयोग करके युगल प्रजानि माध्यों में भ्रन्तर की सार्थकता परीक्षा कार्तिक भ्रम्तर विधि द्वारा या उकन बहुषरात परीक्षा द्वारा कर सकते हैं। जिन युगल माध्यों में V_2 की किसी भन्य प्रजानि से परीक्षा करनी हो तो S_E ' या प्रयोग करना चाहिए प्रन्यथा S_E का प्रयोग करना चाहिए। यहाँ माध्यों में परीक्षा करके नहीं दिलाई गई है वयीकि पाठक पहले दी हुई विधि द्वारा परीक्षा कर यस सकते हैं।

लैटिन-वर्ग प्रशिकल्पना की स्थिति में प्रसरण विश्लेषण

यह द्विशतिकथी प्रिकल्ला है पर्यात् इसमे धनुसद्यानकर्ता प्रयोगपत एकको पर दो प्रकार के प्रिनक्कों को मेकर सब्दक बनाता है। ये सब्दक एक सद्यन के प्रनुसार पींक की मोर पोर दुनरे सक्षण के प्रनुसार स्वम्म की भोर सवातीय होतें हैं। प्रयोग पींक व स्तम्म एन पूर्ण लण्डन (पुनरावृत्ति) होता है। इन प्रयोग स्निवन्तना में प्रायेन उपचार हर एन पति व हर एन ननम से एन ही बार साता है सर्वात् प्रत्येन पत्ति व सन्म एक पूर्ण पुतरावृत्ति है। इस प्रकार यहाँ उपचारों पर, स्तम्भ व पत्ति नी सोर निये गए तथाणों में पढ़ते वाले प्रायं निये गए तथाणों में पढ़ते वाले प्रायं में मत्तर वे प्रति परिकरणनामों में पति यो पति पति हों। साथ ही इन तथाणों में मत्तर वे प्रति परिकरणनामों भी परीक्षा कर सी जाती है। मीटन-वर्ष समिवन्द्रता में पत्तियो, सन्मा व उपचारों की सन्या महैव समान होती हैं। यह यह सन्या हैतों इन मीटिन-वर्ष समिवन्ति में पति प्रायं प्रदेश सम्या प्रति है। इस प्रीमिवन्द्रता को कृषि, जैव विज्ञान व सीयोगिन प्रयोगी के लिए प्रायः उपयुक्त सममा जाता है। जैमें —

यदि क्रिती इदि म दा दिकायों में उर्वरता परिवर्षित होती हा ती दस क्षेत्र को इत दिलाया ने सनुमार लाविन पत्ति व स्तर्भ राण्डन। में निभाजित कर दिया जाता है प्रीर क्रिस्त अवकारण की सन्या ने समाव भूलकार म विभाजित कर देत हैं भीर प्रथम भूषण्ड को नियमानुसार एक उपचार निर्दिश्य कर दिया जाता है।

हमी प्रवार यदि जैव प्रयोग में यदि हुए भोज्यां (feeds) वा वाया वे पूज उरतादन पर प्रभाव देखना है ना दल कालो की धोर प्यान देना मानवपन है। वाय की दूज उत्पादन-शमता उनाकी निर्माय सलायलाया (Laciation) पर अधिक निर्भर करती है। यन भोज्या वा प्रभाव जानने वे लिए यह आवश्यन है कि दिन दे वा वरने वो पतिवित्तर किया भोज्या रहते नियु एक ही नस्स की वाय एक राज्यन में बीत ने यो द व एक ही उत्पायक्त की गाय एक राज्यक में स्वाम्य की धोर से ली आती है। अस्तिक श्रवक में पाय सी आशी प्रमाय-सलग नस्स की गाय क स्वाम्य की भार अस्या-अस्ता स्त्र-यस्वक की गाय सी आशी हैं। इस प्रवार यही हुछ के उत्पादन सम्बन्धी भीज्या से मानद, नस्सों में प्रमन्द कराय-रावणों में प्रसार के प्रति परिकरनाओं की परीक्षा इस प्रयोग में प्राप्त व्याग के प्रमूच होते हैं.

(4×4) क्रम के लैटिन-वर्ण का विग्याम निम्न प्रकार का होता है --

		स्ता	म	
	В	c	D	A
पतिः	D	Α	В	C
	С	D	A	D
	Α	В	C	D

(5 🗙 5) अम ने सैटिन-अर्थ का वित्यास इस प्रकार का होना है :---

			स्त्रम्भ		
	Α	13	C	D	E
	C	D	E	Α	В
गरिक	D	E	Α	В	C
	В	C	D	E	Α
	E	Α	В	С	D

मादि

एक प्रेक्षण प्रति प्रयोगगत एकक की स्थिति में $(x \times r)$ कम के सैटिन-वर्ग के सिए एक वात सांस्थिकीय प्रतिरूप निम्न होता है :—

$$X_{ijl} = P + T_i + \beta_j + P_l + \epsilon_{ijl}$$
 (21.20)

जहां i, j, l = 1, 2, 3, ..., r

प्रतिरूप (21.20) में P, । वीं पक्ति के प्रभाव को निरूपित करता है।

 μ , τ_1 , β_1 व e_{ij} त्रमतः समग्र माध्य, ν वें उपचार के प्रमाव, j वें स्तन्म के प्रमाव म प्रति एकक त्रृद्धि को निरूपित करते हैं। प्रत्येक e_{ij} , स्वतन्त्र हैं भीर N $(0, \sigma_*^2)$ विटित है।

स्थिर प्रभाव प्रतिरूप (प्रतिरूप I) की स्थिति में,

$$\underset{i}{\mathbf{x}} \tau_{i} = \underset{i}{\mathbf{x}} \beta_{i} = \underset{i}{\mathbf{x}} P_{i} = 0, \quad \mathbf{E} (\tau_{i}) = \tau_{i}; \quad \mathbf{E} (\beta_{i}) = \beta_{i}; \quad \mathbf{E} (P_{i}) = P_{i}$$

र्लीहन-वर्गमिन स्टब्स के लिए प्रसरण विश्वेषण सारणी ये बाहिस्वकी कृत क्लाक मिन स्टब्स के मिनेशा एवं विकारण कोन भीर बढ़ जाता है धन्यचा पूर्ण विधि लगमग वही रहती है।

माना कि लैटिन-वर्ग मे प्रेक्षणों के लिए I की पित का योग R_j j के स्तरम का योग C_j , i के उपबाद का योग T_i और कुत प्रेक्षणों का योग G है तो $(r \times r)$ कम के लैटिन-वर्ग के लिए व्यापक प्रसरण-विश्लेषण सारणी (21.11) है i

$$\text{ with } \quad \frac{p_l^2}{l} = \epsilon \rho^2; \ \frac{p_l^2}{l-1} = \epsilon \rho^2; \ \frac{p_l^2}{l-1} = \epsilon \rho^2; \ \frac{T_l^2}{l-1} = \epsilon_T^2$$

भतः पक्ति, स्तम्भ व उपचार के प्रत्याद्यित मा० व० य० को क्रमहाः

$$(\sigma_{\circ}^2 + r \sigma_{\rho}^2), (\sigma_{\circ}^2 + r \sigma_{\rho}^2) \neq (\sigma_{\circ}^2 + r \sigma_{\sigma}^2)$$

के रूप में लिख सकते हैं।

चंदाहरण 21.6: जई (Oats) की चार प्रवातियों की तुलता के हेतु घूमि के क्षेत्र को 16 पुलच्छों में विभाजित करके 4×4 सींटन-वर्ग धर्मिक्टवना का प्रयोग किया गया जिससे मिट्टी की उर्वरता का पता वत सके । युक्तप्रकों की उपज्य पोंडों में निम्न पायी गर्द जबकि सफर A, B, C, D प्रजातियों को प्रवर्षित करते हैं। प्रजातियों के प्रमाव में समानता के प्रति परिकल्पना की परीक्षा कीजिए। क्या सींटन-वर्ग का प्रयोग करना उपपुक्त है? स्रमने उत्तर की पुष्टि कीजिए। (सार्षी 21.11) (rxr) नेटिन-वर्ग के लिए प्रसरण निश्नेषण सारणी

	प्रस	रण-विश्लेषण
প্ৰযোগত যাত বল দ্ৰ	$e^2 + \frac{r}{r-1} \times P_R$	e ₆ ² + ^r / _{r-1} × B ₁ ²
F-477	지장	ت _ا س.
طاه طه جاره	$\frac{R}{r} = \frac{R}{r}$	2 = 1 - 1 - 1 - 1 - 1

(r - 1)

FR. ST

Searce alta



S_{rr} (r-1)==S

 $\sum_{i=1}^{n} X_i X_i^2 - \frac{G^i}{r^2}$

(1-1)

मन्तर द्वारा 💳 🖪

(r-1)(r-2)

अयोग भूटि

(r - 1)

(c - 1)

49.4

					याग
	C	D	В	A	
	47	40	50	57	194
	В	A	С	D	
	49	53	37	29	168
	D	C	Α	п	
	28	34	46	37	145
	٨	13	D	C	
	49	44	25	30	147
याग	172	171	158	153	654

(धादः सीयः चारः, 1966)

प्रजातियां के प्रभाव संघानर सभा महिन देश का उपयुक्तना का परीक्षा के लिए प्रमरण विक्लप्रक निस्त प्रशास्त्र स्वयन है —

सं विश्वरम निग्न प्रशार वर भवन है —

सं व का
$$\circ$$
 = $\frac{(654)^{-}}{16}$ = 26732 25

उपवार माग A = 204, B = 160 C 148, D = 122

पित व \circ मं \circ = $\frac{1}{4}$ (1942 + 168 - + 1452 + 1472) — मं \circ मा \circ = 27123 \circ 0 - 26732 25

= 391 25

स्ताम व \circ मं \circ = $\frac{1}{4}$ (1722 + 1712 + 1582 + 1532) — सं \circ वा \circ = 26799 50 - 26732 25

= 67 25

उपवार व \circ मं \circ = $\frac{1}{4}$ (2042 + 1802 + 1482 + 1222) — सं \circ का \circ

प्रमरण विभ्नेषण मारबी

विषरम् श्रोत	म शे	ष य	मां व य	F-==
पंक्ति	3	391 25	130 42	91 84
स्तम्भ	3	67 25	22 42	1578
उपवार	3	968 75	322 92	227 40
শুটি	6	8-50	1.42	
পুৰ্ণ	15	1435 75		

a ≈ 01 और (3.6) रव॰ नो॰ ने लिए में ना लारणी (परि० प-5.2) हारा प्राप्त भाव 9 78 है। प्रक्ति राज्य स ज्वार में तिए परिव सिन मित्र तारणीव ह मान से धर्मिन है पतार इत्तरे वह निरूप परिवत्ता है कि प्रति में सार्थन प्रत्य है और इत्तरे कि प्रवि में सार्थन प्रत्य है और इति प्रवि में सार्थन प्रत्य है और इति ही हिंदी पी उपैरात से द्विष्ट्रानी लिए जा वा प्रता लिटन-वर्ग धरिनव ना धरियाय है नि मिद्दी पी उपैरात से द्विष्ट्रानी विवश्ण था। धर्म. लिटन-वर्ग धरिनव ना धरियाय है नि मिद्दी पी उपैरात से दिश्वा में प्रवि हिंदी है। उपचारों में भी धरपियन सार्थन प्रत्य है निस्ता मित्राय है कि यह में बी अप्रति प्रत्य कि प्रति है। इत्र प्रवाद में मित्र है। इत्र प्रजादियों में से नौताही अप्रति कि एक दूनरे में सार्थन क्या मित्र है इत्र नी परीक्षा प्रपृत्ता सार्थन आतर सी सहायता से निन्त प्रशाद नर इत्तर ने हैं। अवादियों भी सार्य प्रयं निक्ति। कि मित्री। कि परित हो हिन्द प्रति हो अवादियों भी सार्य प्रयं निकती।

$$m_{\mu} \circ m_{0} = \sqrt{\frac{2s_{0}^{2}}{r}} t (05)(6)$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 8.5}{4}} \times 2.447$$

$$= \sqrt{4.25} \times 2.447$$

$$= 2.06 \times 2.447$$

$$= 5.04$$
A
B
C
D
51
45
37
30.5

विन्हीं दो प्रकातियों की माम्य उपन में धन्तर स्यू० मा० ध∞ से घछिक है धन सब प्रजातियों सार्थक कथ में एक-दूतरे से निम्न है।

एक प्रप्राप्त मान

मदि मेटिन्-मूर्ग ग्राभकल्पना को जिल्लान के प्रयोग करने समय किसी नारण में एक

प्रेक्षण मान सुन्त हो गया हो तो इसका आरक्सन वरना होता है। इस आवित्त मान को धप्राप्त प्रेक्षण के स्थान पर प्रतिस्थापित करवे सामान्य रूप मे प्रसरण विश्तेषण कर विद्या जाता है। इस विश्तेषण सारणी मे केवल इतना परिवर्तन करना होता है कि पूर्ण स्वतन्त्र कोर को एक कम कर दिया जाता है जिसके परिणामस्वरूप प्रयोग त्रुटि की भी स्वतन्त्रता कोटि एक कम हो जाती है। धप्राप्त मान का धाकसन निम्न मूत्र द्वारा किया का सक्ता है:

$$X = \frac{r (R' + C' + T') - 2G'}{(r-1) (r-2)} \dots (21 21)$$

जबिर सूत्र (21.21) मे R' व C' कमण उस विक्त व स्तरम मे प्रेयणों का योग है जिसमें प्रप्राप्त मान पटित होता है, I' उस उपचार के लिए प्रेयणों का योग है जिसका मान प्रप्राप्त है : G' कुल विषयान प्रेखणों का योग है । जैसीक याहण्डिमीहत पूर्ण वण्यक प्रभिक्तपान में प्रप्राप्त पान का साकतियान मान प्रतिस्थापित करने के पदचात् परिकतित उपचार वर्ग योग में सशोधन करना होता है वंसे ही सेटिन-वर्ग प्रमिकत्यना की स्थिति में स्तोधन राधि निम्म होती है —

$$C_{TT} = \left\{ \frac{-(r-1) T' + R' + C' - G'}{(r-1) (r-2)} \right\}^2 \dots (21.22)$$

राशि C_{TT} की परिकलित उपचार वर्गधोग से से घटाकर शुद्ध उपचार थर्गयोग ज्ञात हो जाता है।

सप्राप्त मान वाने उपचार माध्य सौर सन्य किसी उपचार माध्य में सन्तर की मानक मुटि निक्न होती है .---

$$SE' = \sqrt{s_e^2 \left\{ \frac{2}{r} + \frac{1}{(r-1)(r-2)} \right\}}$$
(21.23)

खबाहरक 21.7 : एक (4×4) नैटिन वर्ग प्रश्निकल्पना का विन्यास तथा उपचारों के तब मुसार भेहूँ की उपज (क्विटन प्रति हैक्टर) निम्न प्रकार थी। प्रस्तर A, B, C, D, उपचारों को, स्तम्म गेहूँ की किस्मों को घोर पत्तियाँ साथों को प्रवीगत करनी हैं। प्रति प्रस्व की उपज लेते समय, एक प्रस्व की उपज निस्तन से रह गई।

		स्तम्म				
	A-42	B-38	C-50	D-46	176	
	C-46	D-42	A-42	B-42	172	
पक्ति	D-46	C-*	B-42	A-46	134	
	B-38	A-54	D-38	C-46	176	
योग	172	134	172	180	658	

एक प्रप्राप्त मान का भाकसन एव व्यास का प्रसरण विश्लेषण निम्न प्रकार कर सकते हैं:---

सूत्र (21 21) के द्वारा समाप्त मान का सावसित मान.

$$\dot{X} = \frac{4(134+134+142) - 2 \times 658}{(4-1)(4-2)}$$

$$\hat{X} = \frac{1640 - 1316}{6}$$

$$=\frac{324}{6}=54$$

इस मान की सप्राध्ता मान के स्थान पर रूपने पर निम्न प्रेक्षण सारणी प्राप्त ही भारति है —

				वीप
A - 42	B-38	C-50	D-46	176
C - 46	D-42	A-42	B-42	172
D - 46	(C - 54)	B-42	A-46	188
B - 38	A-54	D-38	C-46	176
172	188	172	180	712

उपचार बर्ग मीन के लिए सशीयन शास, सूत्र (21 22) के मनुमार निम्त है -

$$C_{TT} = \left\{ \frac{3 \times 142 + 134 + 134 - 658}{3 \times 2} \right\}^2$$

उपचार-योग,

स्ताम व•व•=
$$\frac{1}{4}$$
 (172 1 +188 2 +172 2 +180 2) - ग• का•= 31728 00 - 31684·00=44 00

पत्ति व • य •
$$= \frac{1}{4} (176^2 + 712^2 + 188^2 + 176^2) - स$$
 • का • = 31720 00~31684 00 = 36 00

उपचार वं वं वं = 31864 00 - 31684 00 - 180 00

सशोधित जपनार व॰ य॰=180 00 - 36 00=144 00

पूर्ण वरु यर्=
$$(42^2 + 46^2 + + 46^2 + 46^2)$$
 – सर्व हार
= 32064 00 – 31684 00

==380 00 धतः प्रसरण विश्लेषण सारणी निभ्न है :---

विचरण स्रोत	स्व । को ।	ব৽ ব৽	मा॰ द॰ प॰	ु ⊷सान
पक्ति	3	36 00	12.00	
स्तम्म	3	44 00	14 67	
उपचार	3	180 00	60 00	2.50
		(144 00)	(48 00)	(200)
यु टि	5	120 00	24 00	
पूर्ण	14	380 00		

टिष्पणी उपर्मुक्त सारणी से नवीधित उपचार ब० ४०, मा० ब० ४० व F-मान कोण्डमों में दिखाने गये हैं। a=0.5 तथा (3,5) स्व० मो० के लिए F का मारणीवड मान 5.41 पिक, स्वन्म तथा उपचार तीनों में लिए पिक्कितन F-मान, नारणीवड F-मान के नम के प्रति हिंदी प्रति प्रति सामाना भी पिकस्पना है। स्वीमार कर तिया जाता है।

जपचार माध्यों में धन्तर निर्धेक होने के कारण इनके युगल माध्यों में धन्तर की सार्थकता की परीक्षा करने की मानस्वकता नहीं है।

प्रीसीय-लैटिन वर्ग ग्रमिक्टपना की स्थित में प्रसरण-विद्यतेत्वय

यह सैटिन-वर्ग धनिकल्पना ना उग्रत रूप है जिसमें कि प्रयोगगत एक में में विद्यमन एक भीर विवरण खोत नो नियन्तिन नरते हैं नयोजि प्रारम्म में इस धनिकल्पना मी रचना भीक व सैटिन प्रकरों को प्रयोग करने नो गई थी। इसी कारण इसना नाम भीवीय-सैटिन-वर्ग अनिकल्पना परा। इस धनिकल्पना न विद्याम नी विष्णेपता बहु है कि प्रतर्ग भीम व सैटिन प्रकार प्रत्येक चित्र न अर्थेक ननम्म में नेवन एक बार आना है भीर इसने श्रतिरिक्त प्रवार प्रत्येक चीटन क्षार्य, बोक श्रवहर ने साथ एक बार ही धाना है। इस महार प्रमाण विश्वेषण सारणी में पति, स्नाम व सैटिन धक्तरों (उपवारो) के प्रतिस्ति प्रीक्ष प्रभारो, जो ति एक कारण को निर्माण करते हैं, ने कारण विषयण प्रीर बढ़ जाता है। प्रमाण विक्लेपण साम्रान्य क्य में ही होना है। इस प्रकार की प्राधिकत्यना का प्राप्त निम्म प्रकार का होना है।

(5×5)		चपकार्य		
A _α	ВВ	Cy	D _g	E,
c _e	D_{σ}	E _₿	Ay	B
ď	Ey	A _g	B	c _a
E ₈	A _p	\mathbf{B}_{a}	c _B	Dy
By	c*	D _e	$\mathbf{E}_{\boldsymbol{a}}$	A _B

दिष्पणी (1) यान्य किसी भी कम का धीकीय-सैटिन वर्ष की रचना इसी प्रकार की होती है।

(2) (5 × 5) तम का केवन एक ही धीनोब वर्ग सम्मय नहीं है। तमाजि भन्य वर्गों की एमना परस्पर गांदिक लेटिन वर्गों (Mutually Orthogonal Latin Square) की महायता से की जा सबती है। इसका वर्षन जानने के तिए पुस्तक "The Design and Analysis of Experiments" by Kempthorne O को कड़िये।

(3) इस प्रश्निक पना में नैटिन पन्तर या बीव पदार में से दिसी नो भी उपनार प्राप्त सनते हैं।

जब कि L_m , m में पीत प्रसार के लिए प्राप्त प्रेसनों का योग है। यान्य सभी सकेशन सीटन बने प्रभित्तरका के प्रमुख्य है। σ_p^{2} , σ_p^{2} , σ_p^{2} त्यार पीत, तत्तरज्ञ योग प्रसार के उपवारों के तिए प्राप्त नगान वर्ग योग है। बोगीय-नीटन वर्ग के प्रसार प्रियोगन में यह बार ब्यान देने के प्रोप्त में ति प्रयोग पृष्टि की क्षारण-नाव्या (r-1) (r-3) के समान है। यह (5×5) म कम जम के बमें की स्थित में पृष्टि की स्थारण्य समा कार्यांच्य रहती है।

यह-उपादानीय प्रयोगीं का प्रसरण विश्लेषण

सरि एक अने भे आहुनेजन व कालगोरम नार्धों की विकिय प्रात्रामी का एव इत्तर समूत प्रभाव नहीं को बाद पर देगता हो तो बहु-उत्तरादानीय अभोव सम्पन्न उपनुत्त है। इसी द्वार किसी सम्बन्धां में दो सा दो से मंत्रिक कारकों हैं प्रभाव तथा एक की

सारजी
विश्लेषण
में प्रसरण
ही स्विति
टिन वर्गे १
: ब्रीसीय-ले
८र) कम ने
£
सारजी 21.12

562		सांस्यिकी के सिद्धान्त भीर मनुप्रयोग				
	प्रत्यामित मान्येन यन	6.2 + r 6 p2	e,3+raB3	Gotte Gla	634 r e T	
नेषण सारणी	F-भाग	R/E	G/E	L/E	T/E	

X R3 - G2 = Rr

(1-1)

स्य को

विषया स्रोत

x Cj3 - G3 - CH

(r - 1)

HILL

K La Gall

(r-1)

गोम-महार

z Ti2 - G2 = Tr

(1 - 1)

र्गटन-मधार

(r-1)(r-3)

प्रस्तर द्वारत=E

(r-1)(r-3)

त्रयोग मुद्दि

x X21/m - G2

12-1

उपस्थिति में सन्य के प्रभाव ने परिवर्तन जानने ने लिए बहु-उनाधानीय प्रयोग प्रश्यन्त उपयोगी हैं।

एक उपचारों का समृह जो कि दो या दो में प्रधिव उपचार और अरवेक उपचार के दो या दो में प्रधिक करों (levels) के मनवां (combinations) को निर्मारत करता है उसे बहु-उपाहानीय विकास (factorial arrangement) कहते हैं। इन समयों को उपयोग के रूप से उपयोग किया जाना है। इन्हें दिन्यों भी प्रभित्तकान अंग पाहिल्हारित पूर्ण संबद्ध भित्रक्षना, लेटिन वर्ष प्रभित्रक्षना या प्रस्य विसी प्रधिक्त्यना में उपपाद। के स्थान पर प्रयोग क्या जाना है।

बहु-उपावानीय प्रयोग आयान उपयोगी है बर्गीत इसम झनत बारका (factors) के प्रभाव एन माथ ही बात रिये जा बनते हैं। बहु-उपादानीय प्रयोगों से उपमारो तथा प्रयोग पिरिस्तियों के सब सम्भव नवया की प्रयोग करते, उपचारा के सुक्य प्रभाव। (main effects) एव एक-दूनरे से शरक्यर-विश्वा प्रमावों (interaction effects) का प्रावत्त एक साथ ही दिया जा सकते हैं।

इन प्रयोगों में मुख्य प्रभाव (main effect) में यश्चियाय निमी उपचार ने एन स्तर पर हाके पत्य स्तर या स्तरों भी यथेक्षा बास्य प्रभाव ने समान होता है जबनि प्रस्य नारमों या उपचारों ना स्तर स्थिर हो।

निन्ही यो नारको (उपचारो) में वरस्वरित्या (interaction) दिनी एक कारक के विभिन्न स्तरो द्वारा दिनी प्रत्य कारक के प्रिम्न स्तरो को उपस्थित में एकना प्रभाव प्रवित्तन करने की प्रमुक्ता का प्रतीत है पर्योग्न दिनी एक कारक के दिश्चित स्वरो का प्रभाव (प्रभावी द्वारत) दिनी प्रत्य कारक के विभिन्न स्वरो के कारण परिवर्तना हो जाता है। या कारको में इस विद्यार्थि प्रभाव को वरस्वरित्या कहते हैं।

उपारानीय प्रयोग धावेषणो ने हेनु घावधिक उपयोगी शिद्ध हुए हैं क्योंति इन प्रयोगी की सहायना में यह पता लगाया आगा है कि किन उपनारों ने सुन्य प्रभाव गायेन हैं घोर दिन उपनारों में परकारनिया है वा नहीं है। यदि उपनारों में परकारनिया है तो घह नारों का नौतना समय है कि जिसमें द्वारा सर्वोत्तम परिणाम प्राप्त होते हैं। अने सार गायापी प्रयोगा में यह ज्ञान नरना हो कि भारदीयन (N), पासपोरम (P) य पीटान (K) मी किनशी-किवनी मात्रा होते में सामाई जाये कि सबसे स्थित उपन हो। यह सर्वोत्तम समय उपने करों ने पराम में होना है जिसमें उपनारों या कारकों में परीसा की पर है।

वमु तक्त-धी प्रयोगों में उन। भाजन माने की विधि निव या नहल पादि में परस्पर-विधा वो जाना जा सन्ता है। इसी प्रवार माध प्रयोग में प्रोटीन व कार्डीहार हैट (Proteins and Carbohydrates) में राग्री म परस्पर-विचा व विधा सम्बन्धी प्रयोग में प्रस्तान विधियों व विधानियों की बागु में परस्पर-विचा चारि के विषय में जानकारी प्राप्त करने में बहु-उन्नादानीय प्रयोग समावत है।

िनों प्रशोश से बंदि n बारव (प्रशाद) निर्दे मधे हैं और प्रश्वेत बारव के हुन्छ, है 8 दो है बहु-उत्तादातीय प्रयोग बहुते हैं। बंदि प्रश्वेत बारव के स्वर प्रमान. p, q, r.... हो तो इसे pxqxrx.... बहु-उपादानीय प्रयोग कहते हैं। इन प्रयोगो का प्रमरण विश्लेषण देने से पूर्व श्रवन-पद्धति (notations) तथा मुख्य प्रभाव व परस्पर-त्रिया प्रभाव वैषम्य (contrast) के रूप में प्रदक्षित वरने ने विषय में बताना ग्रावशण प्रतीत होता है।

किमी कारक के प्रभाव बडे धक्षारों A, B, C, ... द्वारा और नाग्को को छोटे धक्षारों a, b, c, ... ध्वादि ने त्रमत निरूपित करते हैं। इन धक्षरे, वे अनुनान कारको के स्तर को प्रदर्शित कगते हैं जैंसे A_b , B_p , C_k , ... या a_p , b_p , c_k , ... धादि। इन बढे प्रक्षरों का गुणक AB या ABC दो कारको या तीन कारको की परस्पर-निया हो निरुपित करता है। इन्हें क्रमण प्रथम व दिलीय त्रम की परस्परित्रमा नहते हैं। सबय a_p , b_p , a, a हे। हैं तथा c के k वें स्तर के सचय को निरुपित करता है। इस सचय को पृश्वमता की हॉट्ट है। k के द्वारा भी प्रदित्ति कर गते हैं। इस सियित में यह स्वय मान निया जाता है कि सचय-मणुल-ग कमण a, b व c से ससन है।

िक्सी प्रयोग में मुज्य प्रभाव व परस्परिक्या प्रभाव कात नरने तथा उनकी सार्यक्ता-परीक्षा नरने के हेतु वैगम्य (contrasts) प्रायन्त उपयोगी है। घत इनका जानना हिननर है। यदि रिमी प्रयोग में k उपचार लिये स्ये हैं और प्रायेक उपचार की समान पूनरावृक्ति मस्या '' है तो कोई भी रैंखिक फलन,

$$Z_{p} = 1p_{1} T_{1} + 1_{pk} T_{2} + \dots + 1_{pk} T_{k}$$
 (21.24)

एक वैषस्य कहलाता है यदि,

$$l_{p1} + l_{p2} + \dots l_{pk} = 0$$

श्रयति.

हो । वैपन्य दू, के कारण वर्गसोग, जो कि उपचार वर्गसोग्र का शुक्क अध्यक्त है, निस्त होता है:—

$$\frac{Z_{p}^{2}}{r(1_{p1}^{2}+1_{p2}^{2}+....+1_{pk}^{2})}(2125)$$

प्रत्येव वैपम्य की स्व॰ को ॰ 1 होती है।

माना नि Zq कोई अन्य वैयम्य है तो,

$$Z_{q} = 1_{q1} T_{1} + 1_{q2} T_{2} + ... + 1_{q^{k}} T_{k}$$

नविक

$$x_{q_1} = 0$$

Z व Z लम्बकोणीय कहनाने है यदि,

$$1_{p1} 1_{q1} + 1_{p2} 1_{q^2} + + 1_{p^k} 1_{q^k} = 0 (21.26)$$

प्रवित्
$$\sum_{i=1}^{k} l_{pi} l_{qi} \Rightarrow 0$$

इन सम्बनोगीय वैयम्पों की प्रशिन्तम स्ट्या (k - 1) हो सकती है।

जैसे यदि T_1 , T_2 , T_3 तीन जपचार् हैं चीर प्रत्येक की 3 पुनराष्ट्रित सक्या है। माना कि इनके हारा कुल प्रेशन मान, $T_1\!=\!46$ $T_2\!=\!15$ व $T_2\!=\!20$ है तो दो लस्बकोगीय वैयस्य निम्न हो सकते हैं -

$$Z_1 = T_1 - 2 \quad T_2 + T_2,$$
 $q \in Z_1 = 40 - 2 \times 15 + 20$
 $Z_2 = T_1 - T_2$ $q \in Z_2 = 40 - 20$

भीर इनके डारा सघटक वर्ग योग है,

$$\mathbf{S}_{1}^{2} = \frac{(40 - 2 \times 15 + 20)^{2}}{3(1 + 4 + 1)} = \frac{30 \times 30}{3 \times 6}$$
$$= 50.00$$

$$S_{2}^{2} = \frac{(40-20)^{2}}{3(1+1)} = \frac{20\times20}{6} = 66.67$$

द्वी प्रकार यदि प्रायेक उपवार को पुन्तपृत्ति-बद्धा समान न होतर, भिन्न हो हो, वैदान को निश्न प्रकार दिया जा सकता है। इस स्थिति के k उपवारी का रैलिक कनन, जबित उपवार T_i की पुनरावृत्ति नक्ष्या, (i=1, 2, 3, ...r) है

$$Z_0 = I_{p1} T_1 + I_{p2} T_2 + + I_{pk} T_k$$
(21.27)

वैषम्य बहलाता है यदि,

$$r_1 l_{p1} + r_2 l_{p2} + \dots + r_k l_{pk} = 0$$

भीर इस भैयस्य के बारण संपटक वर्ग थीग,

$$= \frac{\mathbb{Z}_{p}^{3}}{(r_{1} \, 1^{2} \, p^{1} + r_{2} \, 1^{2} \, p_{4} + \dots + r_{k} \, 1^{2} p_{k})} \quad \dots (21 \, 28)$$

माना द्व कोई भ्रम्य बंदम्य है उही

$$Z_{q} = I_{q1}T_{1} + I_{q2}T_{2} + ... + I_{qk}T_{k}$$
(21.29)

Z, बार Z, सम्बराजीय बहुनाने हैं यदि

$$r_1 \cdot l_{p_k} \cdot l_{q^1} + r_2 \cdot l_{p^2} \cdot l_{q^2} + ... + r_k \cdot l_{p_k} \cdot l_{q_k} = 0$$
(21.30)

वैषम्य के विषय में उपर्युक्त जानवारी की सहायना में मुख्य प्रभावो तथा परस्पर-कियाबो को वैषम्यों के रूप में निम्न प्रवार दे सबने हैं :---

माना एक 2 र प्रयोग को किया गया है जिसका सिन्नप्राय है कि प्रयोग में दो कारक (A मोर B) हैं मौर दोनों कारकों के दो स्तर है जो कि माना 0,1 हैं। इस प्रकार कारकों के चार सबय a₁b₂,a₂b₀,a₂b₂ व a₂b₀ सम्बद्ध है। मुख्य प्रभाव A मौर B तथा परस्परित्रया AB को निमन क्य में दिवा जा सकता है —

$$A = (a-1)(b+1) = (a_1-a_0)(b_1+b_0)$$

$$= ab-b+a-1 \equiv a_1b_1-a_0b_1+a_1b_0-a_0b_0$$

$$= b(a-1)+1(a-1) = (a_1-a_0)b_1+(a_1-a_0)b_0$$

यर्गेत् $ab = a_1b_1, b = a_0b_1, a = a_1b_0, l = a_0b_0$

वैषम्य A को देलन से पता चलता है वि यह a वे 1 स्तर का, a वे 0 स्तर की प्रपेक्त प्रभाव बनाना है जबकि b का स्तर a के दोनो स्नरों के लिए समान रहता है।

उपचार A का माध्य प्रभाव =
$$\frac{1}{2r}$$
 ($a_1b_1-a_0b_1+a_1b_0-a_0b_0$)

जब नि : पुनरावृत्ति-सख्या है।

इसी प्रकार
$$B = (a+1)$$
 $(b-1) = (a_1+a_0)(b_1-b_0)$
 $= ab-a+b-1 = (a_1b_1-a_1b_0+a_0b_1-a_0b_0)$
 $= (b-1)a+(b-1)1 = (b_1-b_0)a_1+(b_1-b_0)a_0$

पहले की भीति B का माध्य प्रभाव वैषम्य ने मान का 2 ग्वे भाग देने पर क्षान हो जाता है।

परस्परितया AB के निए वैषम्य निम्न हाता है --

AB =
$$(a-1)(b-1) = (a_1-a_0)(b_1-b_0)$$

= $ab-a-b+1 = a_1b_1-a_1b_0 - a_0b_1+a_0b_0$
= $(b-1) a-1 (b-1) = (b_1-b_0)a_1 - (b_2-b_0)a_0$

AB का माध्य प्रभाव, वैषम्य के मान को 2ा में भाग देने पर प्राप्त हो जाता है।

(2) इसी प्रकार 2° प्रयोग के किसी भी मुख्य प्रमाद या परस्परित्या प्रभाद तान करने हे निए वैदम्य बना सनते हैं। वैदम्य बना मान सचयों के प्रेक्षित मान वेदम्य में रक्षकर तान करते हैं जिसे कि 2° 2 में मान देने पर माध्य मान तात हो जाता है। कियों भी मुद्र प्रभाव या परस्परित्या प्रमाद के नगरण वर्ष योग वैदम्य मान हे वर्ग को 2° में मान देने पर जान हो जाता है। इन माध्य प्रमादों तथा वर्ष योगों वो दिना वैदम्य की भी जात कर सकते हैं जिनका वर्ग ना वाद में दिया गया है।

सांस्थिकीय प्रतिरूप

यदि प्रयोग में दो नारक A व B लिए गर्ने हैं, जिसमें A के p स्तर है धौर B के q

स्तर हैं भीर प्रयोग का विश्वास वाहण्यितीकृत पूर्व खण्डक मामित्रस्पता से विचा गया है जिसमे पुतरावृत्ति सस्वा र है तो सांस्थिकीय प्रतिष्टंप निस्त होता है —

जबकि प्रनिरुप (21,31) में μ वास्तविक माध्य प्रमाव है। α , β वास्तविक मुख्य प्रभाव है धौर (α , β) वास्तविक परस्परिक्य है। ρ , k बी पुतरावृक्ति का बास्तविक प्रमाव है। सब $e_{\rm th}$ एक-दूसरे से स्वतन्त्र हैं धौर $e_{\rm th} \sim N$ (0, $\sigma_{\rm th}$)

इसी प्रकार यदि तीन कारन हैं जिनके कि स्तर क्षमा p.q व m है। माना सबयो को साहस्थिकीहत पूर्ण सण्डक अभिकत्तना में दक्ता गया है और इसमे : सम्बन्ध है तो साहियकीय प्रतिस्थ निम्म होना है —

$$\begin{split} X_{ijA} &= \mu + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_2 + \beta_1 + (\alpha \beta)_4 + (\alpha \gamma)_{ij} + (\beta \gamma)_{ij} \\ &+ (\alpha \beta \gamma)_{ij} + e_{ijA} & (21.32) \\ &+ (\alpha \beta \gamma)_{ij} + e_{ijA} & (p-1) \\ &+ (\alpha \beta \gamma)_{ij} + e_{ijA} & (q-1) \\ &+ (\alpha \beta \gamma)_{ij} + e_{ijA} & (m-1) \\ &+ (\alpha \beta \gamma)_{ij} + e_{ijA} & \\ &+ (\alpha \beta \gamma)_{ij} + e_{ijA} & ... \\ &+ (\alpha \beta \gamma)_{ij} + e_{ijA} & \\ &+ (\alpha \beta \gamma)_{ij} +$$

जबाँद ॥ वास्तिविक माध्य प्रमान है । α,β,γ तीत बारको A,B,C के कमता बास्त-विक मुख्य प्रमान है और $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$ व $(\beta\gamma)$ प्रथम कम की और $(\alpha\beta\gamma)$ दितीय कम की घरनार कियायों के बास्तिविक प्रभान हैं।

्द्र प्रयोग पृष्टि है जो नि एन-पूनरे से स्वतन्त्र हैंच N (0, जून) चिट्ठ है। एन प्रतिद्वा में लिए प्यतन्त्र वर्ग-विध्य ना प्रयोग करके, प्राचलों के प्राक्तन तथा वर्ग मोग बात बंद सकते हैं। प्रस्तान विश्वेषण सारणी निम्न रूप में दी जा सकती है। प्रस्तान विवत्यम की सहस्ता से ग्रही परिकास्त्रामी की परीक्षा करते हैं कि

(i) A मा B या C के मुख्य प्रमाव सार्थक है या नहीं ।

(॥) परस्पर, विश्व AB, AC, BC सार्थन हैया नहीं मर्यात् वस्य कम की परस्पर-विश्वामी वो सार्थन्ता-परीक्षा को जाती है।

(iii) परस्परांत्रज्ञा ABC मार्थन है या नहीं धर्यात् जिनीय कथ की परस्परांत्रज्ञा को मार्थनना को परोक्षा को जानी है।

प्रतिक्य (2131) ने लिए मुस्य प्रनाव A व B ने वर्ग सीग व परस्वरिक्श AB के कारा वर्ग स्थानिक मुख्ये की महास्वा से ज्ञान वर सकते हैं। यह मूच स्मृत्यन वर्ग विश्व द्वारा प्राप्त किसे जा सनते हैं ---

दो नारनौ ने तिए व्यावक प्रतरण-सारकी जनकि प्रयोग विन्यास पाहरिखनीकरा पूर्ण मण्डक प्रतिमत्त्राता में है। nrred (जातक)

إخطيما فإلة	क्ष्रं क्ष्रे	अव्यव	(1 table) (C1:17) lightly	Althor 1/	क्र कालिय मान्यन्थ	
Trazlit	(1-1)	жх	RXX/r-1 == R'	R'/3, = FR	$\sigma_{\rm e}^{z} + \frac{pq}{r-1} \times p_{\rm e}^{z}$	सा
क्षतमार	(pd-1)	Txx	TXX/(pq-1)=T'	$T'_{/3_3} = F_T$		स्यिको दे
<	(p-1)	^XX	Αχχ/p-1 ma Λ'	Λ'/ _{10,3} == Γ. _Λ	$\sigma_o^{-2} + \frac{rq}{p-1} \underset{1}{\times} \alpha_i^{-2}$	सिद्धान्त
a	(1-b)	DXX	$B_{XX/q-1} = b^*$	b/o2 = FB	$e_o + \frac{\operatorname{tp}}{\operatorname{q-1}} \underset{j}{\times} B_{j^2}$	र घार ग्र
N X B	A × B (p-1)(q-1) (AB) XX	XX(av)	<u> </u>	(AB) / s a mar P AB	$\sigma_{\mathfrak{o}}^{2} + \frac{r}{(p-1)(q-1)} \underset{i=1}{\overset{r}{\times}} (\alpha\beta)_{ij}^{2}$	नुप्रयोग
त्रमीत जुटि	मनोग मृदि (r-1)(pq-1) E _{XX}	Exx	(r-1)(pq-1)		6,3	
χή	rpq~1	3xx				_

नीन सरका ने निष्याक प्रमरण-निरायम नाम्नो बर्गाक विषय सहिन्छनेहुन पूर्ण सण्डक प्रमिकत्तना म है।

		महरण	मारणा (८। १५) (यानस्य १)	110
I GTW BIT	FR 8 470	4.1.	Tile No the	
मृगस्तवृत्ति	(1-1)	Rxx	RIA = R'	K's, =FR
3747.5	(pem-1)	Txx	$T \chi \chi (pgm-t) = T'$ $B \chi \chi (q-1) = B'$	T'/s, = FT B'/s, = FB
2 X	(1-b)(1-d)	(AB)	$\frac{(AB)_{XX}}{(P-1)(q-1)} = (AB)'$	(AB)' = FAB
υ	(m-1)	, XX	ر د عار ا	C, FC
AXC	(p-1)(m-1)	(AC) _K K	$\frac{(AC)_{XA}}{(p-1)(m-1)} = (AC)'$	(AC)* =FAC
×	(q-1)(m-1)	(BC) _{1,1}	$\frac{(BC)_{XX}}{(a-1)(m-1)} = (BC)'$	(BC)' =FBC
AXBXC	(p-1)(q-1)(m-1)		(ABC) xx (ABC)'	(ABC) = FABC
ब्रदोश कुटि	(1-1)(pqm-1)	EIX	$\frac{\mathbb{E}_{\chi\chi}}{(r-1)(pqm-1)} = s_*^{\frac{1}{2}}$	•
A.C.	(1-mbdu)			

$$\begin{split} & \text{$\mathfrak{a} \circ \mathfrak{q} \circ \ (A) = \left(\frac{1}{\operatorname{qr}} \sum_{J} X_{-1}^{2} - \frac{X_{-1}^{2}}{\operatorname{pqr}}\right)$} \\ & \text{$\mathfrak{q} \circ \mathfrak{q} \circ \ (B) = \left(\frac{1}{\operatorname{pr}} \sum_{J} X_{J}^{2} - \frac{X_{-1}^{2}}{\operatorname{pqr}}\right)$} \\ & \text{$\mathfrak{q} \circ \mathfrak{q} \circ \ (AB) = \left(\frac{1}{r} \sum_{J} \sum_{J} X_{J}^{2} - \frac{X_{-1}^{2}}{\operatorname{pqr}}\right) - \mathfrak{q} \circ \mathfrak{q} \circ A - \mathfrak{q} \circ \mathfrak{q} \circ B$} \end{split}$$

प्रतिक्स (21.32) के तिए मुख्य प्रभाव व प्रयम जन्म की परस्परिज्याओं के तिए वर्ग योग उत्पर भी भौति भूत्रों से जात कर सकते हैं। इन सूत्रों में आवश्यकतानुसार अनुतानों तथा भाजक (Divison) से मन्तर करना होता है। तीन कारको की परस्परिज्या के तिस् वर्ण यर्ग निन्न सूत्र की सहायता से जात कर सकते हैं —

$$\begin{split} \mathfrak{A} \circ \mathfrak{A} \mathsf{B} \mathsf{C} = & \left(\begin{array}{c} \frac{1}{r} & \sum_{i} \sum_{j} X_{ij}^2 - \frac{X^2, \dots}{p q m} \end{array} \right) - \left\{ \mathfrak{A} \circ \mathfrak{A} \circ \mathsf{A} \right. \\ & \left. + \, \mathfrak{A} \circ \mathfrak{A} \circ \mathsf{B} + \quad \mathfrak{A} \circ \mathfrak{A} \circ \mathsf{C} \cdot + \quad \mathfrak{A} \circ \mathfrak{A} \circ \left. \left(\mathsf{A} \mathsf{B} \right) \right. \\ & \left. + \, \mathfrak{A} \circ \mathfrak{A} \circ \left. \left(\mathsf{A} \mathsf{C} \right) \right. \right. + \left. \mathfrak{A} \circ \mathfrak{A} \circ \left. \left(\mathsf{B} \mathsf{C} \right) \right\} \end{split}$$

उरयुक्त सूत्री की सहायता से वर्ष योग निकान कर क्यापक प्रवरण सारणी वैदार कर की जाती है और विभिन्न निराकरणीय परिकल्पनाधी के विषय में निवमानुसार निर्णय कर तिया जाता है। मुख्य प्रभाव व परस्परिक्याची के वर्ष योग दिव व विभुक्ती सारणी बनाकर देन सूत्री का प्रयोग करने सीधे परिकतित कर तिए जाते हैं जैसा कि माधिन (solved) उदाहरण से स्पष्ट हो जायेगा।

टिप्पणी (1) उपर्युक्त सार्राणयों में यह बात ब्यान देन योग्य है कि मुद्य प्रभाशों व परस्तर-त्रियामों की स्वातन्त्र्य मरयामा का योग व यर्ग योगो का योग त्रमया उपवारों की स्व० को० व व० य० के समान होता है।

(2) यदि सावश्यकता हो तो प्रतित्प 11 के लिए भी नियमानुसार मा॰व॰य॰ दिने जासकते हैं।

(3) 2º उपादानीय प्रयोगी की स्थिति में p,q,m आदि के मान 2 के समान होते हैं।

(4) सारमी (21 14) में प्रत्याधित मान्वन्यन नही दिये गये हैं। यदि मादश्यनना हो तो सारणी (21-13) के समरूप मूत्र पाठव स्वय सिख सकते हैं।

ब्बाहरण 218. मुक्ता की उपन पर सरपतवार का प्रभाव तथा इतको हूर करते के तिए एक पासपादनाशी (Herbucke) का प्रचाव जानने के लिए प्रयोग किया गया। प्रयोग में सरपतवार (W) की चार जातियों, प्रायेक के लिए बीज बोने की पाव मात्रामी (S) का प्रयोग किया गया भीर वासपातनाशी (H) के दो क्षतर तिये गये। इस प्रयोग का बाहिन्छिकोहत पूर्ण सण्डक धमिकत्वना में स्वतिस्थत किया गया विसमें कि चार पुतरा- हिलियों को लिया गया। माना कि लरपतकार की जातियों W_1 , W_2 , W_3 , W_4 , हैं मौर बीज बोत की मात्राएँ S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S_5 है लगा दो स्तरों पर मासपातनाणी H_0 स H_1 द्वारा निरूपित किया गया है तो एनके 40 सक्यों के मनुमार चार पुतराहृशिया मे प्रयोग द्वारा प्राप्त मकका की उपज नीचे कारणी थे दी गई है।

मक्ता की उपज (विवटल प्रति हेक्टर)

খন	स्वकार समय	R_1	R ₈	R ₃	R ₄	योग	বাঘে
	e W H.	33 0	11.4	22 6	158	828	20 70
1	S ₁ W ₁ H ₀	33 8	22 6	13 4	183	88 1	22 02
2	S ₁ W ₁ H ₁	8 5	120	74	108	38 7	9 67
3	S ₁ W ₂ H ₀	21 0	112	70	98	49 0	\$2 25
4	S ₁ W ₂ H ₃	364	116	147	98	72 4	18 12
5	S ₁ W ₈ H ₀	28 8	38 0	180	88	936	3 49
6	S ₁ W ₃ H ₁	60	24 6	5 8	5 6	42 0	10 50
7	S ₁ W ₄ H ₀	13.5	13 4	31 9	90	67 8	16 95
8	S ₁ W ₄ H ₁	165	32 4	33 0	28 4	1103	27 57
9	S ₂ W ₁ H ₀	33 4	30 4	136	39 0	1164	29 10
10	SaW1H1	25 D	358	30 8	8 0	99 6	24 50
11	S ₃ W ₃ H ₀	13 4	20 8	118	20 4	664	16 60
12	S ₃ W ₂ H ₁	188	18 0	170	120	658	16 45
13	S ₃ W ₃ H ₀	32 8	25 0	150	157	88 5	22 12
14	S ₂ W ₃ H ₁	267	306	13 8-	24 5	956	23 90
15	S ₃ W ₄ H ₀		23 4	33 4	16 4	852	21 30
16	S ₂ W ₄ H ₁	12 0	180	188	18 2		16 95
17	S W Ho	128	310		24 5	1138	28 45
18	$S_3 W_1 H_1$	259	23 2		13 5	74 9	18 72
19	$S^2 M^3 H^0$	17 6	28 4		18 4		FE 30
20	S, W, H	154	14 4		20 8		21 65
21	53 W3 H0	21 2	20 8		14 (17 60
22	5, Wa H1	20 0	31 6		15 (19 80
23	Sy W4 H0	24 6	310				

572

योग

24.	$S_2 W_4 H_1$	14-6	26-2	28-6	32-2 101 6	25.40
25.	$S_4 W_1 H_0$	28-7	300	260	7-4 92-1	23 02
26.	$S_4 W_1 H_1$	24 0	28 2	14.6	184 852	21 30
27.	$S_1 W_2 H_0$	23 6	37-5	160	180 951	23.77
28.	$S_4 W_2 H_1$	34 8	222	268	20.8 104.6	26-15
29.	$S_4 W_3 H_0$	32-6	26 2	24.7	11-1 74-6	23 65
30.	$S_4 W_3 H_1$	22 8	34 0	202	13.7 907	22 67
31.	S. W. H.	20 2	204	68	120 594	14 85
32.	$S_4 W_4 H_1$	23 8	417	246	106 1007	25 17
33.	$S_{\delta} W_1 H_0$	31 2	33.8	26 6	280 1196	29 90
34.	$S_5 W_1 H_1$	29 5	16.4	30 4	174 93.7	23 42
35.	$S_5 W_2 H_0$	38-4	146	15.6	14 4 83 0	20 75
36.	$S_5 W_2 H_1$	20 6	20-4	106	130 646	16-15
37.	$S_5 W_3 H_0$	21-0	316	13.0	14.0 796	19.90
38.	$S_5 W_3 H_1$	15.0	20.5	142	20 0 69.4	17:35
39.	S, W, HD	22.0	22-8	12.4	23.8 81.0	20 25
40.	5, W4 111	37.4	24.0	31-4	21.4 114.2	28.55

978.8 768.3 उपर्युक्त बहु-उपादानीय प्रयोग के न्यास का प्रसरण विश्तेषण तथा प्राप्त परिणामी का निवेचन निम्न प्रशास कर सकते हैं .---

672-9 3359-3

सबसे पहले दी हुई बिधि के धनुमार निध्न मन्यायी का परिकलन किया।

1.
$$\pi \circ \pi_{10} = \frac{(3357.2)^2}{160} = 70442.44$$

937-3

2.
$$q\vec{m} = (33\cdot0^2 + 33\cdot8^2 + + 23\cdot8^2 + 21\cdot4^2) - \vec{m} = 82023 \cdot 59 - 70442\cdot44$$
= 11581·15

4 जननार क्रम० =
$$\frac{1}{4}$$
 (82 8² + 88 1² + +81 0² + 114 2²)-म०ना०
=74134 34 - 70442 44
=3691 90

ग्रद उपचार वर्ष योग के समस्त्रों वे वर्ष योग प्रचीत् मुख्य प्रवाशों एव वरस्परित्रमाणों के लिए वर्ग योग निम्न प्रवार ज्ञात वर सकते हैं — पहले निम्न सारणी वी रचना की-

(S×W) सारणी

	S ₁	Sg	S ₃	S	Sg	यीव	संस्य
W ₁	170 9	226 7	181 6	177 3	2133	969 8	24.24
W_2	87.7	166 D	1481	1997	1476	749 1	18 72
W ₃	166.1	1543	1570	1853	1490	8117	20 30
W_4	109 8	1808	180 8	160 1	1952	826.7	20 60
योग	534 5	727.8	667 5	722.4	7051	3357-3	
माध्य	16 70	22 74	20 86	22:57	223		

6. दीज दीने की मात्राओं (S) के कारण,

-- 400 0

7. सरपतकार जातियों (W) के कारण

== 556 4

8 परस्पर त्रिया S× W के कारण,

 ≈ 10832

(S×H) सारवी

	Sı	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	योग	माध्य
Ho	236 0	371 3	308-5	341 2	363 2	1620 2	20 2
$\mathbf{H_1}$	298 5	356 5	359 0	3812	341 9	1737 1	21.7
योग	534 5	727 8	667.5	722-4	705 1	3357:3	

9 धामपातनाशी (H) के बारण,

10 परस्पर्शत्रया S×H के नारण

$$\pi \circ \pi \circ = \frac{1}{28} (236 \ 0^2 + 298 \cdot 5^2 + \dots + 363 \cdot 2^2 + 341 \ 9^3) - \vec{\pi} \circ \vec{\pi} \cdot 6 - \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} \cdot 6 + 363 \cdot 2^2 + 341 \ 9^3) - \vec{\pi} \cdot \vec{\pi}$$

= 183.3

(W×H) arroll

	W ₁	W ₂	W ₃	W ₄	योग	
Ho	472 6	391 3	399 1	357-2	1620 2	
H ₁	497 2	357 8	4126	469 5	1737 1	
योग	969 8	749 t	811 7	826-7	3357 3	

परस्परितया (W×H) के कारण.

परस्परतिया SXWXH के कारण.

प्रसरण विश्लेयण सारणी

दिवरण भ्रोत	स्व= को०	१० २०	মা :ৰ•য়ঃ	F-1114	िन्दे शास्त्रीबद्ध मान जब α == '05
पुनरावृत्ति	3	1549 35	516 35	9-53*	2 68
उपभार	39	3691-90	94 66	1 75*	1 50
S	4	806 6	201 65	3.72*	2 45
W	3	556 4	185 5	3 42*	2 68
\$×W	12	1083 2	90 27	1.67	1-83
H	1	89 6	89.6	1-65	3 92
S×H 7	4	1833	45.82	0-84	2 45
W×H	3	373 4	124 47	2-30	2 68
1XWX8	12	599 4	49-2	0 91	1-83
भयोग चुटि	117	6340 19	54 18		
पूर्ण	158	11581-15			

उपर्युक्त सारणी मे जिन परिकृतित हैं भागी थर तारक चिह्न (क) बना है यह पपने तदनुतार कारकों में 5% सार्वकता स्तर पर सार्थक धन्तर नो प्रश्नित करते हैं। रूपन्त हो प्रयोग प्रश्नित करते हैं। रूपन्त हो प्रश्नित करते हैं। रूपन्त हो प्रश्नित कर प्रश्नित हो सार्थक हैं जिस्सा धन्ता है। उपनार को को को वो प्रश्नित सार्थक कर में एक-कूमरे हैं जिस्स है। इसी प्रकृत तरक्तवार की चार जी प्रश्नित हो हो सार्थक कर में एक-कूमरे हैं जिस है। इसी प्रकृत प्रश्नित हो चार प्रश्नित हो सार्थक कर में एक-कूमरे हैं जिस है। विभाग मुन्य प्रभावों तथा परस्पर क्रिया हो कि मानक कृष्टि जिल्ला करार सांग कर सकते हैं —

S के बाह्य की बाहक जुटि
$$=$$
 $\sqrt{\frac{3}{2}\xi}$ बाह्य कर कर $=$ $\sqrt{\frac{34}{4} \times 4 \times 2}$ $=$ 1.3011 W के बाह्य की मानक जुटि $=$ $\sqrt{\frac{3}{2}\xi}$ खाहक कर $=$

$$= \sqrt{-\frac{5418}{4 \times 5 \times 2}} -$$

$$= 1.1638$$

$$S \times W$$
 के माग्य की सानक पूटि:= $\sqrt{\frac{-\frac{1}{2}E \text{ HIodouto}}{r \times H}}$

$$= \sqrt{\frac{-\frac{54 \cdot 18}{4 \times 2}}{2 \cdot 60 \cdot 24}}$$
=2.60.24

H के साध्य की सानक जूटि
$$= \sqrt{\frac{1}{90} \frac{1}{100} \frac{1}{1000}}$$

 $= \sqrt{\frac{5418}{4 \times 4 \times 5}}$
 $= 0.8229$

$$W \times H$$
 के माध्य की मानक जुटि $= \sqrt{\frac{-\sqrt{12} \, \pi \log \log n}{1 \times p}}$ $= \sqrt{\frac{54 \, 18}{4 \times 5}}$

=1.6459

=1.8401

$$S \times H$$
 के माध्य की मानक चृहि = $\sqrt{\frac{3}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{10000000}} \times \sqrt{\frac{5418}{4 \times 4}}$

S×₩×H के माध्य की मानक त्रुटि च्च√ त्रु<u>टि माल्बल्यल</u> इ

$$= \sqrt{\frac{54 \, 18}{4}}$$
$$= 3.6803$$

धव तम थी हुई विधि द्वारा निशी भी बहुजगादानीय ध्रयोग का प्रतरण विश्वेषण कर सनते हैं। निश्यु 2ⁿ बहुजगादानीय प्रयोग का प्रयाग विश्वेषण करने नी धेर्स से एक धर्मित गुगम निषि दी है जिसे बेट्स विधि कहते हैं। यह विधि विषय प्रवाद है —

पेट्स बिधि-इस विधि का प्रयोग उपकारों के मुख्य प्रभाव तथा उत्तरे कारण वर्ग-

मोग जात नरने ने लिए फिन प्रकार कर सकते हैं-

(1) कारको के संबंधी को कम में नित्त दिया। मश्री सह स्वाक करना साहित दि जनकार के सिद्ध सदार सिताने के तुक्त बाद करका क्रिकेट सक्षार्थी संबद देगा सावस्थक है।

(2) संख्यों को लिला के पक्ष्मायुष्यमते स्तस्म में उत्थार सोधांको लिला दिया

वाता है।

(3) पन तीनारे स्तम्भ में संवर्धों ने लिए दिये गये मुनत मार्गों का प्रारम्भ ने ना में ओड़ दिया जाता है। इस मकार इस कारण में उत्पर की प्राथी सदयाएँ कान हो जाती हैं। किएन आपनी अकारणें अधिक कुक्त के हुए है एएने में से वहनार स्टाक स्टाक्ट साल कर सी जाती हैं।

(4) क्या 3 को निर से करने समला स्तम्भ तैयार कर निया जाना है। मदि

प्रयोग में n बारक हैं तो इस किया को बोहराकर n स्वय्य संवाद करते होते हैं।

(5) स्रोतम ताम्म म गम्भी संस्था को सोइनर काव संस्थाएँ उपकारां ने पूर्ण प्रभाव नो क्लिंगित करती हैं। इस संस्थायां को 2^{n व}र संध्यात करने राजवारों ने साध्य

प्रभाव तात नार निये जाने हैं जबकि क्षुपरावृत्तियों नी सन्या है।
(6) प्रतित रतस्य नी यहारी संस्था सर्वेद नुस्त प्रेसभी ने योग ने समान होती है।

(6) जारता राज्य की गहाता तथ्या सदय हुत अवश्वी व शाय है तह ही दशका वर्ग करते 2° हो आग दे ने पर गंगीया करता ताल हो जाता है। इसने बाद ने गव्याची गा जगन वर्ग करते 2° हो भाग दे गर तब तुमार उपचारो के वर्ग थीग जात हो जाते हैं। इस नम थोगों का असरण विश्लेषण सारशी में अथोग करने, सार्यक्ता परीक्षा सामाग्रम रूप अंक्ष भी जाती है।

परिक्रमा मे त्रुटि की जीव

(i) विगम सीर गम नगतन्त्रा ने उपचारों का योग स्रतम स्रतम करने परिकासन ने शित् यो गई गारणी मे प्रतिक स्तन्त्र ने मीचे रण ज्या आता है।

(ii) प्रामेन स्ताम का योग जात करने सबसे कीचे रण दिया जाता है।

(in) उपचार योगों में यगने स्वस्था में उपर संयुत्त की भाषी संस्थामां ने मीग अस्य करने द्वा मान्यामां के कीके रख कि नाते हैं।

(is) जीव के लिए देलिये कि पिछने क्ष्मभ का योग, धनने क्ष्मभ के उपर से कृत्त की भाषी संब्यामों के योग के समाप है।

(v) दूररी जीन कह है कि एक स्वास्त्र और इससे विश्वेत ब्लाब्स के घोना में धानह, विश्वेत राज्य की माम और विश्वम जम की नश्याक्ष के बात के झानर के गमान होता है। उपर्युत्त विश्वित प्राथमें किन उन्हर्सन मारिया गर्या है --- उदाहरण 21.9: मनका नी दो प्रजातियो, गंग-5 (Ganga-5) घोर बस्ती (Bass) पर फासफोरस व पोटास नी दो-दो मात्राघी ना प्रमाव जानने के लिए एक प्रयोग निया गया। पासफोरस नी मात्राएँ 0 और 45 निर्माण प्रति एकड घोर पोटास नी मात्राघँ 0 घोर 30 निर्माण काल एकड सी गई। मनवा नी दोनो प्रजातियों (0, 1) तथा फासफोरस के दो स्तरों (0, 1) व पोटाम ने दोनो स्तरों (0, 1) के घाठ सचयों ने याशिस्टकी के दो स्तरों (0, 1) व पोटाम ने दोनो स्तरों (0, 1) में घाठ सचयों ने याशिस्टकी के याशिस्टकी के प्रति प्रयोग में नार पुनराहित्यों की गई। मनवा नी उपज प्रति प्रयाण (10 घीर × 15 घोर) निम्न सारणी में दी गई है—

उपबार सबव (VPK)	R,	R,	Ŕ ₃	R,	बोय
(1117)	11/3	. г	1/3	1.6	
(1)	4 58	2 69	4.02	3.40	14-69
k '	3-59	3.57	4.00	3.26	14.42
k	4 08	3 62	3-42	4 2 3	15.35
pk	2.50	4.05	4 30	2 78	13 63
v	1 82	4 08	3.60	2 06	11.56
vk	4 27	4.57	4.60	4 24	17.68
vp	2.79	4.42	3.60	1.50	12.31
vpk	3.12	3 94	4.51	2.20	13 80
	26.78	30 94	32.05	23.67	113:44

इस प्रयोग के ग्याम का प्रमरण-विश्लेषण येट्स-विधि द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं। सतः उपचार सवयों के साध्य प्रचाव एवं वर्ग-योग झात करने के लिए निम्न मारणी सैसार की गई.—

उपदार संघय	उपचार योग	(i)	(11)	(iu)	इपदार माध्य	सपटना ने बर्ग-योग
(1)	14-69	29.11	58 09	11344	3-54	402 14
`k	14.42	28 98	55 35	5 62	0.35	0 987
Б	15.35	29 24	- 199	- 3.26	- 0.20	0.332
pk	13 63	26-11	7 61	- 6 08	- 0 39	1-155
मोग		113 44	119 06	109 72		
.v	11.56	- 0 27	- 0 13	- 2.74	- 0.77	0.235
vk	17.68	- 1.72	-313	9 60	0 60	2.880
vk	12-31	6-12	1-45	- 3.00	-019	0 281
vpk	13-80	1-49	- 463	- 3 18	- 0 20	0 361
विषम त्रम-संस्थाओं	1					
के सचयों का योग	53 91	64-20	54 52	104-44		
सम कम-संख्यामी						
के संचयो का योग	59 53	54 86	55 20	5 96		_
कुल याग	113 44	119 06	109.72	110 40		

गामान्य विधि वे बनुसार,

=11 15 धतः प्रसारण विश्तेषण शारणी है.

पृथ्यि व व व == 22 84 - 6 19 - 5 50

विष्रण सोउ	रव० को०	₹2 ₹4	লাঃ হঃ নঃ	F-पार
पुनरावृत्ति	3	5 50	1 83	3 45
उपचार	7	6 19	0 88	1 66
मृ दि	21	21 15	0-53	1 66
पूर्व	31	22:84		

 $\alpha = 0.5$ प (3, 21) हतः काः वे लिए निका सारणी (परिः प-5.2) द्वारा प्राप्त मात्र = 3.07 भीर $\alpha = 0.5$ र (7, 21) त्यः कोः वे लिए निका साराभिद्ध सात्र = 2.50 वि परित्र कि मानो तो सारणीयद्ध श्वदुत्तार निकाली से तुष्तरा करने पर विश्व होता है। पुनराष्ट्रिया मानोव स्वतर है किन्तु उपकारों से भ्रमतर निर्धेर है। ग्रदा उपकार श्वप्यो की सार्वकरा की भ्रमतर दरिक्ष के प्रया प्रदेश साराभ्य साराभ्य प्रदेश साराभ्य स्वतर है किन्तु उपकारों से भ्रमतर निर्धेर है। ग्रदा उपकार श्वप्यो की सार्वकरता मही है।

एक उपचार माध्य को सानक पूरि
$$= \sqrt{\frac{e_s^3}{2^n s_s^2}}$$
 $= \sqrt{\frac{0.53}{2 \times 4}}$ $= 0.257$

प्रत्येक मुर्ग्य प्रभाव व परस्परिक्रण की सार्यक्वा-परीक्षा इनके लिए F-मान काठ करके, $\alpha = 0.05$ सा॰ स्वर व (1, 21) स्व॰ को॰ के लिए मारपीवढ F_{α} से तुलना करके सामान्य रूप में कर सक्ते हैं।

बहु-उपादानीय प्रयोग में उपप्रतिचयन की स्थिति में प्रसरण विश्लेषण

प्रवासन को उपादानीय प्रयोग सन्बन्धी प्रसरण विश्लेषण दिया गया उन सब में प्रति प्रयोगनल एक से एक ही प्रेक्षण निया गया था। किन्तु प्रनेकों प्रयोगों में एक एक से कई उपप्रतिचयन एक ने का चयन कर निया जाता है। इस स्थिति में प्रमरण विश्लेषण सारणी (2110) को महायता से किया जा नकता है। यहाँ उस सारणी से यह मिश्रका होती है कि विचरण लोग ने स्तन्भों में उपचारों को मुक्य प्रमान व परस्पर क्रियामों में विपादित करना होता है। इतना ही नहीं प्राय प्रयोग प्रतिचयन एक पर कई कई प्रकार में ते होते हैं। ऐसी स्थिति में माना कि प्रति प्रयोगनत एक के 'ठ प्रतिचयन एक को का चयन किया गया है और प्रति प्रतिचयन पर प्रमेण निराण से हैं। एप यु उपादानीय प्रयोग के निल् जिससे याहिष्ठकीहत पूर्ण सकड़ कमिकस्था का प्रयोग किया गया है, हस्टब्य पु 5 581 प्रमार विक्तिष्ण सारणी (21.15)।

यदि प्रयोगमत एक से प्रतिकायन नहीं किया गया हो तो n=1 होगा भीर उपर्युक्त सारणी मे n=1 राप देने से इन स्थिति के लिए प्रसरण सारणी ना प्रारूप जात हो जाता है। यदि एक प्रेतन प्रति प्रतिकायन भूनिट लिया गया हो तो u=1 होता है। u का मान 1 रक देने वर उपयुक्त सारणी प्राप्त हो जाती है। यदि n=1, u=1 हो तो स्थ्यद्वता सारणी (2115) भीर (21.13) एक समान हो जाती है। वर्ग योगों को मामान दम से परिचनित किया जा सकता है।

तीन या तीन में प्रविक कारक होने की स्थिति म स्वापक प्रमास मारणी पहले की भी कि बना सकते हैं। इस सारणी में दिवरण स्थीत के स्तम्म में मुख्य प्रमाव तथा परस्पर-कियामी की तदनुसार सस्या बढ़ आती है इन्ही के ब्रनुसार स्वातन्त्र्य कीटि तथा अन्य मार्गों में परिवर्तन करना होता है।

व्यवहार में बहुत ग्रांभक कारक वा कारको ने साम्रक स्वर सेना उचित नहीं है क्योंकि इस स्थिति में नवसो को सक्या अत्यक्षित वह जाती है और इनका प्रयोग में प्रवन्ध करना कठिन हो जाता हु इसके अतिरिक्त उक्यतर अस की परस्याधिकामों की सार्वकता-परिशा के परवाद निर्वेचन करना भी कठिन है। यदि क्लिंग प्रयोग में प्रतेण करना के लेना आवस्यक हो तो इस स्थिति से तृतीय या स्थित अस की परस्यरिनामों की सार्वकता-परीक्षा प्रनाम ने नहीं करते हैं तथावि इन्हें प्रयोग कृटि ने सम्मिनित कर निया जाता है।

एक पुनरावृत्ति की स्थिति में प्रसरण विश्लेयण

यदि नारनों नो सच्या ग्रांघन हो (ग्रायांत् नार या चार से ग्रांघन हो) मोर प्रायंक कारक के गई स्तर हो तो सबयो की सरया इतनी ग्रांघन हा जानी है नि प्रयोग दिन्यान में एन से ग्रांघक पुजरातृत्ति लेनी ग्राम्भव नहीं होती है। उनके नई कारण हो सकते हैं.

ere ere

रिवद्भ हो। इ

(- - 1)

कुनरावृक्ति 34414 (0-1) (1-6)

(pq - 1)

उराहरण (218) 🖿 म्यन्ट टड्ड के अन्ति कृषि महारिस्तासम्, स्टब्युर के शीमम से प्राप्त हुना।

प्रतिषयन गृटि rpq (n-1)

4×4

Lbdyn - I

त्री स्थान एक क

एक तो यह कि प्रयोगणन सामग्री एक से प्रिष्ठ पुनरावृत्ति के सिए उपलब्ध न हो। इसरे प्रयोग का स्वालन दुन्कर हो जाय। हीसरे यह कि वई पुनरावृत्तियों के प्रेक्षण लेने के निए समय नही हा। इस प्रनार की सनस्या स्मायन ग्रास्त्र तथा मृदा विज्ञान (Soil Science), सम्बन्धी प्रयोगा मायाय उत्तरप्र होती है क्यांकि प्रत्यक रसाविनव विक्तेपण व्यांक्त समय लेता है। नभी-नभी ऐसी कठिनाई क्षेत्र प्रयोगों भी सामने प्राती है मठ इस प्रयोगों में केवल एक ही पुनरावृत्ति लेन हैं और उच्च प्रमाकी परस्परित्यामों को प्रयोग मृदि के स्थान पर प्रयोग कर निया जाना है। उच्च प्रमाकी परस्परित्या म तृतीय कम या इसल प्रयोग कर निया जाना है। उच्च प्रमाकी परस्परित्या क तृतीय कम या इसल प्रयोग कि कम को परस्परित्या क तृतीय कम या इसल प्रयोग कर निया जाना है। उच्च प्रमाक ही ती इसे भी प्रयोग कृति है सिम्मितत वर सकने हैं।

पूर्ण संकरण

बहु-उपादानीय प्रयोगी म सचया ना सत्या सत्यिष्ट हो जाने पर याष्टिकिनीहर पूर्ण लण्डक समिकत्यना म, पुनरावृत्ति (यण्डरा) की सन्तर्वायना बनाए रतना प्रतम्भव हो जाता है। पुनरावृत्ति की सजाधीयना के लिए यह धावस्यक है कि उचित साक्षार के लण्डक का तठन किया जाय। लण्डक का साक्षार कृष्ट्व होन की न्यिति म या तो सक्रय का प्रतमे करके साक्षार को पटाते हैं या सन्य किसी यभिक्त्यना का चयन करना होता है।

सकरण से मिनिशाय एव पुनरावृत्ति (पूर्ण खण्डक) वो दो या दो से मधिक खण्डको म विभाजित करना है जिसम कि प्रत्येक राण्डक स्वयं संस्थातीय होता है। इस खण्डक को सतम्पूर्ण बनाव (Incomp'ete blocks) बहते हैं बगोकि एक लण्डक में कुछ उनवार सचय विद्यमान होने हैं भीर कुछ विद्यमान नहीं होते हैं। इस प्रकार प्रयोग पूटि कम ही जाती है जिमके परिणामस्वरूप संवर्गणत (confounded) उपवार संवय की छोड़कर मन्य उपचारा की परीक्षा अधिक परिमुद्धि संहोती है। इसका कारण यह है कि जो भी उपचार सचय संसम्पूर्ण स्नानों की रचना म प्रयोग किये जाते हैं उनके प्रति सूचना असम्पूर्ण ब्लाको में बातर के साथ मिश्रित हो जानी है जिसको कि पृथक नहीं किया जा सकता है। मतः जिस उपचार का सकरण किया गया होता है, उसे प्रसरण विश्लेषण सारणी मे प्रयोग मुटि के साथ जोड देने है अर्थात् इस उपचार के सभटक को विवरण स्नोन के स्तम्भ में पलग से नही दिखाया जाता है। अत इमने प्रति सार्थनता नी परीक्षा नहीं करनी होनी है। सकरण करते समय यह सावधानी बतनी चाहिये कि केवल उसी उपचार-मघटक (बैयम्य) का सक्तरण किया जाये जो महत्त्वपूर्ण न हो या जो सबसे क्य महत्त्व का हो। ध्यवहार मे मधिकाशत उच्चतर कम की परस्परिकया या परस्परिकयायी को सकरण हेत् लिया जाता है। इस प्रकार यदि एक हो उग्चार सचय का सब पुनरावृत्तियों मे मकरण करते हैं तो इस मकरण किया को पूर्ण सकरण (complete confounding) कहते हैं।

संकरण प्रभिक-भना के लिए ब्यापक प्रसरण सारणी बहु-छवादानीय प्रयोगो की भाँति

सवार की जाती है। यहाँ सक्यांजित प्रमाव (मुख्य प्रमाव या परस्परित्या) की स्वातंत्र्य कीट तथा यम योग को प्रयोग कृति के साथ जोड दिया जाता है। सकरण का प्रयोग प्रतेक समिकत्वता साथ स्वायं प्रमाव का सकरण है जैसे यादिष्ठा है हा पूण राज्य समिकत्वता सीटन यम समिकत्वता सादि। व्यापंक प्रसरण विश्वेषण सारणी जस समिकत्वता को साधार पर ही तैयार की अगो है जिसका प्रयोग किया यसा है। व्यवहार स ध्यिकतर यादिष्ठानी कृत पूण राज्य समिकत्वता वा ही प्रयोग होगा है। इन सबने लिए प्रमाय विश्वेषण सारणियी यहाँ सत्या प्रयोग के प्रतरण विश्वेषण सारणियी यहाँ सत्या प्रयोग के प्रयोग के प्रयोग का स्वाया प्रयाग स्वाया प्रयोग के प्रयोग का विश्वेषण विश्वेषण स्वाया स्वा

दिवरण योन	स्वर कीर
दाण्डम (अलावता)	(2r - 1)
पुन रावृत्ति	(r - 1)
पुनराष्ट्रशियो म बनावरा	r
A	1
В	1
AXB	i
С	1
AxC	1
BXC	1
प्रयोग त्रुटि	6 (r - 1)
पूर्व	(8 r - 1)

उपमुक्त सारणी ने लिए व॰ य॰ मा॰ व॰ य॰ तया F-मान सामान्य रूप में शात वरते सून्य प्रभाश तथा परस्वरिक्याओं की साधवना की परीक्षा की जा सकती है।

प्रशिक सरदण

प्राय ऐसी स्थित उत्तान होती है ति किसी भी उत्तवार ने सबटन नो महरेबपूर्ण नहीं सममा जा सनता है। बाद हो सब उत्तवार संबद्ध का एन कावत म रखता समानीयता भी होन्य से समुद्धित समभा जाता है तो ऐसी स्थिति में च्योतिन संकरण एन उद्यत्त विश्व है। च्योतिन संतरता के चारतीय प्रमेश प्रमेश पुरस्ति में विभिन्न उत्तवार प्रमान का सकरण हिया जाता है। यह उपचार प्रभाव वह होते हैं जिनमें सन्य की स्पेता कम रिव होती है। प्राय यह उपचार प्रभाव उक्क जम की परस्तर-त्रियाएँ होती हैं। इन प्रकार की सकरण त्रिया को सातिक सकरण कहते हैं। इन प्रयोग विन्यान द्वारा मकरणित उपचार के प्रभाव को उन पुतरावृत्तियों को महायता से सात किया जाता है जिनमें कि इन एक्चार प्रभाव का सकरण नहीं किया गया है। इन प्रकार के उपचार विनका कि सरणा नहीं किया गया है। इन प्रकार के उपचार विनका कि सरणा नहीं किया गया है। इन प्रकार के उपचार विनका कि सरणा नहीं किया गया है स्वित परिमुद्ध से सावतिज्ञ किया या है स्वति इनकी परिम्ना सकरणित उपचार की समित प्रिक्त होती हैं। जैस 23 प्रयोग के निए एक याई जिस हमते प्रमुख स्वतिक की स्वति के जिसमें किया विन पुतरावृत्तियों की गई हैं सौर इनके अपना उपचार प्रमाव AB, BC व AC वा मकरण विया यया है, प्रमरण विक्तियान सारणी की स्वर्थन हमता होती हैं

विवरण स्रोत	स्यः सं•
स्तरहरू	5
पुनरावृत्ति पुनरावृत्तियों के खण्डन	2 3
A	1
В	1
С	ī
AB	1
BAC	1
BC	1
ABC	1
प्रयोग तुटि	11
वूर्ण	23

इस स्थिति में सकर्पात उपचार प्रमावों के वर्ष-योग उन पुनरावृत्तियों से परिश्तित किये जाते हैं जिनमें इनका सकरण नहीं किया गया है धीर प्रस्य वर्ष-योग किया गया है धीर प्रस्य वर्ष-योग क्षामान्य इस में परिश्तित किया नवा है है। यह प्रार्थी हो ज्यानक इस से पूर्ण करके परिशाम प्राप्त कर लिए बाते हैं। इसी प्रचार को प्रसर्फ विश्तेष्य प्राप्त कर लिए बाते हैं। इसी प्रचार को प्रसर्फ विश्तेष्य प्रार्थी प्रमास प्राप्त कर लिए बाते हैं। इसी प्रचार को प्रसर्फ विश्तेष्य प्रार्थी प्रमास प्राप्त कर लिए बाते हैं।

विपाटित क्षेत्र प्रभिकल्पना

यह भी एक प्रकार की बहु-उपदानीय प्रामिकतना है जिनसे एक कारक के मुख्य प्रभाव का मुख्य क्षेत्री के साथ क्षकरण है। यहाँ मुख्य क्षेत्र के श्रामिश्रय एक प्रयोगनत एक के हैं जो साकार में नदी है। श्राय प्रजीवों से कुछ ऐसे उपवार होते हैं कि जिनके लिए छोटी प्रमोगनत एकको का सेना उचित नहीं है मर्यात् इन उपचारों को छोटे एकको पर ठीक प्रकार से प्रयुक्त नहीं किया जा सकता है। जेंगे सिलाई की बुछ ऐसी कार्य प्रणालों है जिनने लिए दृह्द भूलक्कों की भावस्थकता होती है, लाक्ष्म सम्बन्धी मनुस्थानों से सम्भूप पीधा पर (Green house) की एक हो सापक पर रक्ता जा सकता है। तेंकने की भट्टी (Baking oven) दिसोक्टम पूर्वित (freezing unit) मादि सम्बन्धी प्रयोगों से कृद्ध प्रयोगनत पूर्वित शासक्ष्यकता होती है।

इस धभिक्तपना म दो बांदी से अधिश नारको या उपचारी का विभिन्न स्तरी पर होना पावश्यक है। इन उपचारों संसे एक उपचार को उसके भिन्न भिन्न स्तरों पर एक पुनरावृत्ति के मूर्य क्षेत्रों म याहक्छिक चीति सं नियत कर दिया जाता है फिर प्रस्पेक मूक्य सत्र मी दूसरे उपचारों ने स्तरों के समान संस्था में उपक्षेत्रों में विभाजित कर दिया जाता है भीर इत उप क्षेत्रों में दूसरे उपचार की विभिन्न स्तरी पर बाहक्छिकी विधि से निदिन्ट कर दिया जाता है। बार्राच्छकी करण की किया को प्रत्येक क्षेत्र में स्वतन्त्र रूप से किया जाता है। यदि प्रयोग में कोई तीसरा शोधन विभिन्न स्तरो पर हो तरे उपक्षेत्र को इस तीसरे उपधार के स्तरों की सक्या के बनुवार विभाजित कर दिया जाता है। इन क्षेत्रों को उप उपक्षेत्र कहते हैं। तीसरे उपचार को धपने विभिन्न स्तरो पर इन उप उपक्षेत्रों म याहिक्छ रोति से निर्दिष्ट कर दिया जाता है और इस याहिक्छ की करण की किया को प्रत्येक उपक्षेत्र में स्वतन्त्र रूप में किया जाता है। इस बात नी इस प्रकार भी कह सकते हैं कि तीसरे उपचार के लिए प्रत्येक उपक्षेत्र की मुख्य क्षेत्र की रूप में समक्का जा सकता है। इस प्रकार सैजा तक हिन्द से कितने ही उपचारों को विभिन्न स्तरों पर लिया जा सबता है पर इनकी सक्या अधिक हो जाने पर प्रयोग की स्वाव रूप से सवासन करना सगभग पसम्भव हो जाता है यत अधिनांता तीन से अधिन उपचारों को नहीं लेते हैं। प्रयोग में प्रावायकतानुसार युनरावृत्तियों की संस्था से श्री जाती है।

माना एक प्रयोग मे दो कारक A व E है जिनके स्तर कमा 3 व 4 है। A को मुक्स क्षेत्र मे और B को उपक्षेत्र म निया गया है। माना प्रयोग म 3 पुनराकृतिय! है तो प्रयोग का किया तिन्द प्रकार का होता है —

पुनरावृत्ति 1			पुनराष्ट्रित 2			पुनरावृति 3		
a,	ag	a _ĝ	80	a ₂	a ₁	a _o	a ₁	.,
b,	b ₂	b ₀	bg	b ₁	bg	b _o	b ₁	b ₂
ь	b_0	b _a	b_1	b ₂	b _a	bg	bg	b,
b ₂	b ₁	b	\mathfrak{b}_{0}	b _a	b _o	b _a	bg	bo
b _o	b	b ₁	b ₃	b _o	b ₁	b ₃	bo	b,

यदि प्रयोग में तीन कारनों A,B व C नो सम्मिनित निया गया है जिनके स्तर कमसः 3,4 व 2 है तो प्रयोग ना विन्यास निम्न प्रनार ना होता है। माना नि यहाँ प्रयोग में नेवल दो पनराविलयों तो गई है —

पुत्रसर्नि 1			पुत्रसकृति 2			
a ₁	a ₂	a ₂	20	a ₂	a _z	
c, b, c _n	co by co	c, b, c,	c ₁ b _n c _n	ca be ca	cn b3 c1	
ca ba ca	c, b _o c _o	c ₀ b ₂ c ₁	c ₀ b ₂ c ₁	c ₀ b ₁ c ₁	c, b, c	
c _n Ե ₄ c ₁	ct bi co	c _n b ₁ c ₁	c, b, c _n	c ₁ b ₀ c ₀	co bi ci	
c1 b2 c0	c1 p3 c0	co hs ct	c ₁ b ₃ c ₀	c ₀ b ₃ c ₁	c ₁ b ₀ c ₀	

इसी प्रकार का विज्याभ किन्ही चन्य उपचार सहयाची चौर उनके स्तरी के चतुमार दिया जा मकता है।

विपारित क्षेत्र प्रभित्तरात में सभी उपचारों के मुख्य प्रभाव या परस्परित्याग्नी की तुनना समान सूत्रमा (Precision) से नहीं होती है। वह उपचार जो मुर्प क्षेत्र को निर्माट दिया जाता है उनके द्वारा कम सूचना प्राप्त होती है । यह उपचार जो मुर्प क्षेत्र को निर्माट किया जाता है उनके द्वारा कम सूचना प्राप्त होती है । इस कारण उन उपचार को विस्तेत लिए वहे प्रमुख्य की प्रमोगन प्रकृती को तिही है। इस कारण उन उपचार को विस्तेत लिए वहे प्रमुख्य के प्रयोगन प्रकृती की वाद्य करता हो या जिस उनचार से कम किय हो मुन्य क्षेत्र से नियत करना चाहिय। उपक्षेत्र से दिये उपचार के प्रति प्रधित कृत्य प्राप्त होनी है तथा परिणाम प्राप्त प्रतिकृत होते हैं। यही त्रम चलना रहना है। इस सम्प्राप्त होनी है तथा परिणाम प्राप्त प्रप्ताप्त सुद्धि को देवने से भी होती है। मुख्य क्षेत्र के निष्य प्रयोग वृद्धि की स्वात्म्य-सहस्या के सर्व कम होती है। इसी प्रकार उपक्षेत्र के लिए स्थाप नृद्धि की स्वात्म्य-सहस्या के सर्व क्षेत्र के लिए स्थाप नृद्धि की स्वात्म्य-सहस्या के सर्व क्षेत्र के लिए स्थाप नृद्धि की स्वात्म्य-सहस्या के सर्व क्षेत्र के लिए स्थाप नृद्धि की स्वात्म्य-सहस्या के सर्व क्षेत्र के लिए स्थाप नृद्धि की स्वात्म्य का स्थाप प्रयोग तृद्धि को स्वात्म वात्म से स्थाप स्थाप नृद्धि की स्वात्म स्थाप स्थाप नृद्धि को स्वात्म के लिए स्थाप नृद्धि के स्वात्म स्थाप स्थाप निर्माण सार्याच की सर्व स्थाप निर्माण सर्वाच सार्याच की सर्व स्थाप निर्माण सर्वाच स्थाप स्थाप स्थाप स्थाप निर्माण सार्याच स्थाप स

माना हि उपक्षेत्र प्रभित्रस्थना में दो कारक (उथवार) A धौर B है जिनके स्वर कमग्र. p धौर q हैं। माना नि उपवार A को मुख्य क्षेत्र में धौर उपवार B को उपक्षेत्र में दिया गया है। प्रयोग में पुनरावृत्ति-सरया ह है तो प्रतिरूप निम्न होता है:—

$$X_{ijk} = \beta + \alpha_i + \beta_k + \epsilon_k + \beta_j + (\alpha \beta)_{ij} + \eta_{ijk} \qquad (21.33)$$

$$i = 1, 2, 3, ..., p$$

$$j = 1, 2, 3, ..., q$$

$$k = 1, 2, 3, ..., r$$
where $\epsilon_k \sim \mathbb{N} (0, \sigma_s^2) \quad \eta_{ijk} = \mathbb{N} (0, \sigma_{ijk}^2)$

बनाये

	प्रयाशित मान्यन्य	
उगर्युक्त विशामित क्षेत्र प्रशितम्थता के निष् प्रमरण विश्लेषण सारपी (प्रतिकष्])	सारणी 21 16	
उम्मूक		

We We

Tre 47

legent tits !

मस्यक्षत्र

युनराष्ट्रील

प्रतिरूप (21 33) मे ρ_k, kबी पुनरावृत्तियो का वास्तविक प्रमाव है c_k मुख्य क्षेत्रों के लिए प्रयोग तुटि है धौर η_k उपसेत्रों के लिए प्रयोग तुटि है। μ व्यापक माध्य है।

 α , β_j , $(\alpha\beta)_{ij}$ कमरा. मुख्य प्रमाव A व B मौर परस्परिक्या A B के वास्त्रदिय प्रमाव हैं।

इन प्रसरण विरत्तेषण के हेनु, वर्ग योग मामान्य विधि से ज्ञात किये जा नवते हैं जिसकी विधि बहुउपादानीय प्रयोगों के साथ पहसे ही दी जा चुकी है ।

योद प्रयोगों में तीन या तीन से संघित उपवार हो नो उपर्युक्त सारियनीय प्रतिहर को विस्तरित विया जा सकता है।

युगल भाध्यो में प्रन्तर की मानक त्रृटि

(1) मुस्य क्षेत्र उपचार के दो स्तरों में माध्य बन्तर की मानक बृद्धि

$$s_{-d} = \sqrt{\frac{2E'_{p}}{rq}}$$
 (21.34)

(2) उपक्षेत्र उपचार के दो स्नरों में माध्य धन्तर की मानक बृद्धि,

$$s - d = \sqrt{\frac{2E'_s}{p}}$$
 (21.35)

(3) परस्पर किया के दी स्तरों में माध्य बन्तर की मानक चूटि,

$$s - d = \sqrt{\frac{2(AB)^2}{rp}} \qquad \dots (21.36)$$

(4) a के दो माध्यो के सन्तर की मानक बृद्धि जवकि b का स्तर वहीं हो,

$$s - d = \sqrt{\frac{2\{(q-1)E_b + E_a\}}{5q}}$$
 (21 37)

जपर्युक्त मानक तृटियों ने प्रति सूत्रों में सनन पडति सारकों (21.16) ने सनुसार हा इसी प्रकार ने मानक तृटि ने प्रति सूत्र जप-उपक्षेत्र के लिए भी दिये जा मनते हैं। इन सूत्रों से नेवल भाजन में सन्तर करना होता है। इनने स्रतिस्क्ति उपवासों से सन्तरों की सस्याबद्ध जाती है।

जबाहरण 219: मक्का की पांच प्रचातियों में धन्तर तथा प्रत्येक पर नाइड्रोजन के चार स्तरों का प्रमाव जानने के हेनु प्रयोग किया गया। प्रयोग का विज्यास विराटन क्षेत्र धर्मिकल्लना में किया गया जिवसें तीन पुन्तग्रहृतियाँ माँ। सक्का की प्रणातियों की मुख्य क्षेत्र में तथा नाइयोजन की मात्राधों की उपक्षेत्र में दिया गया। प्रत्येक उपसेत्र का धर्माकार 10मी ० X 15मी ० रक्षा गया है, इस प्रयोग द्वारा प्रान्त कक्का की उपज किसी-धर्म प्रति मूक्षक निम्म पी:---

प्रसरख-विश्लेपख

मक्ता के दानो भी उपज (विसोधाम प्रति भूलण्ड)

			<u> </u>			
मन्त्री की	নাহটোলৰ কা				योग	माध्य
प्रजाति	स्तर (किसी० प्रति हेवटर)	R_1	R ₂	R ₃		
	0	4 2 5	12-24	10 88	27:37	912
v ₁	60	6 2 5	4 59	7.24	18 08	6 03
-	120	7 04	10 24	4.91	22 19	7.40
	180	6.65	9 61	6 66	22 92	7 64
	Ū	10 84	9 01	7 81	27.66	9 2 2
٧2	60	16 45	11 27	8 65	36 37	1212
-	120	10 76	7.14	6 44	24:34	8 1 1
	180	6 42	7 85	8.48	22 75	7.58
	0	4-60	576	3 76	14.12	4.77
V ₃	60	7 27	8 32	3.16	18.75	6 25
•	120	9 08	1140	8 73	29 21	9 74
	180	10.88	9 63	7 40	27 91	9:30
	0	6 31	5 30	6 93	18:54	6.18
V ₄	60	5 64	716	6 92	1972	6.57
-	120	6.33	7 68	6 99	21.00	7.00
	180	2 59	3 61	2 27	8:47	2.82
	8	2 46	2 28	3.74	8 48	0 83
V ₅	60	6.32	7 01	10 35	23 68	7 89
	120	5 69	6 85	5 96	18 50	6 17
	180	696	7 22	10 47	24 65	8 22
धोग		142.76	154 17	137 75	434 71	

इस प्रधोग ने ग्यास का विश्लेषण एव प्राप्त परिणानी का निर्वचन निम्न प्रकार कर शारी हैं। प्रसरण विश्लेषण के हेतु निम्न सक्याओं का परिचसन विष्या ---

मुख्य क्षेत्र के लिए वर्ग थोग निग्न सावणी बनावर स्पानता से ज्ञात वर सकते हैं -

	R _s	Ra	Ra	योग
v,	24.19	36 68	29 69	90 56
v.	44 47	35 27	31 38	111-12
V ₃	31 83	35 11	23 05	89 99
v,	20 87	23 75	23.11	67 73
Y ₅	21 43	23 36	30 52	75 31
η	142 79	15417	137 75	434 71

म॰
$$= \frac{(43471)^2}{60}$$

= 3149 54

पुनरावृत्ति व०स० =
$$\frac{1}{20}$$
 (142 792 + 154 172 + 137 752) - स० वा०
= 3156 62 - 3149 54
= 7 08

V के बारण ब॰व॰
$$=\frac{1}{12}$$
 (90 56^2+111 12^2+89 99° $+67$ 73^2+75 31^2) $-$ स॰ बा॰ $=3242$ $15-3149$ 54 $=92$ 61

मुख्य क्षेत्र योग
$$V_1R_1=425+625+704+665=2419,\dots$$
., $V_5R_3=374+1035+596+1047=3052$

$$N_0 = 9617$$
, $N_{60} = 11660$, $N_{120} = 11524$, $N_{180} = 10670$

$$= \frac{1}{3} (2737^2 + 1808^2 + +1850^2 + 2465^2) - 40 = 10$$

$$=21700$$

V×N व०य० = उपचार व०य० - N व०य० - V व०य०

ब्यापक प्रसरण-विश्लेयण सारणी

विकास जोल	स्वन की	र स्टब्ट	<i>মাণৰণৰ</i>	F-nin	सारनीयज्ञ 5%- F-मान
मुक्य क्षेत्र					
पुनसङ्खि	2	7 08	3 54	0 42	4 46
v	4	92 61	23 15	2 75	3 84
बृटि (a) उपक्षेत्र	8	67 16	8 39		
N	3	1775	5 9 2	1 15	2 92
V×N	12	106 64	8 89	174	2 09
নু তি	30	153 75	5 12		
पूर्ण	59	444 99			

वर्ष्युक्त सार्वी वे धन्तिम स्त्राम्य में दिये F के सारवी (परि॰ प॰-52) हारा प्राप्त मानो से तदनुसार परिवसित F-माना वी तुनना वरने पर नात होना है वि वोर्दे भी मुक्त प्रभाव या परस्परित्या सार्थक नहीं है।

V के माध्य की मानक श्रूटिक्क
$$\sqrt{\frac{E_o}{r \times q}}$$

$$\approx \sqrt{\frac{839}{3 \times 4}}$$

$$\approx 0.8161$$
N के माध्य की मानक श्रूटिक्क $\sqrt{\frac{E_o}{r \times p}}$

$$= \sqrt{\frac{512}{3 \times 5}}$$

$$\approx 5842$$

N के माध्य की विसी एक प्रजाति के लिए मानक बृटि

$$=\sqrt{\frac{E_b}{r}}=\sqrt{\frac{512}{3}}=13063$$

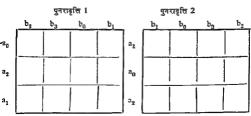
एक प्रजाति की, N ने किमी एक स्तर पर मानक त्रुटि,

$$=\sqrt{\frac{(q-1) E_b+E_a}{t \times q}} = \sqrt{\frac{3 \times 512+839}{3 \times 4}} = 14068$$

विपाटित खण्डक या पट्टी क्षेत्र प्रशिकल्पना

नभी-कभी प्रयोग में लिए गये दो उपचार ऐसे होते हैं कि उनमें से किसी एक को भी लघु प्रयोग एक्को से प्रयुक्त वरना सम्भव नहीं होता है या उन दोनों उपचारों के मुख्य प्रमाव का परिशुद्धि से माक्कन करने या उनके प्रति परिकारनायों की परिशुद्धि से परीसा करने वा उद्देश्य नहीं होता है। किन्तु इन उपचारों को परस्परिक्या में मानिरिच होती है प्रयांत् उपचार A तथा B के उन स्तरों को जानना होता है कि जिनका सम्मित्ति रूप में प्रभाव सक्षेत्रम हो। जैसे दो वारक जुताई व प्रति ए (ploughing and spacing) हो या जुताई व पुहार करने वाले (spraving) उपचार मादि के लिए विपाटित खण्डक प्रमिक्तना उपयुक्त है।

विपादित संबंधक प्रिमित्त्वना से संब्धक एक दूसरे के परस्पर लाविक पहिट्यों (मुख्य सेत्रों) में दोनों उपचारों के स्तरों के अनुसार विभाजित होते हैं। एक घोर की पिट्ट्यों से एक उपचार घोर दूसरी बोर की पिट्ट्यों से एक उपचार घोर दूसरी बोर की पिट्ट्यों से दूसरे उपचार को यादिष्धकीहर रीति से नियत कर दिया जाता है। इस अकार सावश्यकता अनुसार पुनरावृत्तियों का गठन कर विमा जाता है। माना कि दो उपचार A तथा B हैं। माना कि A के तीन स्तर घोर B के चार स्तर हैं तथा दो पुनरावृत्तियों का रूप निम्म होता है।



माना कि सामान्य रूप में A वे P स्तर हैं और B के पुस्तर हैं तथा प्रयोग में [

पुनरावृक्तियाँ सी गई हैं। तो स्थापक प्रमरण विस्तेषण सारणी की रूपरेसा भिन्न होती हैं '—

(सार्वी 21 17)

विचरण स्रोत	स्द॰ की॰
पुनरावृत्ति	(r - 1)
A	(p - I)
मृटि (a)	(r-1)(p-1)
В	(1 - p)
बृटि (b) बृटि	(r-1)(q-1)
ÁχB	(p-1)(q-1)
বৃতি (c)	(r-1)(p-1)(q-1)
पूर्ण	(rpq - 1)

हिसी भी बिपाटित सण्डक प्रभिज्ञत्यता की स्थिति ये वर्ग योग सामान्य वर में परि-कतित किरे जाते हैं। इसका विक्षेपण विपाटिंग क्षेत्र प्रभिज्ञत्यता ही है प्रज्ञ उनके सिए उराज्ञन्य ससय से नहीं दिया गया है।

विपादित खण्डक ध्रमिकरुपमा में संकरण

यरा-नदा ऐसी स्थिति उत्पन्न होती है कि उपयोग में दिये जाने वाले हारक बहुउपादा हिते हैं और इन सचयों की सन्या मृहन् होती है। यदि इन सब उपसेन उपचारो
(मययों) भो एक ही मुख्य क्षेत्र में निरिन्ट कर दिया जाये तो मुख्य क्षेत्र को समानीयता
स्तार रमना सम्मव नहीं होता है। यत अविक मुख्य क्षेत्र को सम्बक्तीर देविमानित कर
दिया जाता है और सकत्य का प्रयोग करने उपकार उपचारों को इन लग्दर्भों
निवयम्त्रमार थारृष्टिक रिति के नियन कर दिया जाता है। इस प्रसिक्टना का असरण
स्तियेय तथा परिक्रमण विशेशा सामान्य रूप में की जाती है। इसने विकरण
स्तित प्रसार प्रसार होता है कि अपरानीकन्त्रेयण सारायों में उपयोग के प्रति रिकरण
सीत में सन्योगत ज्यादा प्रभाव को नृदि में सन्यितिक कर दिया जाता है।

प्रश्नावसी

- क्षिमी प्रयोगगत ग्रामिकलाना के सांक्ष्मिय प्रतिरूप से ग्राप क्या समानते हैं।
- 2 'सान्यकोस प्रतिरुप प्रसरण-विकेत्रेयण का मूच धाधार है', इस तथ्य का विरोधन कीनिए।

- प्रसरण विश्लेषण विज-विज करपनाक्ष्मे पर भाषारित है ? प्रसरण विश्लेषण का मृत सिद्धान्त बताइए ।
- चार व्यक्तियों ने एक चूर्ण पदार्थ के झलय-मलग प्रतिदर्श चयन किये भीर इन प्रतिदर्शों में नगी की प्रन्तित मात्रा निम्न प्रकार थी:—

प्रतिदर्श		शमी व	ी प्रतिशत मात्रा		
1.	9.3	10 5	110	12 5	
2 .	7.7	9.6	3.5		
3.	12.5	13 4	18-0	17 4	12 4
4.	11.4	9 6			

उपर्युक्त न्याम ना प्रसरण-विन्तेषण नरके विभिन्न प्रतिदशों से भाष्ट्र नेमी नी प्रतिशत मात्रा को समानता की परोक्षा कीविए ।

5. निम्न सारणी मे मेहूँ की उपज (बुगल अति एकड) दी गई है जो कि प्रयोगगत भूत्रपड़को गर साधारित है, जिनमे एक साद की चार मात्राएँ सगाई गई थीं। प्रयोक साथ की मात्रा को सेत्र के पांच स्वष्टको मे याहण्डिकीकृत रीति से प्रमुक्त विया गया था:—

व्डक् सब्या	वपनार (श्राद शी मावा)				
	1	2	3	4	
1.	21	24	34	40	
2.	25	33	26	47	
3.	31	34	38	39	
4.	17	39	32	41	
5.	26	35	35	33	

प्रमरण विश्लेषण कीजिए और परिणामी को दीजिए।

(बम्बई, 1970)

 निम्न सारणी में मेंहूँ वी उपज (विवटन प्रति एक्ड) पाँच खाद उपचारों में लिए दो गई है। प्रयोग का वित्यास लैटिन वर्ग है।

पक्ति			स्त	F¥				_
1	(C) 138	'A) 84	(E)	20 8	(B)	96	(D)	16 :
2	(B) 134	(E) 17 5	(D)	18 4	(C)	10 2	(A)	9 8
3	(A) 124	(C) 152	(B)	134	(D)	156	(E)	152
4	(E) 178	(D) 166	(C)	128	(A)	68	(B)	158
5,	(D) 13 0	(B) 18 0	(A)	104	(E)	184	(C)	14 0
	(a) अपर्युक्त परीक्षा भीजा	•बास का प्रस	ग्ण विश्लेपः	ग की जिल	ए भीर	उपचार्	की गा	यक्ता
		् । उपचार माध्यो ।	ही गरीका	A12 2	रगजबंदर हा	भीकार जा	ਤਾ ਨੀਤਿ	, ,
7		न प्रजातियों पर						
		सिचयों का प्रा						
		थेत्र समि नस्पन					741	
		V, V, V, i				रामी 0	15.30	0. 45
		वटर को Po i						
		बटर को रें						
		मौर उपचार स						
	हारा प्राप्त 10	00 बास मुद्रेम	दाना की स	तत्रा निम	न प्रशा	यी .—		
			पुनरावृत्ति ।					
সৰা/ি	-	(Pk) उपव	र श्रद्य तथा	भृहें में र	ानीं की म	त्रा		
V, (3	1) 69 1 (01) 66 5 (20)	708 (1	0) 65	9 (30	69 7	(00)	51 5
• •					(11	60 3	(21)	666
V1 (1	0) 508 (11) 53 4 (21)	474 (2	0) 53	2 (01	48 1	(31) 5	550
					(00)) 51 7	(30) :	3 4
V ₂ (0	0) 47 5 (11) 52 2 (21)	592 (3	1) 61				
					(01) 51 6	(20) 6	2 2
			पुनरावृत्ति 2	!				
प्रवादि								_
V,	(01) 55	51 (31)	56 9	(20)	567	(3	0) 60	7
•	(10) 5	2 2 (00	539	(21)	} 59 9		1) 57	
V,	(00) 60	0.5 (01)	613		68 2		1) 69	
-	(31) 74		696	•	632		1) 66	
V,	(21) 51		571		484		1) 53	
	(20) 77	7 7 (30)	57.5	(31)	61 4	(1	0) 58	8

- उपयुक्त विपाटित क्षेत्र प्रभिक्त्यना का प्रमरण विश्लेषण कीजिए धीर निष्कर्ष निकासिए ।
- (॥) फासफोरस व पोटास ने मुख्य प्रभावी एव परस्पर-कियाधी की सार्यकता की परीक्षा कीजिए।
- 8 एक 1 x 2 x 2 बहु-उपादानीय प्रयोग को यार्टीच्छनीवृत पूर्ण खब्डन प्रभिनस्पना में स्थवन्यित विद्या गया। इसमें तीन पुनरावृत्तिया का प्रयोग किया गया। भीन उपवारी A, B, C के सवया के लिए प्रेक्षण (क्लिसा॰ में) निम्न प्रकार थे :---

उपन	ार सब्देश		पुनरावृत्ति		
			R ₁	R_g	Ra
0	U	0	8 8	90	9.3
0	0	1	127	10 5	104
0	1	0	7 4	119	11-8
0	1	1	8 6	169	131
1	0	0	20 6	9 1	150
1	0	1	12 2	12 6	16.4
1	1	0	158	16 2	20 0
1	1	1	25 2	13 5	20 6
2	0	0	59	150	10 5
2	0	1	12.5	17 4	20 5
2	1	0	5 90	18 2	176
2	1	1	5 5	9 7 5	18.4

उपर्युक्त त्याम का प्रसरण-विश्लेषण कीजिए तथा मुख्य प्रश्नावों व परस्परनियाधा की मार्थकता की परीक्षा कीजिए ।

9 निम्न याद्देन्द्रिक्त सण्डक मिनकल्पना मे एक ब्रप्राप्त मान होने की स्थिति में प्रमरण विश्लेषण की जिए।

		पुनरावृत्ति		
उपचार	R ₁	Rg	R ₃	R,
1	2 10	175	3.45	0.57
2	2.55	1-72	2 23	2 40
2	2 60	1 33	2 60	2 20
4	6 OC	117	*	1 93
5	3 3 5	1 30	1 73	1 77
8	2 23	2 33	2 75	2 70
7	1 60	1 80	3 10	2 0 5

^{*} लुप्तमान

 एक बर्-उपादानीय प्रयोग में तीन कारक (A, B, C) लिये गये जिनके ह्सर नमत. (2×3×4) थे। प्रयोग में दो पुनरावृत्तियों ली गरें। इस प्रयोग में प्राप्त प्रेक्षणों से निम्न वर्ग-योग परिकत्तित किये गये —

दिवरण स्रोत	इ० य∙			
पुनरावृत्त <u>ि</u>	13 34			
A	53 55			
В	5.26			
C	4-27			
ΛB	8 27			
AC	23 99			
BC	25:43			
ABC	6 8 5			
पूर्व	453 99			

उपर्युक्त प्राशिक परिकलनो की सहायता से पूर्ण प्रसरण-विश्लेषण सारणी बनाइये भीर यथासम्भव परिणाम निवासकर उनका निवंतन की निये ।

11. प्रसरण-विक्रतेवण से वैषम्य की उपयोगिता पर टिप्पणी सिन्दिये 1



 $Y_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + \epsilon_{ij}$

है। इस प्रनिष्ट के प्रति यह समियारकाएँ वी गई है कि सबदक (#.B., r. व. e.) योज्य (Additive) हैं मीर बृद्धि e. व्यवन्त्र हैं और N (0, s.) है। यदि विसी न्यान से ऐसा स्वेतन मिन कि समदक गुमनारस्य (Mulliplicative) है सर्योत् प्रस्क में मानान्य प्रमरण-विक्तेत्रमा नहीं विया जा सकता है। किन्तु यदि दस प्रतिस्व में समान्य प्रमरण-विक्तेत्रमा नहीं विया जा सकता है। किन्तु यदि दस प्रतिस्व में समुद्धान्य में स्वान्तरमा कर दिया जाये को संबद्ध योज्य एवं समविकानी (homoscedastic) हो जाते हैं। इस स्वित में

 $\log Y_{ij} = \log \mu + \log B_i + \log \tau_j + \log \epsilon_{ij}$

मतः प्रेक्षणीं वा लकुरणक लेवर प्रमरण दिस्त्रेषण वरता उपकुक है । वेदल लकुरणक रपानरण ही नहीं, मनेव मन्य रपानरण बीठे वर्यमूल, प्रतिकोम स्थानरण मादि विभिन्न निवित्तीं में उपमुक्त हैं । बुद्ध मुख्य नवातरणों वा वर्णन यहाँ दिया गया है ।

यह ध्यात रहे कि मार्थन जान्यरीक्षा क्यान्तरित स्थास ने साक्षार पर ही की जाती है। किन्तु यदि माध्य, प्रमरण सादि को धावनन करना हो तो सून प्रेत्रणों द्वारा ही किया साता है सम्यसा रचानराय के पण्डान् इनकी मान-इवाई में पिंदरनेत हो जाता है जो कि सावनन के हेतु स्वीहत नही है। क्यान्यरण जीवन है या नहीं? इनकी पुष्टि करने के हेंदु प्रतिदर्ध प्रेत्रणों को प्रसामान्य प्राधिकता साक पेपरी पर सालेखित कर सिन्धा जाता है सौर इन किन्तु सी निजाबर वस्त्र के कर तथा विषय जो के दिस्स में पढ़ा कर किया जाता है।

यदि तृष्टि c_{g_i} ना बंटन विषम धर्षान् ध्रमनासान्य हो तो F तथा । परीक्षायों द्वारा बहुत से परिपाम सार्थन निद्ध होने हैं उदकि दे बास्तव में सार्थक नहीं होने हैं। दनवें धनिरिक्त उपचार (Treatment) नाध्य जो प्रेस्तवों द्वारा परिकृतित निया जाता है वह समय में या उपचार मोध्य वो परिभुद्ध धावलक नहीं होता है। यह भी देखा प्रसाह कि

्र एक स्थिव प्रसार ना बाक पेरर को कि वक को एवं विकृत क्रामीहर साववन (distorted vertical scale) के द्वारा एक संस्थ देखा ने तान देखा हूं प्रसासक प्राप्तिकता बाक पेरर करूपता हूं 1 यदि चर ना बटन प्रथमामान्य हो तो असरण व माध्य मे परस्पर सम्बन्ध होता है जैसे दिपर बटन के माध्य np व प्रमरण npq ==np (1-p), म सम्बन्ध है या प्वासो बटन के माध्य म असरण समान होते हैं शादि। यत यदि उपचार या पुनरावृत्ति (replication) के प्रभाव पृहत् हो तो प्रसरण बसमान होने नो सम्भावना होती है। ऐसी स्थित मे रूपानरण द्वारा प्रसरणों यो स्थिर करना घरवरन आवायक हो जग्ग है। रूपानरण द्वारा प्रसरणों यो स्थिर करना घरवरन आवायक हो जग्ग है। रूपानरण द्वार का होना चाहिये कि जिससे प्रसरण वयभव पूर्णतवा साध्य से स्वतन्त्र हो जाये।

बार्टर्संट (Bartiett) ने एक पादर्व स्पान्तरण के हेनु निम्न भावश्यकताथी पर कार दिया।

- हवान्तरित घर का प्रसरण, माध्य म परिवर्तनो से प्रभावित नहीं होना चाहिए प्रथात प्रसरण व माध्य सदैव स्वतन्त्र रहने चाहिये ।
 - (2) रूपाग्तरित चर का बटन प्रसामान्य होना चाहिये।
- (3) रुपान्तरण के पश्चात् चर मा भाष्य, समय माध्य का एक घण्छा बादलक होना चाहिए।
- (4) रूपन्तरण के उपरान्त, सपटनों के बास्तबिक प्रभाव रैंसिन एव योज्य होता चाहिए।

उपर्युक्त भावस्थनताओं ने मतिरिक्त प्राय निम्न गुणो नी भी भावस्थनता होती है '---

(क) किसी प्रश्चित्रक मे नृदियाँ ६, स्वतन्त्र एव प्रसामान्य बदित होति चाहिए ।
 (स) प्रेसणो का प्रसरण स्थिर होता चाहिए । यदि न्यिर न भी हो तो विचरण की

कुछ मुख्य रूपान्तरण निम्न प्रकार हैं

यहां क्रेबल रूपाम्तरणो का ही वर्णन किया गया है। किसी भी न्यास के प्रसरण किरोचण करने की विधियां प्रस्पाय (21) में दी गई हैं।

सधुगणकीय रूपान्तरण

पद्धति ज्ञात होती चाहिए ।

हात प्रकार का क्यान्तरण तभी जीवत है जबकि वरों के प्रवरण व माध्य में धनात्मक सहुराज्या हो धर्मान् मानक विचलन बाध्य के समानुवाली हा । व्यावहारिक शिद्ध से यह कहे कि बीर माध्य युहन हो घीर मानक विचलन भी बृहन् हो तो सपुलगक क्यान्तरण करना चाहिए। माना कि ड व्याव से विचलक भी बृहन् हो तो सप्ताव क्यान्तरण जात करने के

तिए पसन $\int \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}$ जान करते हैं। वबक्ति $\psi(x)$ प्रसरण करें की फसन है यत

इस स्पिति में 🛊 (x) = c2x2 घीर

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c^2x^2}} = \frac{1}{c} \log x \qquad(221)$$

ud (223) के धनुमार संपुगवक स्थान्तरण उक्ति है।

यह स्वान्तरण उन स्विति य भी करता चाहिए वह सपटना के प्रभाव गुणनात्वक हो वर्धान्त इस स्थान्तरण द्वारा गुणनात्यक प्रनाव योज्य प्रनायों स परिवर्धात हो जाते हैं। यदि चर जिसवा लघुगणर स्थान्तरण करना हो और उसके मानो में एक भी मान मून्य हो तो लघुगणक स्थान्तरण में समस्या उरपप्र हो जाती है क्योरि $\log 0 = -\infty$ है। यत इस स्थिति म X के स्थान पर (x+1) का लघुगणक स्थान्तरण किया जाता है स्थांद स्थान्तरित चर $Y = \log_{\bullet}(x+1)$ हो जाता है और उत्पन्न समस्या का निवारण हो जाता है।

यदि विचर मान केवल दशमलव में ही हो तो ऐसी स्थिति में 10,100 या मन्य 10 की बृहत् चात से मानो को गुणा करके लघुगणक लेना चाहिए । इस प्रकार सपुगणकीय मानो को लिलने में सुविधा हो आती है।

वर्गमूल रूपान्तरण

बर्गमूल स्वाग्तरण इसी स्थित मे उचित है कि ग्यास प्वासो बटन का पानन करता हो। इस प्रकार के ग्यास का मुगमता स पता चल जाता है यदि ग्यास किसी विरल घटना की गणना पर साधारित हा जैस एक उत्पाद (product) मे दोपपूर्ण करनुसो की सस्या, एक पेड की पत्ती पर कीटो की सस्य या विमान वुषैटनाया की सन्या स्नादि। इन सब ही घटनामो के घटित होने की प्रायक्ता बहुत कम है स्नत यह घटनाएँ प्यासो सटन का पानन करती हैं। इस सटन में,

$$\int \frac{dx}{\phi(x)} = \sqrt{\frac{dx}{x}} = 2 \sqrt{x} \qquad \dots (222)$$

इससे स्वष्ट है कि वर्गमूल बटन उपर्युक्त प्रकार की स्थितियों में उपयुक्त है। चर का रूपानतरण करते समय स्थितक 2 का प्रयोग करन की कोई बाववयकता नहीं है वर्गोक प्रवर के गुणा करने का बटन करण पर कोई प्रभाव नहीं पढ़ता है। बार्टलैंट में बताया कि यदि सक्याएँ B है 10 के बीच में हा तो \sqrt{x} की घपेक्षा $\sqrt{x+\frac{1}{2}}$ एक उच्छा रूपानतरण है। केंदिस (vuriss) ने बताया कि यदि सक्याएँ B उतक हो तो भी $\sqrt{x+\frac{1}{2}}$ करायतरण \sqrt{x} से उत्तम है।

इस स्वान्तरण मे थीर बिस्क परिष्कार महत्त्वपूर्ण नहीं है यद्यपि कुछ प्रस्य सुधार भी सुभावे गये है जैसे यदि रुप्याएँ तथु हा तो कसी-कभी स्वान्तरण $\sqrt{X+1}$ या $\sqrt{X}+\sqrt{X+1}$ ब्रिधर प्रभावित रूप से प्रसरण की स्विरना प्रदान करते हैं। इस प्रशार स्वान्तरों के श्र-तर्गत चरा ने प्रमरणों से सार्थक श्रन्तर नहीं रहता है।

उबाहरण 22.1 मनना ने प्रजाति-परीक्षण के लिए किये गये एक प्रयोग मे पेडा नी महया तया जट में गिरन (root lodging) की सहया दी गई है।

वजाति	à.	रों भी संस्य	,	उट से प	इ विश्व व	ी मध्या	
	R_{1}	$\mathbb{R}_{\mathbf{z}}$	\mathbb{R}_3	R_{t}	R_2	R3	
104	9	24	23	0	2	4	
402	16	23	23	1	2	1	
403	21	28	21	2	3	2	
404	13	22	16	I	1	0	
405	16	21	22	11	2	1	
406	14	24	14	12	3	D	
407	23	14	22	1	1	1	
408	16	21	20	4	O	0	
409	26	24	22	1	1	2	
410	22	24	21	2	3	3	

बिद लक्षण जह से वेदा को गिरने के प्रति प्रकारियों म सन्तर की परीक्षा करती हो तो सिरलेयण करने से पूर्व दी गई पेडो को सदस्य का ज्यान्तरण करना सादस्यक है ज्यास को देखने से क्ष्य है कि इसमें प्रेसण 0-12 तक है धन दसके लिए स्थान्तरण $\sqrt{X+\frac{1}{2}}$ उपस्कृत है।

प्राय स्थान को समान वेडो भी सन्या वे माधार पर परिवर्शित करते, न्यान्तरण √४ — इन प्रयोग करना यच्छा है नवाकि इस प्रकार प्रवानियों की तुलना विश्वसनीय होती है।

यहाँ केवल रूपान्तरण ना प्रदर्शित करने के हेतु स्थाम का रूपान्तरण करके दिश्वामा गया है।

हपान्तरित ग्यास $\sqrt{X+\frac{1}{2}}$

নোবি নোব	व	ह से वेड गिरन की सक्या	
	R	R ₂	R_a
401	0 707	1.281	2 121
402	1-225	1-581	1.225
403	187.1	1.871	1.281
404	1-225	1-225	0.707
405	3 391	1.281	1.225
406	1 581	1.871	0 707
407	1-225	1.225	1.225
408	2 121	0 707	0 707
409	1-225	1.225	1.581
410	1-581	1-871	1.871

उपर्युक्त सारणी में दिया न्यात प्रमरण-विश्वेषण ने लिए उपयुक्त है।

चापज्या या कोणीय रूपान्तरण

इस प्रशार रचान्तरण मुख्यचा सनुपान या प्रतिनत ने निए सत्यन्त उपयुक्त है। यदि चर दियद बदन का पानन बरना हो नी चापज्या रचान्तरण वरना चाहिए। यह पहले खण्ड में बताया जा चुका है कि प्रमरण ppq माध्य pp वा पनन है। चापज्या रचात्ररण प्राप्त व प्रमरण की एव-दूसरे से स्वतरण कर देवा है। वास्त्रव में प्रमरण की स्वतिधवा को बनाये रखने के लिए भी रचान्तरण θ=arssin √ p वा प्रयोग करना चाहिए। यहर सायज्या या ज्या में सानावायक (synonymous) हैं। इस प्रवार 6 वर कोण है कि विसक्ष प्रयाप के स्वतिध्य से में नाम सकते हैं इस रचान्तरण की सुगम करने के हेतु कियार के येट्ड (Fisher & Yales) द्वारा दो गई सारणी में p के विसम्प्र मानों के लिए डिखी है से परिवर्धित मान दिने हुए है जिनका सीमा प्रयोग किया वा सकता है जैसे बारां भ परिवर्धित का मान दिने हुए है जिनका सीमा प्रयोग किया वा सकता है जैसे बारां भी परिवर्धित मान दिने हुए है जिनका सीमा प्रयोग किया वा सकता है जैसे बारां भ परिवर्धित मान दिने हुए है जिनका सीमा प्रयोग किया वा सकता है जैसे बारां भ परिवर्धित मान दिने हुए है जिनका सीमा प्रयोग किया वा सकता है जैसे बारां भ परिवर्धित मान दिने हुए है जिनका सीमा प्रयोग

चापन्या स्थान्तरण की विशेषता यह है कि यह बटन की दोनों पुरुदों को खींबता है भीर बीच में भाग को दबाता है अर्थात् करू के रूप को लगभग प्रसामान्य कर देता है रूपान्तरित चर के बटन का प्रस्थावित प्रसरण

$$\sigma_{\theta}^2 = \frac{(180)^2}{4\pi^2 n} = \frac{8208}{n}$$
 (22.3)

जबकि प्रत्येक प्रतिशत स्वतन्त्र प्रेक्षणों की बृहत् सक्या पर बाहारित है। यदि रेडियन (radians) में नापा गया हो तो

$$\sigma^2_{\theta} = \frac{1}{4n}$$
 (224)

यह व्यान रहे हिन माध्य की शात नरने ने लिए जायज्या द्वारा प्राप्त मान को किंग भनुभान ने परिवर्धनत करना होता है। जबकि 810⁸ 8 = p द्विक न्याल ने प्रतिवाद 30 मीर 70 के बीच विचरत हो तो जायज्या हमान्तरण करने की मावक्यकता नहीं है।

उदाहरण 22 2 जैसा हि उदाहरण (22.1) मे बहा गया है कि बड से पेड गिरने की सहया को ममान माधार पर परिवर्तिन करना बाहिए। बता पहते देही के गिरने की सब्या का पेडा की सब्या के प्रतिमत के रूप में रूप दिया क्योंकि प्रतिमत में दिये हुए स्पास के लिए बापन्या रचान्तरण उपनुक्त होता है, प्रतिमतीं को बापन्या में स्थान्तरित करने साह्यिबीय विक्नेपण के लिए प्रयोग में लाया जाता है।

तीनो पुनरावृत्तियो ने निए जह ने पेड गिरने को प्रतिवान सहया तथा तडवुकार सायज्या (कोगीय) मान निम्न मारापी में दिये गये हैं। साराज्या मान क्रियर व बेट्स झारा दी गई सारागी (परि० प-17) का प्रयोग करने लिखे गये हैं।

जह में पेड मिस्ने की प्रतिजत मंध्या व चापस्था मान

পুৰ শ্ৰু বি⊸ী		লিক !	দুৰতবৃণি-	2	पुताव्यान-3		
	(R_1)		$\{R_2\}$		(R_3)		
बर्मात ग्रंडस	স িবর	बारम्या मान	प्रतिवय	पराग्धा मान	र्वातहर	बारागा वान	
401	0.0	0.0	8-3	16.74	14 7	24 65	
402	6.2	14.42	8 7	17-15	4.3	1197	
403	9 5	17-95	107	19 9	9 5	17 95	
404	7.7	16.00	4 5	12 25	0 0	00	
405	68-7	55 98	9 5	1795	4.5	12 25	
406	143	22.22	125	20 70	0.0	0.0	
407	4 3	11-97	7 1	1545	4-5	12 25	
408	250	30-06	0.0	0.0	0 0	0.0	
409	38 €	38.06	4.2	11 83	9 1	17 56	
410	91	17-56	2.5	20 70	14.3	22 22	

चापम्या मान। हो लेहर ही विश्वेषण हिया जाना उपित है।

श्युन्त्रम रपाग्तरण

बहुत मी यर मध्याधी धतुपूरियों से प्रेयल विन्हीं किरायों से इवाई सनय के निए ता सा समय ने प्रति चल के निए हाते हैं। जैसे एन विदिशा उन्हों समय एन सिनिट से दिनती बार पन बनानी है, जान मुर्गी प्रति साम दिनसे सम्बे देशी है, एवं पन्टे से एक तित्रकी एक पून पर विननी बार बंदगी है हम्यादि। इस बनार ने जेशामी बाद वेशर से प्रति निवा तोये शो वक प्रतिश्वत्वत्व (Hyperbola) के समस्य होना है। सन स्या X प्रोर Y से मुल्तिस सामगण्ड XY = टिंग (से + अx) Y = । के समुनार होना

$$\xi \notin \text{ π x π x x $\in $\frac{1}{X}$ $\text{ π X $=$ $\frac{1}{Y}$ $\text{ π t Y $=$ $\frac{1}{Y}$ $\text{ π a $+$ β X $=$ $\frac{1}{Y}$}$$

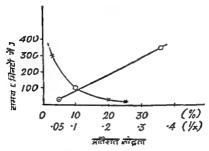
सम्बन्ध बाठ होते है। बाद बर Y ना खुत्वम ल्यान्त्रस्य नर दें सर्वाद्य मान में भो X≔Cu बा a + gX ≔ ध ने कर स सम्बन्ध आपन हो जाते है वो ि सैनिन हैं।

भी X≔Cu या a 4 6X≔प वे कर संसम्बन्ध आपने ही जाते हैं वी वि रीमण है। धन उपर्युक्त क्यान्तरण द्वारा विजीय समाध्ययन आप दिया वर मकता है या हमरे निर्द किमी भी प्रकार का उपसुक्त किमीयम दिया जा सकता है।

बसाहरन 22 3 : वेंगांमीनयन (parametrom) के बंदुन निवासीनमा को बस करते के निष्य पासनीन (formula) का प्रवास देटा बसा। क्षासीन की कांद्रता हसा साम्मानीनता के समय निध्न कथार थ :—

षामेंतीन की माईडा धॉनश्न (X)	डिक्साडीनना का समय (Y) (मिनटा में)	बर X ना म्युत्सन श्यान्तरण (1/X)
3	300	33
10	100	-10
20	30	-0.5
25	15	04

यदि चर X प्रोर Y बिन्दुधो हो प्राचितित न रके मिलावें तो बित्र ना रूप धायदी-चार प्रतिपरवत्य जैमा होता है हिन्तु X ना (प्रा Y ना) ब्युत्तम रचान्तरण नरते पर सम्बन्ध समस्य स्वान रेचीय हो जाता है जैमा नि चित्र में दिखाया गमा है।



वित्र 22-1 ब्युक्म त्यान्तरण का वित्रीय निरुपण

म्रनिपरबलयिक ज्या व्यत्क्रम रूपान्तरण

 र्ने प्रेशण मिल गये हो तो धवणिस्ट माध्य वर्ष योग का प्रयोग विद्या जाता है। प्रसरण या माध्य वर्ष योग s^2 के समुगण चर्षात् $\log_s S^2$ का चर के मध्य $\mathbb R$ के समुगण $\log_s X$ पर समाध्यण ज्ञात कर निया जाना है। माना कि समाध्यण गुणां β है तो इस स्थिन से रूपान्तरण $(\sinh^{-1}\beta\sqrt{X})/\beta$ वा प्रयोग करना चाहिए।

यदि प्रेशण गणना पर पाधारित हो और घिन सपू हो तो रचान्तरण (sunh 1 β $\sqrt{X+\frac{1}{8}}/\beta$ का प्रयोग करते हैं। इसके घिनिस्क यदि प्रसरण, माध्य वे पदो प्र साम्बन्ध (" $X+\beta^2$ X^2) ने रूप में दिया जा सकता हो तो β को सीधे इस सम्बन्ध द्वारा प्रतिस्थापित कर सकते है सर्वात् सदाध्यण जुणार का परिकतन करने की सावस्थकता नहीं रहती है। इस प्रकार का रूपान्तरण ग्यास के प्रधासक कियर बिटत होने की स्थिन में उचित है। इस रुपान्तरित ९ र ने बटा का प्रवस्त ए 25 के समान होता है।

लागिट रूपान्तरण

यदि विसी प्रयोग ने स्वतन्त्र प्रेसण डियद धनुतात है रूप मे हीं धीर यह एक (r×C) तम की सारणी मे दिये हो तो इनके लिए वापण्या रूपातरण तमी उपयुक्त है जबकि प्रेसणो की सरया प्रयोग वण्डत या ममूह में सवमन समान हो। किन्तु ऐसी स्थिति में स्थानहार में बहुत कम बाई जाती है यन उस स्थिति में स्थानर स्थानर है। किन्तु ऐसी स्थानि में स्थानर स्थानर स्थानर प्रयोग प्रवित्त होता है। यह प्रधानर है,

logit $X_{ij} = \log_{e} (P_{ij}/q_{1})$... (22.5) wgł $P_{ij} = o_{ij}/n_{ij} q_{i} = (1 - p_{ij})$

फिसर का Z ह्यान्तरण

इस रूपाग्तरण का विधरण ग्रध्याव (14) में दिया जा चुना है।



पिछले घटवाय में प्रयोग या सर्वेक्षण द्वारा विसी घर (कारक, उपधार या लक्षण) के प्रति सयहित स्थाम वा प्रमाण विष्नेपण ध्यवा धावलन करने वी विधियों गिर्म हैं। यदि इस घर पर विभी धान्य घर का प्रभाव न हो तो ये विधियों उपमुक्त हैं। इसी उद्देश्य से सजातीय लण्डकों की रचना पर जोर दिया गया घीर प्रस्य सभी कारकों (लक्षण) को नियदिन करने का प्रयत्न विया गया जो प्रध्ययन के हेनु लिए गये घर को प्रभावित करने हैं। कि तु बुछ ऐसे लक्षण (चर) होते हैं जिनका प्रयोग में निवन्त्र पर का प्रभावित करने हैं। कि तु बुछ ऐसे लक्षण (चर) होते हैं जिनका प्रयोग में निवन्त्र करते हैं प्रमावित करने हैं। श्री पर यह प्रयोगयत एक्क के परिणाम को प्रमावित करते हैं प्रमावि एक्को डाग श्राप्त परिणाम से केवल उपचार का प्रभाव न होतर, किसी प्रस्य प्रपाव एक्को डाम सिम्मित होना है। इस धन्य चर को सहवर्ती चर (concomitant variable) सहायक चर (ancillony variable) या सम्बद्ध चर (associated variable) कहते हैं। श्री

(1) किसी प्रयोग डाग कई कीटनाशियों की क्षमता की तुलना करने के हेतु इन्हें सनेक प्रयोगगत एकको पर निश्चित क्षमिकरणना के अन्तर्गत प्रयुक्त किया जाता है। किन्दु हम जानते हैं कि प्रयोक एकको विकाशिता केवल तब उपचार पर निर्मर नहीं होती है क्योरि कीटा की प्रारम्भिक जनस्था अधिक होने पर प्रयुक्त की अधिक होती है। अन प्रारम्भिक कीट सच्या की सहका जिद के एक प्रयोग किया जाना है।

(2) यदि विभिन्न घट्यापन विधियो ना तुननात्यक प्रभाव जानना है तो यह विदित है कि पिक्षा लेने वालों के प्रारम्भिक झान ना शिक्षा प्रहण करन पर प्रधिक प्रभाव पटता है। प्रन इस प्रारम्भिक झान नो , विन्ही अयो से मापकर, सहवर्गी चर के रूप में प्रयोग करना होता है।

(3) यदि क्लि प्रयोग में अनेन प्रकार के भोजनों का चूही की भार शृक्षि के प्रति प्रमान दलना हो तो उनके प्रारम्भिक भार की घोर ध्यान देना धरमना धानशक है। यदि उनके प्रारम्भिक नारों में प्रयोग धन्नर है नो निष्कृत कात्र के प्रकाद प्रतिम भारों में धन्तर प्रारम्भिक नारों में धन्तर प्रारम्भिक नारों के धन्तर के प्रभावित होना है। धत इस प्रयोग में प्रारम्भित भाग का सहनों कर के क्ला प्रयोग नरना धानशक है। इसी प्रकार धनेक धन्य उदाहरण विये जा सकते हैं। ध्यवहार में घविचनर प्रतिम प्रताग को ४-मानों से (वर Y) धौर सहदर्ती कर पर प्रेक्षणों नो X-द्वारा निष्कृत करते हैं।

सहवर्गी चर सम्बन्धी न्यास ना प्रयोग नरके झन्तिम मानो से सहवर्गी चर के प्रमाव वा निरमन सहत्रमरण विवतेषण द्वारा निया जाता है जिससे वि प्रयोग त्रुटि कम हो जाती है। महत्रमरण विधि इम होटि से झरसिंछन उपयोगी है वि प्राय कुछ विचरण-स्रोत जिनना प्रयोग विधि द्वारा निधत्रण नहीं हो सकना है, उनके प्रभाव को सहवर्गी चर पर प्रेसण सेनर, सहप्रसरण-दिवसेनण द्वारा दूर कर दिया जाता है। यह प्यान प्रकार रखना चाहिए कि सहवर्गी चर दस प्रकार का होना चाहिए कि जिसका उपनारों से काई सम्बन्ध न हो।

सहप्रसरण विश्लेवण का सिद्धान्त

ष्णस्यार्थे (13) व (21) मे दो सहस्वपूर्ण विधियो, जिनने नाम है समाध्रयण विश्लेषण ग्रीर प्रसरण-विश्लेषण, का विधिपूर्वक वर्षन दिया गया है। सन्त्रमरण विश्लेषण में रूप दोनो विधियों को समस्वित विधा गया है। समाध्ययण विश्लेषण में ग्राधित वर के वर्ष योग में से समाध्ययण के वाश्लेषण में प्राधित वर के ते हैं। इसी शिद्धाल का सहस्रकाण विश्लेषण में प्रयोग करते हैं ग्राधीत ग्राधित वर पर सिये गर्थे प्रयोग करते हैं ग्राधीत ग्राधितम वर पर सिये गर्थे प्रयोग करते हैं ग्राधीत ग्राधितम वर पर सिये गर्थे प्रयोग के से समाध्ययण हारा सहस्री पर के प्रमान का नित्सन कर दिया जाता है। इस जिला के हित्र प्रयोग विवरण स्रोत के सिय सक्यार्थों प्रप्ती, प्राधीत कर है ग्राधीत के सिय सक्यार्थों प्रप्ती प्राधीत कर है ग्राधीत के सिय सक्यार्थों प्रप्ती प्राधीत के सिय सक्यार्थों प्राधीत के सिय सक्यार्थों प्रप्ती प्राधीत के सिय सक्यार्थों प्रपत्ती के सिय सक्यार्थों प्राधीत के सिय सक्यार्थों प्रपत्ती प्राधीत के सिय सक्यार्थों प्राधीत के सिय सक्यार्थों प्राधीत के सिय सक्यार्थों प्रधीत क्यार्थों प्राधीत क्यार्थों स्थार्थों सिया स्थार्थों स्थार्थों सिय सक्यार्थों स्थार्थों सिय सक्यार्थों स्थार्थों सियार्थों सियार्थी सियार्थों सियार्थी सियार्थों सियार्थी
भारता होता है ।

जबिन छोटे महार y_1 व x_1 सपने माध्य से विचलित प्रेशित यानो को निक्षित करते हैं। मनुसन्त , प्रेशकों को सरदा के सनुसार विकास करता है। यह कात है कि समायवण के कारण वर्ग-योग $(x_1,y_1)^2/x_1^2$ के समान होता है। रस सदया को $x_1y_1^2$ में से

यदा देने पर सहबर्ती कर वे प्रभाव से मुक्त वर्ष योग झात है। जाता है। इसने सर्तिरक्त समाध्येनित कर Y' ने लिए बनै योग नी पूर्णस्व० को० में से समाध्यण ने नारण I क्वा को० क्वा कर के हैं। इसी सिद्धानत का प्रयोग करने निम्म सहप्रसाण-विश्लेषण सारणी तैयार कर भी जाती है। यह सारणी किसी भी प्रभिक्तनार या वर्गीकरण के लिए हैं यार के लिए हैं या स्वत्यों है। स्विकत्यना या वर्गीकरण के स्वत्यों करना होता है।

टिप्पची. (1) उपर्युक्त विवरण में यह कल्पना की गई है कि पर Y तथा X में

सम्बन्ध रैलिन है। (2) यदि रैलिन सम्बन्ध न हो तो वक रैगीय समाध्ययम के प्रति भूतों का प्रयोग

(2) यदि देलिक सम्बन्धन नही तो वक्र देनीय समाध्यम के प्रीप मुक्ती का प्रयोग करके उपर्युक्त विधि का प्रयोग कर सकते हैं।

(3) यदि सन्तिम पर को प्रभाषित करो बाने पदा की सन्यादो हो तो घर Y ते। सहयर्गी परो X_1 व X_2 के कारण समाध्यक्त वर्ष-योग $\{b_1 \le x_1, b_1 + b_2 \le x_2, y_i\}$

ही द्र प्रृत्ते सदाकर सेप वर्णभोग (द्र प्रृत्ते – b₁ द्र प्र_श्ते न b₂ द्र द्र्श प्रृते) ज्ञान करने हैं। हैं। यदि सहवर्श करों को सक्यादों से सबिक हो तो इसी मूद को घोर किन्दुन दिया जा सारात है। जिनने महत्वर्शिक होते हैं उजनी हो सत्या को समायोदित कर Yैं के पूर्ण पर्वक को कृत करका कि स से पटादिया जाता है।

सहप्रसरण-विश्लेषण सारणी की रूपरेखा (सारक्षी 23.1)

मान्यक यक म-माम	_				-	र झनुप्रय ।	_
स्य क को । i y, 2	RA+E - See	S _{T+E} = S _{pp}		f_{ν}^{\prime} $E_{\nu\nu} - \frac{E_{\nu\nu}^2}{E_{\mu\nu}} = S_{\nu\nu}$	$(n-2)_{ }$	St+E = Sw = Sxy	R. I.P. Ray
N.=	Aw	Т,	ς ^c	Eyy		Sw=Tw+Ew	R _{xx} =A _{xx} +E _{xx} R _{xx} =A _{xx} +E _{xx} R _{xx} =A _{xx} +E
1 x y y	Axy	Tay	Č,	Ew		$S_{xx} = T_{xx} + E_{xx} \mid S_{xy} = T_{xy} + E_{xy} \mid S_{yy} = T_{yy} + E_{yy}$	Riv=Arv+Er
X X, ³	Axx	E X	ű	Ехх		S _{xx} =T _{xx} +E _{xx}	Rx=Axx+Ex
स्य को				°.)(u = u)		
विचरण स्रोत	V	۴	U	प्रयोग मुटि		समायोजित उपचारों के लिए (T-1-शुदि)	समायोजित A माध्यो के लिए (A+ नीट)

र् $y_1'^2$, संस्था $\{S_{A+E}-S_{aa}\}$ द्वारा परिकलित कर सकते हैं। धन्य किमी कारक के

लिए समायोजिन व॰ य॰ ज्ञान करने की विधि यही रहती है।

माना कि प्रयोग या नवेंशण द्वारा प्राप्त n युगन प्रेसण,

$$Y : Y_1, Y_2, Y_3, ..., X_n$$

 $X : X_1, X_2, X_3, ..., X_n$

हैं तो सम्यायें.

$$\begin{split} & \underset{i}{x} \; x_{i}^{2} = \underset{i}{x} \; X_{i}^{2} - \frac{\left(\underset{i}{x} \; X_{i}^{2}\right)}{n} \\ & \underset{i}{x} \; x_{i} \; y_{i} = \underset{i}{x} \; X_{i} \; Y_{i} - \frac{\left(\underset{i}{x} \; X_{i}\right) \; \left(\underset{i}{x} \; Y_{i}\right)}{n} \\ & \underset{i}{x} \; y_{i}^{2} = \underset{i}{x} \; Y_{i}^{2} - \frac{\left(\underset{i}{x} \; Y_{i}\right)^{2}}{n} \end{split}$$

मारणी में विचरण स्रोत समित्रत्यना या वर्धों रूप ने सनुसार होते हैं। माम्य वर्षे-योग तथा F-मान सामान्य रूप में झान हिये जाते हैं धीर विश्वित्र नरदरों वा उपचारों के प्रति परिकल्पनायों के विषय से निवसानुसार निर्णय से निवे आने हैं।

सहप्रसरण के लिए सांश्यिकीय प्रतिरप

सनेन मानियकीय प्रतिक्व विभिन्न वर्गीवरण या स्निवहरताओं के केतु मध्याय 21 सं दिये जा पुत्रे हैं। सहस्रमरण की नियति से भी प्रतिक्य स्वतंत्रय वही रहता है। यहाँ एक पद प्रदेश प्रतिक्य से महत्वर्ती कर के लिए सौर बड़ा दिया जाता है। इन प्रतिक्यों से सध्याय 21 की तुत्ता से इतता ही सन्तर किया गया है कि X के स्वान पर प्रतिक्य के लिए सक्तत Y का प्रयोग किया गया है और सक्तत X, सहक्षी कर के लिए तिया गया है।

पूर्ण बार्राच्छतीकृत समित्रस्पता ने तिए सहप्रसरण मे साम्यितीय प्रतिरूप निम्न हैं:—

$$Y_{ij} = \mu + T_i + CX_{ij} + \epsilon_{11}$$
(23.1)
 $1 = 1, 2, 3,, k$
 $j = 1, 2, 3,, s_i$

यार्राव्हरीपुत्र पूर्ण लव्हक प्रधितन्त्राता के लिए प्रतिकार निम्न है :---

$$Y_{ij} = \mu + T_i + \beta_1 + CX_i + \epsilon_{ij}$$
(232)
 $i = 1, 2, 3, \dots, k$
 $i = 1, 2, 3, \dots, r$

सेटिन दर्ग ग्राभवत्यना के लिए प्रतिरय,

$$Y_{ij} = \mu + T_i + \beta_j + \beta_i + CX_{ji} + \epsilon_{ij}$$
 (233)

है। इसी प्रकार अन्य किसी भी अभिकत्यना ने हेतु प्रतिरूप दिया जा सनता है। जैसा वि पत्ने दिया जा खुबा है नि सहप्रभरण विश्लेषण का प्रयोग किसी भी अभिवर्षना की स्थिति में यदि आवस्यवता हो तो किया जा सकता है। नारणी (231) में दियाया गया है कि किसी भी कारक या उपचार के निम्मसायीबित वर्ग-योग, प्र ९, (कारक र्-

बृटि) के लिए $\sum y_i^{r_2}$ में से, बृटि के $\sum y_i^{r_2}$ को घटाकर झात किये जाउं हैं।

माध्य मृटि समाययण गुणार C रा चारनित मान,

$$C = E_{xy}/E_{xx}$$
 (234)

वि उपचार का समायोजित माध्य,

$$\overline{Y}_{i}^{r} = \frac{T_{ir}}{r_{i}} - C\left(\frac{T_{ir}}{r_{i}} - \overline{X}\right) \qquad(235)$$

जबिन किं उपचार का प्रमान T_n है धीर तब्दनुसार X चर पर किं उपचार के लिए मान T_α है। r_n कें उपचार को पुनरावृत्ति मन्या है धीर C समाध्ययम पुणाक है जिसकी मृत्र (23.4) इनस्य जात किया चाता है। X_n^2 समस्य X मानो का मान्य है। प्रतिरंप (23.2) व (23.3) से सब उपचारों की पुनरावृत्ति-सक्या समान होती है।

ৰিলী एक समायोजित তথৰাৰ মাহ্য \overline{Y}_i' (বৰকি $\overline{Y}_i' = \overline{Y} - C$ ($\overline{X}_i - \overline{X}$) কা সময়ত বিদ্য ষ্ট '—

$$v(\overline{Y}_{i}^{\prime}) = \frac{S_{so}}{f_{s}^{\prime}} \left\{ \frac{1}{f_{i}} + \frac{(\overline{X}_{i} - \overline{X})^{2}}{E_{vv}} \right\} \dots (236)$$

दो समायोजित माध्यों मे भन्तर को तिम्त रूप में प्रदेशित कर सकते हैं :--

$$(\bar{\mathbf{Y}}_{i}' - \bar{\mathbf{Y}}_{j}') = (\bar{\mathbf{Y}}_{i} - \bar{\mathbf{Y}}_{j}) - C(\bar{\mathbf{X}}_{i} - \bar{\mathbf{X}}_{j})$$
(23.7)

बदरि i≠j

दो ममायोजित माध्यो ने बन्तर का प्रसरण,

$$v\left(\overline{Y}_{1}'-\overline{Y}_{1}'\right) = \frac{S_{\infty}}{f_{\alpha}'} \left\{ \frac{1}{r_{1}} + \frac{1}{r_{2}} + \frac{(\overline{X}_{1}-\overline{X}_{1})^{2}}{E_{XX}} \quad(238) \right\}$$

है। जबनि See समायोजित त्रुटि वर्ग योग है

ा, वा, । वें और j वें उपचार बी कमाश पुनरावृत्ति सख्यायें हैं। E_{XX} चर X के लिए बुटि वर्ग योग है। यत किस्हीं दी उपचार माध्यों की समानता के प्रति निरावरणीय परिकल्पना की र परीक्षा करने में सहसमस्य विश्वतेषण के अन्तर्भन माध्यों में अन्तर की मानक बुटि मुख (23.8) द्वारा प्राप्त मान के बर्गभूल के समान होती है। किन्तु सब

सम्भव मुनल माध्यो ये भातर के लिए मुत्र (238) द्वारा पृषक् पृषक भारत ज्ञात करना किन समस्या है। यत दन प्रसरणों ने माध्य प्रसरण को सब मुगल माध्यों से सन्तर के प्रसरण के लिए प्रयोग किया जाना पर्याप्त है। इस साब्य असरण को निम्न सूत्र द्वारा सीधे परिकासक कर सकते हैं। इस साध्य प्रसरण की वर्षभूत सेक्ट आध्यो से सन्तर की मानक पृदि जात हो जाती है।

ग्रनः भानग <u>भृ</u>टि,

$$V (md) = \frac{2S_{ee}}{f_e^* r} \left(1 + \frac{1}{k-1} \frac{T_{xx}}{E_{xx}} \right) \qquad (23.9)$$

SE (md) =
$$\sqrt{\frac{2S_{ee}}{f_0' r}} \left(1 + \frac{1}{k-1} \frac{T_{XX}}{E_{XX}}\right)$$
(23 9 1)

उदाहरण 231 बाजरे की उपज पर 25 उपकारों का प्रभाव जानने के हेतु प्रयोग किया गया। याई जिल्लीकृत पूर्ण धर्मक समिवन्यना से प्रयोग विज्ञास दिया गया। साथ ही यह किवार या कि प्रति भूगव्य से गोधों की सक्या (plant population per plot) का उपज पर प्रभाव परता है। यह प्रत्येक भूज्यक से गोधों की सक्या की गणना की गई। 25 उपकारों के सिए सीर 4 पुनराकृतियों ये जिल्ल श्रीक्षण प्राप्त हुए। प्रारंक भूमपक का कील == 840 × 4 गील

चर Y=प्रति भूसण्ड उपन (किलोगाम) चर X=प्रति भूसण्ड शोधों की सम्या

	पर X= प्रति भूतच्य शोधों की सन्या									
उपन	र संख्या			97	प्रकृतिको				योग	
		R,	1	R,		R ₃		R ₄		
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	_ X	Y
1	541	2 46	278	3.49	246	3 08	227	3 74	1292	12 77
2	517	4 47	235	3 36	258	3 80	152	3 59	1162	15 22
3	408	3 41	201	3 46	257	4 11	174	2 96	1040	13 94
4	458	2 26	296	3 80	264	3 72	187	3 93	1205	1371
\$	460	2 69	287	2 79	269	4 25	132	3 03	1148	1276
6	220	3 46	184	2 79	152	3 81	118	2 44	674	1150
7.	304	4 05	305	3 58	177	3 53	174	273	960	13 89
8	228	2 88	226	3 17	153	291	124	192	731	1088
9	236	4 06	286	3 29	162	3 82	133	1 93	817	13 10
10	235	3 5₫	185	277	176	3 51	175	3 23	771	13 07
11.	252	2 85	257	4 19	101	4 30	181	3 06	991	14 40
12.	308	3 43	227	4 68	312	3 29	151	3 07	998	18 86
13	204	3 37	247	3 49	253	4 03	138	2 98	842	13 87

```
सास्यिकी के सिद्धान्त ग्रीर ग्रनुप्रयोग
```

14 281 4 20 183 3 16 311 372 115 205 790 1313 15 292 3 48 255 3 65 307 4 06 172 3 25 1026 14 44 316 270 259 250 258 400 179 368 1012 1288 16 17 487 431 323 326 281 501 221 366 1312 1624 18 254 324 241 339 246 428 180 373 921 1464 19 475 3 39 272 3 25 227 3 96 151 2 66 1125 3 26 20 265 352 277 305 178 284 133 325 853 1267 21 362 2 97 282 3 11 203 3 37 123 3 04 970 12 49 22 471 3 13 279 2 57 254 4 05 124 2 80 1128 12 55 23. 385 2 22 23 2 47 219 4 46 204 3 60 1041 12 75 24 457 2 92 244 3 26 214 3 94 191 3 53 1106 13 65 25 522 3 08 246 263 204 4.00 201 372 1173 1343 मीत 8938 82 11 6308 80 57 5882 95 85 4060 77 57 25188 33 10

उपचारों म प्र'तर की मार्थकता-मरीक्षा, सङ्ग्रसरण विक्लेपण द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं।

महप्रसरण विस्तेवण करने के किए मारणी (23 I) के अनुसार निम्न सस्यामी का परिकलन करना होता है —

चर 🎗 के लिए,

612

दुनराष्ट्रति व॰य॰
$$=\frac{1}{25}$$
 (8938 2 + 6308 2 + 5882 2 + 4060 2) - स॰का॰

चर Y के लिए,

$$=11296$$

चनवार ब्रुवर =
$$\frac{1}{6}(1277^2 + 1522^2 + ... + 1365^2 + 1343^2) - म • पा•$$
== 678

पुनरावृत्ति य०य० =
$$\frac{1}{25}$$
 (82 $11^2 + 80 57^2 + 95 85^2 + 77 75^2$) – स॰ बाल

त्रृहि व ० व ० = 21 0 6

चर XY के लिए,

+201×272) - #10 474

पुटि व∙य• = - 121 95

समायोजिन वर्ग थोग प्रभू" विस्त प्रकार जान कर सकते हैं '-

Alt and =
$$E^{aa} - \frac{E^{aa}}{E^{aa}}$$

$$\Rightarrow -2106 - \frac{(-12195)^2}{24976360}$$

यदि पुनरावृत्तियों में प्रीप्तक प्रमिर्शव हो तो, इतने लिए भी मान इसी प्रवार नात कर सकते है प्रत. महत्रमुख्य विवर्तेषण सार्व्यो बनाई :---

विचरण स्रोड	स्यः को				বে া	पे॰	मा•दःय•	F–নাৰ
		∑ x,² ì	x x, y, i	Σy,² i		Σ y _i "2	:	
पुररावृत्ति	3	4860559	177-47	7 89	3	7-90	2.76	9 32**
उपचार	24	1701771	485 74	678	24	6-52	0.271	0.916
সুহি	72	2497659	-121 95	21 06	71	21.00	0 296	
पूर्ण	99	905998 6	541 26	35 72	98	35-42		
उपचार + दुटि	96	419943 0	363 79	27-84	95	27 52		
पुनराहत्ति 1 वटि	75	735821 8	55-52	28 95	74	28.90		

^{**} a = •01 पर पुनरावृत्तियों ने सार्यंक झन्तर है ।

(STATE +
$$\sqrt{2}$$
) के लिए $\sqrt{2} = 27.84 - \frac{(363.79)^2}{419943.0}$
= $27.84 - .32$
= 27.52
STATE के लिए $\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ = $27.52 - 21.00$

≈= 6 52

सहस्रसरण सारणी द्वारा प्राप्त उत्वारों के लिए में का मान 1 से कम है सहः इसके निष्मर्ष निकलता है कि उपवारों में बोई मार्थक सन्तर नहीं है। पुनरावृत्तियों के लिए वर्षे योग, उपवारों के निए वर्ष योगों को मीति ही यरिकलित क्ये गये हैं।

सूत्र (23.4) <u>द</u>ारा,

$$C = \frac{E_{yy}}{E_{xx}}$$

$$= -\frac{121-95}{2497659}$$

$$= -00049$$

$$\overline{X} = 251-88$$

उपचार संस्था	Υ,	Z' (X₁ - X)	C(X ₁ -X)	ল্পাসর মাধ্য $\vec{Y}_i = \vec{Y}_i - C(\vec{X}_i - \vec{X})$
1.	3.19	323 00	71 12	- 035	3 225
2.	3 81	290 50	38 62	019	3 829
3.	3.48	260 00	8 12	- 004	3 484
4	3 43		49 37	024	3 454
5,	3 19	287 00	35 12	- 017	3 207
6,	3 13		-83 38	+ 041	3 089
7.	3.47		-11 88	+ 006	3:464
8.	2:72		-69 13	•034	2 686
9.	3.28		-47 63	•023	3 257
10.	3 27		-59.13	.029	3'241
11.	3 60	247 75	- 413	*002	3.288
12.	3 46	249 50	- 238	.001	3 459
13.			-41.38	•020	3.450
14.		222:50	-29.38	014	3.276
15.		256.20	4 62	.002	4.608
16.	_	253 00	1.12	001	3 219
17.			76 12	- 0 37	4 097
18.			-21 63	*011	3 649
19.			29 37	014	3 334
20.			-38-63	019	3.121
21			- 9.38	.005	3 115
21	•		30 12	- 015	3 155
23			8 37	- 004	3 194
24	•		24 62	012	3 398
25				020	3 340

मूत्र (23 9.12) द्वारा उपचारों के ग्रन्तर की मानक त्रुटि

S E (md) =
$$\sqrt{2 \times \frac{0.296}{4}} \left(1 + \frac{1}{24} \times \frac{1701771}{2497656} \right)$$

S. E. (md) = $\sqrt{0.148(1+0.0283)}$
= $\sqrt{0.152188}$
= 0.39

यहाँ माध्यों ने युगल बनानर लुपना करने की आबस्यक्ता नहीं है क्योंकि F-परीक्षा द्वारा उपचार माध्यों में अन्तर निरयंग निद्ध हमा है।

ग्रप्राप्त प्रेक्षण मानों की स्थिति मे सहप्रसरण विश्लेयण

एक प्रप्राप्त मान की स्थिति म, इनका धावनन करका प्रसरण-विश्तेषण करने की विधि का वर्णन प्रध्याय 21 में किया गया है, यदि दो या दा ने धाषिक मान प्रप्राप्त हों नो उत्तक्ष प्रस्त विधियों मी उत्तक्ष्य हैं। किन्नु वाटेलेट (Bartlets) न सहनक्ष्मण विश्तेषण का प्रथ्या कर कि प्राप्त कान होने की स्थित में विश्वेषण को एक उत्तम विधि को दिया। इस विधि के धन्तर्गे उत्तक्ष्य हिंदी को स्वत्रेष्ठ के प्रत्येष्ठ सहत्वर्ती चर, जिस कभी-कभी मूल कहत्व की चर (dummy variate) भी कहते हैं, को मानता होता है। प्रयाग धिमक्त्यन्ता में समल विद्याप्त प्रेसणा से सम्बद्ध सहवर्ती चर को पूल (0) मान तिया जाता है धीर धमान्त कर प्रप्त पर दिया जाता है धीर प्रमान कर प्रप्त पर प्रयाग सहवर्ती चर को एक (1) मान तिया जाता है। धमान्त धाना कर स्थान पर पूल्प रच दिया जाता है धीर किर सामान्य रूप में प्राप्त प्रयाग स्थान कर विया जाता है धीर किर सामान्य रूप में प्रमाण कर में प्राप्त कर स्थान पर सहवर्ती चर को छोर किर सामान्य कर में प्रसाप ने वहचर समाध्यण द्वारा जान कर तियं जाते हैं। दुष्ट ध्यक्ति प्रमान में से सम्बद्ध महत्वरी चर का — 1 धी मानत है क्यों वियह परिस्तन की हिन्द सम्यान है।

केवल एक समाप्त मान को स्थिति से, इसका झाक्तित सात.

$$\hat{X} = Y_0 - CX_0 = -C = \frac{-E_{xy}}{F}$$
 ... (23.10)

नयोगि $Y_0=0$ स्रोर $X_0=1$

षप्राप्त मान का (23 10) ढारा प्राप्त झालतित मान वही है जो वि सप्याय 21 में दिय गये मूबी द्वारा प्राप्त होना ह । इनके साथ-साथ महप्रगरण विश्लेषण द्वारा प्राप्त श्रुटि माझ्य वर्ग साथ स्वाप्त मान के प्राकृतित मान के प्राप्त प्राप्त स्वाप्त विश्लेषण के प्रत्योग करके प्रसर्ग विश्लेषण के प्रत्योग कार्य प्राप्त कार्य के प्राप्त होने हैं। महप्रमरण विश्लेषण की महायदा में प्रमरण विश्लेषण एव प्रप्राप्त मान का आक्लन करन की विधि को स्पष्ट करने के हेतु उदाहरण (21 7)में दियं नये प्रयोग क क्यास को एक प्रप्राप्त मान नेवर महा पुन प्रमुत किया गया है।

बबाहरल 23.2 :

	A	42	B	38	С	50	D	46
पक्ति	C	46	D	42	A	42	В	42
1100	D	46	С	*	B	42	A	46
	B	38	Α	54	D	38	C	46

चपर्युक्त स्यास का विक्लेयण निस्त प्रकार से कर सकत हैं -

जैमा कि पिछने लक्ट से दिया गया है कि एक बारान्त नान की स्थिति से मूक सहयतीं पर लेकर महस्मल्या की सहायता से बारान्त कान का बाक्सन तथा उपचारों के प्रति परीक्षा कर सकते हैं। बाराः उपबुंका न्यास सहयतीं चर के महित निम्न रूप से तिल सकते हैं —

										यो	प
		Y	x	Y	x	Y	X	Y	X	Y	X
	A	42	0	B 38	0	C 50	0	D 46	0	176	0
	c	46	0	D 42	0	A 42	0	B 42	0	172	0
	D	46	0	C 0	ī	B 42	0	A 46	0	134	1
	B	38	0	A 54	0	D 38	0	C 46	0	176	D
याग		172	0	134	1	172	0	180	0	658	ī

उपचारी के बोन,

$$Y X$$
A = 184 0
B = 160 0
C = 142 1

D == 172 0

पर XY के लिए;

पूर्ण गुणनपत-योग,

$$= (42 \times 0 + 46 \times 0 + \dots + 46 \times 0 + 46 \times 0) - \frac{658 \times 1}{16}$$

ez - 41·125

पक्ति गुणनफल-योग = $\frac{1}{4}$ (176×0+172×0+134×1+176×0) = 335 - 41125**==** − 7 625 स्तम्भ गुणनफल-योग $=\frac{1}{2}(172\times0+134\times1+172\times0+180\times0)-\frac{658\times1}{16}$ = 33.5 - 41.125

उपचार गुणनफल-योग $=\frac{1}{4}(184\times0+160\times0+142\times1+172\times0)-\frac{658\times1}{16}$

35 5 - 41 125

= - 5 625

इसी प्रकार चर X के लिए.

पूर्ण व ॰ य ॰ = $1 - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$

पक्ति व॰ य॰ = $\frac{1}{4} - \frac{1}{18} = \frac{8}{18}$

स्तम्भ व $= \frac{1}{4} - \frac{1}{18} = \frac{8}{18}$

चर Y के लिए.

Ho Tto = 27060 25

पूर्ण व०व० = (422+462+....+462+462) - सं• का• =29148 0 - 27060 25

= 2087 75

पक्ति व॰ य॰= र (176°+172°+134°+176°) - स॰ का॰ = 27373 00 - 27060 25 = 31275

स्तम्भ व ० म ० = 1 (1722+1342+1722+1802) - स० का० =2738100 - 2706025 = 32075

उपचार व०व० = $\frac{1}{4}$ (1842+1602+1422+1722) - स० का॰ =27301 00 - 27060 25

=24075

(4×4) संटिन वर्ष के जिए सहप्रसंख्य विख्तेषण सारणा

١				0.5	- G - E	K ^ 3	11代を育る以中	F-117	
Green Chr	i ~ 3	м~ " 3	1, x 1, (v)	ξ_E	(3)	(ma)	(viii)	(ix)	⊕
	n	1	-7 625	312.75	En .				हुप्रसर
И	m	3/16	-7 62\$	320/15	e				ण-वि
The same	~	3/16	-5 625	24075	e	143 00	47 66	1 98	क्लिप
र्याद्व	9	91/9	-20 250	121375	•	120 25	24 05		ांग
, E	51	15/16	-41 125	2087 75	14				
उपमार + मृदि	6	91/6	-25 875	1454 50	60	263 25			

$$S_{\bullet}^{'2} = 1213 \cdot 75 - \frac{(-20^{\circ}25)^2}{\cdot 375}$$

 $= 1213 \cdot 75 - 1093 \cdot 50$
 $= 120 \cdot 25$
 $(39317 + 367) \approx 647$,
 $\Sigma y_{\bullet}^2 = 1454 \cdot 50 - \frac{(-25 \cdot 875)^2}{5625}$
 $= 1454 \cdot 50 - 1190 \cdot 25$
 $= 263 \cdot 25$

उपनार-ममायंशित व॰ य॰ =263 25 - 120-25 = 143 00 सारणी (परि॰ य-52) द्वारा a= 05 श्रीर (3, 6) स्व० स० वे लिए F वा मान उपचारा के लिए F के परिवतित मान से मधिक है।

ग्रन, इनसे यह निष्टर्य निकलता है कि उपचारों में कोई सार्थक ग्रम्नर नहीं है। तुत्र (23 10) द्वारा ब्रायाच्य मान का ब्रावस्तित मान,

$$X = -\left(\frac{-2025}{6/16}\right)$$

$$= \frac{324}{6}$$

$$= 54.00$$

यही युगल उपवार माध्या म गार्थकता-परीक्षा करने की आवश्यकता नही है क्योंकि

F-परीक्षा द्वारा उपचारों में यन्तर निर्वेट सिद्ध हमा है। दो मिश्रित प्रेक्षणो को स्थिति में सहप्रसरण विश्लेषण

कभी-वाभी कृषि सबधी प्रयोगी में यह विकाई सामन धानी है कि विन्ही दी निकटवर्ती क्षेत्रों की उपज भाषत में मिल गई हो । इस स्थिति से दोनो भूखव्डो (एक्को) की कुल उपज तो ज्ञान होती है किन्तु उनका सलग-प्रसय भान जानना सम्भव नही है। प्रतः इस स्पिति में सारियकीय विश्लेषण करने में सहप्रसरण विश्लेषण अत्यन्त सहायन है। इसनी विधि इस प्रकार है :---

दोनो सेनो की सम्मिलित उपज को स्वेच्छा ने दो भागों में विभाजित करके प्रति-स्यापित कर देते हैं। इन स्वच्छ मानों में एक बाधे से कम और दूसरा धाधे में प्रविक होता है भर्यात् कुल मान का भाधा मान नहीं लेना चाहिये। फिर इन दो भूखण्डो (प्रयोप-गत एकको) के लिए मुक सहवर्ती चर (dummy covariables) के गान ! घौर -! तथा धन्य भूतकडों के लिए मूक-सहवर्ती चर 0 मान लिये जाते हैं। फिर सामान्य रूप से सह-प्रसरण विश्लेषण करते हैं भीर मिथित मानी के पुनर-पुनक भावतित मान ज्ञात वर लिए जाते हैं।

सारांश

मह्यसरण विश्वेषण निन्ही उपचारों के प्रभाव से सन्य विश्वी सहस्य का प्रभाव दूर करने तथा विश्वसत्तीय सार्थकता परीक्षा न रने में सत्यन्त उपयाणी है। उन सब परिस्थितियों का बनाना तो स्नसम्भव है जिनम भहत्रसरण का प्रयोग किया जा सक्ना है कि तु स्वयं के विचार में कोई भी स्थिति, जा दिय हुए खिद्धा ता के अनुकूत हा सहस्रसरण निस्धेवण के तिए उपयुक्त है। प्रमरण विश्वेषण की स्थासा, महत्रसरण विश्वेषण क्रिया विधि म क्टिन है सन स्नावस्थक क्रम से हमना प्रयोग स्नम्भित है सर्पात् नहीं करना चाहिय।

प्रजनावली

- । महप्रमरण विजीपण का विरेचन शीविया।
- विसी सहप्रमश्ल विश्तेषण म किन क्ल्पनाधो को करना होना है ? पिणामो का निवंधन करने से किन किन बातो का विचार करना चाहिये ?
 - 3 बृष्ठ ऐसी स्थितियो वा विवेचन कीजिये जिनमें उपचारो या कारको में मार्थकता-परीक्षा के लिए सहवर्ती चर का लेना बावस्थक हो।
 - 4 मृत सहस्तों चर को कब बाबस्यक्ता होती है बीर इन्हे विभिन्न स्थितियों में किस प्रकार माना जाता है ?
 - इसार की प्रजाति (k-16) की उपन पर तीन शावनाशियों (herbicides), (H₁, II₂ H₃) वा प्रश्नाव चार विभिन्न समया (t₁, t₂, t₃) पर जानने के लिए प्रयोग किया गया। प्रयोग का वार्टा-छक्षेत्रत सक्वक प्रश्निकस्पना में नित्मात किया गया भीर इसमें दो खब्दकों को निया गया। प्रयोग कर प्रथम प्रथम समय निया गया भीर इसमें दो खब्दकों को निया गया नेशिक सरणनवार (weeds) की सच्या ना उपन पर प्रभाव पहला है, क्टाई के समय दक्की अर्थेक भूतक में प्रति सम मीटर सक्या के प्रति भी प्रेशण लिये यह जिनकों सहवती पर के कर में प्रयोग किया गया। इस प्रयोग हारा प्राप्त उपन (Y) विस्तोब अति हेक्टर तथा सर्पत्मार की सक्या थे (X) निक्त प्रकार थी —

1417 11 (141)	R		R,		
चपबार	Y	1 X	Υ -	2 44	
H ₁ t ₁ H ₁ t ₂ H ₁ t ₃ H ₁ t ₄ H ₂ t ₄ H ₃ t ₅ H ₂ t ₅ H ₃ t ₅ H ₃ t ₅ H ₃ t ₅ H ₃ t ₅	310 34 536 34 730 99 562 30 564 46 497 42 329 81 515 80 310 34 520 12 669 35 512 55	1 87 3 53 3 53 2 91 1 73 3 24 1 41 2 34 2 73 2 84 2 00 1 58	743 96 41 5 23 147 06 582 84 689 90 598 82 699 63 629 34 595 82 966 72 610 96 471 46 192 48	2 54 2 44 2 44 2 34 1 58 0 70 3 46 3 16 2 73 1 58 2 44 4 12	
नियत्रण	216 27	4 63			

उपर्युक्त न्यास ना विवन्नेयण करने, परिणामो का निर्वेचन कीजिये। (प्रका 5 का न्यास श्री एमे॰ के॰ माधुर, रात्र० कृषि महाविद्यालय, उदयपुर, के मीजन्य में प्राप्त हुग्रा)।

6 उपचारों ना प्रभाव जानने ने सिल्एक प्रयोग को यादिन्छकी हत सक्दर सिन-करना में चार पण्डल तेकर व्यवस्थित किया गया। प्रत्येक उपचार के तिए प्रिक्त हैक्टर उपने का फार्यिक मान बात किया गया। किन्तु क्टाई के समय दो निक्ट-वर्ती भूवण्डों को उपने मिल गई थी खत इन दो भूवण्डों का निम्मितन सार्यिक मान ही जान किया। इस प्रयोग द्वारा प्राप्त सार्यिक मान निम्न मारणी के मनुमार थे —

उपज का चार्यिक मान (क्पयो मे)

उपचार मध्या		श्वरदक		
	1	2	3	4
1.	273 08	600 35	407 66	505 84
2	439 45	341 25	466 15	535 15
3	585 43	128 02	537 31	357 05
4	462 81	502 11	427 07	583 16
5.	457 72	539 26	460 32	490 54
6	401 17	1012 66	390 25	615 43
7.	272.76		662 52	555 04
8	419 61	512 87	369 48	392.19
9	266 60	523 52	446 48	411 44
10	422 41	764 60	496 32	486 16
11.	558 34	494 44	449 07	416 63
12	417 49	397 27	325 96	427 79
13,	205 45	183 50	123 42	416 15

उचित मूह महत्रनी चर का प्रयोग करके उपर्युक्त न्यास का सहप्रसरण विश्लेषण कीजिये भीर उपचारों के प्रभाव की सार्यकता परीक्षा कीजिये।

परिशिष्ट-क

पारपूह सिद्धान्त का परिचय

यही पाण्यूह शिद्धान्य ना वर्णा सक्षेत्र में प्रेट्या स्वा है। स्थितनर नियंतियों में भी भी प्रमेष दिये गये हैं उनको शिद्ध नहीं विधा स्वा है। साथ ही वर्णन करते समय बाय्यूह का सोवेतिक एक में ही अधोग किया है।

परिभावा

र्षणी a₁ के सायताकार विज्यान को साम्यूट कहते हैं। यदि सायताकार विज्यान में गा पित हो कौर गरतका हो तो साम्यूह (m×n) विभिन्न का बहुनाता है। माना कि साम्यूह 'A' डारा निक्षित किया गया हो तो,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}, \dots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22}, \dots, a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33}, \dots, a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix} \equiv \{(a_4)\}$$

$$= \{a_{11} & a_{12} & a_{13}, \dots, a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \{a_{11} & a_{12} & a_{13}, \dots, a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \{a_{11} & a_{12} & a_{13}, \dots, a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix}$$

दिप्पुली: धंग 🔊 में धतुष्पत्र i छम पनि शन्या धोर j उस राज्य संस्या को निक्तित करते हैं जिसमें यह स्थित है ।

मारपूह के कुछ गुध

- (व-1) मदि साम्प्रहुमें पश्चिमों की संख्या क्यायों की सन्या के समान हो, सर्थान् m = n तो हमें वर्ष संस्थ्यत वहने हैं।
- (र-2) मदि साब्यूर में (ा, j) वांधन वरीती ओ (j, ı) वांसन है सर्पान् व्यक्तकृतों तो इसे समीपन (symmetric) याध्यु करों है।
- (४-3) यदि धास्त्रह ये ह_{व व्य} द_ह हो तो दने चलमांगन (asymmetric) यास्त्रह कहते हैं।
- (क-4) यदि खानपूर A की विभिन्नि (m×1) को भी विगे व्याप्य वैकार (column vector) करने हैं थीर (1 × n) हो शा हो बीनि वैकार काने हैं। प्राय बनाम वैकार को हैं। योग पति वैकार को हैं। वोग पति वैकार को हैं।

$$\underline{a}' = \begin{bmatrix} a_{11} \\ n_{11} \\ a_{31} \\ a_{m_1} \end{bmatrix} , \ \underline{a} = (a_{11} \ a_{12}, a_{13}, ... a_{1n})$$

(र-5) यदि ब्राब्यूह रो एव ब्रदिश राजि (scalar quantity) ब से गुणा रुप वें रो साध्युह रा प्रत्येक प्रश्ना टे से गुणा रो जाना है। माना cA=B नो B रा प्रत्येक प्रश $b_1=ca_1$ माथ हो $C\times A=A\times C=B$

 $(\pi-6)$ दो ब्राध्यूह A और B समान बहसाते हैं जब कि दोनों की विमिति एक ममान हो और प्रत्येक $\{i,j\}$ के लिए $a_8 = b_{ij}$ हो ।

(न-7) एन वर्ग साध्यूह A जिसमे विवर्ण के स्रातिरिक्त सन्य सन्न सून्य हों विवर्ण पाब्युह कहलाता है !

(र-8) यदि एक विवर्ण आव्युह मे विवर्ण का प्रत्येक ग्रग 1 हो तो इस आव्युह की ऐतिक प्राव्युह कहते हैं और इसे T से सुचित करते हैं।

(र-9) एक प्राच्युह A जिनने सब यश शूच न समान हो उने शूच्य घाय्युह (null matrix) कहते हैं भीर इसे (0) से निरुपित नरते हैं।

मान्यू हों पर कुछ कियायें

 $(\pi-10)$ यदि फ्राब्यूट् A मे पत्तियों नो स्तस्यों के रूप में भीर स्तर्मों को पित्यों के रूप में भीर स्तर्मों को पित्यों के रूप में निल दें मर्यात् $a'_{1}=a_{1}$ तो प्राप्त घान्यूह को A का परिवर्त (transpose) मान्यूह कहते हैं भीर इसे A' से निक्शित करते हैं, यदि A की विभित्त $(m \times n)$ है वों A' की विभित्त $(n \times n)$ हो जाती है जैसे,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$(3 \times 2) \qquad (2 \times 3)$$

 $(\pi-11)$ दो प्राय्यूर A तथा Π तभी बोडे जा सबते हैं जब कि A प्रौर B की विभिन्नित समान हो थौर यदि $A=((a_j)), B=((b_j))$ $(m \times n)$ $(m \times n)$

शे
$$(A+B) = ((a_1+b_1))$$

 $m \times n$
 $(A+B)' = A' + B'$

(क-12) दो घाव्यूह A तथा B ना गुणनपन A B तमी सम्मय है बद कि पूर्व गुणन (Pre-multiplying) माव्यूह A में स्तम्मों नी सस्या उत्तर गुणन (Post-multiplying) भाष्यूह B में पत्तियों की सस्या के समान हो। यदि A व B के विभित्त कमग (m×n) भीर (n×p) हो तो घाव्यूह A B की विभित्त (m×p) होगी।

माना A B=C=((
$$C_{ij}$$
)), तो
$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

यदि A का B से शुजा A B हो सकता है तो यह स्वावस्थक नहीं है कि B ना A से पूजा B A भी सम्भव हो ।

गुणनफल A B तथा B A यदि दोनो सम्बद हों तो धावश्यक नहीं कि वे समान हैं।

तो

$$\begin{array}{c} \text{A B} = \\ \text{(4} \times \text{2)} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \left(a_{11} \ b_{11} + a_{32} \ b_{21} + a_{13} \ b_{31} \right) \ \left(a_{11} \ b_{12} + a_{13} \ b_{22} + a_{13} \ b_{32} \right) \\ \left(a_{21} \ b_{11} + a_{22} \ b_{21} + a_{23} \ b_{31} \right) \ \left(a_{31} \ b_{12} + a_{23} \ b_{22} + a_{33} \ b_{23} \right) \\ \left(a_{31} \ b_{31} + a_{32} \ b_{21} + a_{33} \ b_{31} \right) \ \left(a_{31} \ b_{32} + a_{33} \ b_{22} + a_{33} \ b_{23} \right) \\ \left(a_{41} \ b_{11} + a_{42} \ b_{21} + a_{43} \ b_{21} \right) \ \left(a_{41} \ b_{12} + a_{42} \ b_{22} + a_{43} \ b_{23} \right) \end{array}$$

(T-13) (AB)" =B" A"

(र-14) यदि A एर वर्ग घाष्प्रह है तो A2=AA बीर A2=AAA.

सारणिक

(क-15) परिभाषा . एक वर्ग बास्यूड ने प्रशों ने एवं वास्तविक मान पसन (seal valued function) को सार्याचन कटते हैं।

यदि A एव (m×m) विभिन्नि का बाब्यूह है तो बार्याक को A | द्वारा निक्कित करते हैं।

तो

(क∽16), यदि

$$\begin{vmatrix} A | = \\ (2 \times 2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

नो | A | = (a₁₁ a₂₂ -- a₁₂ a₂₁) है।

(क-17) यदि विसी वर्ग घाट्युह की दो पिक्त या दो स्तम्न घापस में धदल-बन्त गर दें तो मार्रियक का चिक्त बदल जाता है। क्ष्युट है कि यदि इन परिवर्तनों की सक्या मम हो तो मार्रियक का चिक्त वही रहता है और विषम हो तो चिक्त बदल जाता है।

(र-18) यदि सारणिय में एक पति से ने दूसरी पति सा एक स्त्रम मे ते हूसरे

स्तरम नो पटा या जोड दें तो इसके मान पर नोई प्रभाव नहीं पडता है।

(क-19) यदि सारणिक में कोई दो पंक्ति या स्तम्भ सर्वसम (identical) हीं ठी सारणिक का मान गुल्य होता है।

(क-20) यदि सारमिक में दिनी एक पिक्त या स्नम्भ के सभी मश घून्य हों ती सारमिक का मान भूल्य होता है।

(ब-21) यदि विन्ही दो वर्ष भाव्यहो A य B वा गुणनपस AB=C है तो

(क-22) एक सारणिक से यदि विभी घण से सम्बद्ध पिक धौर स्तम्स को बाट दें तो शेप सारणिक को उस महा का माईनर (minor) बहते हैं 1 जैसे,

$$\begin{vmatrix} A \\ 3 \times 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{3i} & a_{3i} & a_{3i} \end{vmatrix}$$

है तो
$$s_{11}$$
 ना माईनर, मारमित s_{22} s_{23} हाता है। s_{32} s_{33}

इसी प्रकार

 $\{r-23\}$ किसी प्रश्न a_3 ने मार्डनर को उचिन चिह्न के साथ पर देने पर यह a_3 का सह लडक (cofactor) कहलाना है। सार्डनर का बिह्न $(-1)^{i+j}$ हारा जान करते हैं। सहस्रवहक को A_3 हारा निर्दान करते हैं।

पत (क-24) के भनुसार a₁₁ का सहसक्तर

$$= (-1)(1+1) \begin{bmatrix} a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

घोर
$$a_{23}$$
 बर सहलगड क् $(-1)^{2+3}$ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{22} \end{vmatrix}$

(τ =25) एक धार्यहर Λ ने मार्गक के भाग का परिस्तान निम्न सूत्र द्वारा ($m \times m$)

बर सरते हैं 🚗

$$\begin{cases} A = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \text{ (cofactor } a_{ij}), \\ j = 1, j = 1, 2, 3, \dots, m \end{cases}$$

$$m$$

स्पष्ट है कि एक पतित वा स्तरूप के बत्तों की बतने सहस्वकों से जुणा का योग सार-चिक्त के मान के समान होता है। (रू-26) एक वर्षे घाट्यूह जिसके सार्पाक का मान शून्य हो घट्युत्कमणीय घाट्यूह (singular matrix) कहलाता है घन्यया व्युत्कमणीय घाट्यूह (non-singular matrix) कहलाता है।

(क-27) यदि एक व्युत्कमणीय वर्ग प्राव्युद A के लिए एक ऐसा घन्य व्युत्कमणीय वर्ग प्राव्युह B जात कर सकते हैं कि AB⇒I हो तो B को द्याव्युह A का प्रतिकीम प्राव्युह

(inverse matrix) बहते हैं।

यदि $A = ((a_{ij}))$ एक ब्युत्त्रवाणीय वर्ग-साध्यूह हो ठो उनके प्रतिनोम माध्यूह $A^{-1} = ((a^{ij}))$ के मंग a^{ij} को निम्न सूत्र की महायती से जात कर सकते हैं।

$$a_{ij} = \frac{\text{cofactor } a_{ij}}{|A|} = \frac{A_{ij}}{|A|}$$

प्रतिकोम भाष्युह जात वरने की दो विधियों जो व्यापर रूप में प्रयोग की जाती हैं पहाँदी गई हैं।

प्रतिलोम झाव्युह शात करने की विधियाँ

(1) कीलकीय संघनन-विधि

यदि A एक साधारण वर्ग धाय्यूह है जिसका घंता a_0 है तो इसका प्रतिलोग धायूह की तकीय विधि द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। सिद्धान्त रूप में मह विधि इस प्रकार है।

पहले A के तुत्य रख दिया जब कि I की विमिति बही है जो A की है। फिर A पर विभिन्न त्रियामें इस प्रकार करते हैं कि A, I में परिवितित हो जाये। A पर की मर्द सभी त्रियामों को I पर भी साथ-साथ करते जाते हैं। इस प्रकार जब A, I में परिवितित हो जाता है तो I, A^{-1} में परिवितित हो जाता है तो I, A^{-1} में परिवितित हो जाता है है।

यहाँ इस विधि को (4×4) अस के एक मान्यूह को सेवर स्पष्ट दिया गया है।

			-	- 60				_
ति सम	य							
1.	a ₁₁	2 ₁₃	a ₁₃	a ₁₄	1	0	0	ø
2.	421	822	a ₂₃	824	0	1	0	0
3.	231	822	2 ₂₃	224	8	0	1	O
4,	8 21	2(3	843	244	0	0	D	1
5.	1	b ₁₂	b ₁₃	b ₁₄	d ₁₁	0	ø	Ö
							I नीस	निय पक्ति
6.	0	b _{12 1}	b ₁₃₋₁	b ₁₄₋₁	-a ₂₁ d ₁₁	1	0	0
7.	0	b _{12"2}	p ¹³⁻³	b ₁₄₋₂	$-a_{21}d_{11}$	0	1	0
8	0	PIE 3	b _{13 3}	b _{14 3}	$-a_{41}d_{11}$	0	0	1
		200	20.0	210			II कीलक	ीय पक्ति

9.		1	b ₂₃	b ₂₄	d_{21}	d ₂₂	0	0
10.		0	b _{23 1}		d ₂₁₋₁		1	0
						$\times q^{13}$		
11.		0	ь _{23 2}	b _{24 3}	d _{21 2}	-b _{15 8}	0	1
						d ₂₂	ा कीस∗	ीय पक्ति
12.			1	b _{3\$}	d _{s1}	d ₃₃	d ₂₃	D
			0				-d ₃₃	1
13			v	b _{34 1}	d _{at 1}	²³³ 1	b _{23 8}	•
						1		ीय पंक्ति
14.				1	cal	C48	c ₆₃	Cet
15	1	b ₁₂	b ₁₃	b ₁₄	d ₁₁	0	0	0
16.	0	1	b ₂₃	b ₂₈	d ₂₁	d22	0	0
17.	0	0	1	bai	d ₃₁	daz	d ₃₃	0
18.	0		0	1	¢41	C41	C43	C44
				b _{51.1}	d _{51 1}	-d ₂₁	0	0
19,	1	0	ь _{яз 1} 0	b ₆₁₁	d _{61.1}	d _{62.3}	-d ₂₃	5
20.	0	1	1	0	cal I	Cas	Cgt	Cat
21.	0	0		1	c ₄₁	C ₄₂	C43	C41
22	0	0	0		d _{61.1}	dera	d _{73 1}	die
23	1	0	0	d ₉₁₁		C ²²	Cgg	C ₂₃
24.	0	1	0	0	c ₂₁		Cas	C ₂₄
25.	0	0	1	0	C31	C ³³	C43	C44
26.	0	0	0	1	c41	c ⁽¹⁾		c ₁₆
27.	1	0	0	0	c11	c ₂₈	c18	
28.	a	1	0	0	c ₂₁	C33	c ²³	C24
29,	0	0	1	0	cst	C ²³	ças -	Cal .
30.	0	0	0	1	c41	c43	CES	C41

त्रिया विधि

⁽¹⁾ पहली पक्ति को इसके पहले धन 211 से बान दिया जिसस यह धन 1 हो जाने । इस प्रकार प्रतान पतिः को प्रथम की नहीं विकित्त हुने हैं। जबकि b₁₂ ज्<mark>र</mark>ीत

 $b_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}}$, $b_{14} = \frac{a_{14}}{a_{11}}$, $d_{11} = \frac{1}{a_{11}}$ यदि प्रथम पक्ति का प्रथम यश प्रूर्य हो हो प्रस्य पित को बदल कर ऊपर ले जाना चाहिये । जिससे पहली पित का पहला प्रश्न प्रूर्य

म हो।

(2) प्रयम क्लेक्कीय पति (5) को a₂₁ से गुणा करके, दूसरी पत्ति के तरनुसार संशों में से पटा देते हैं। जिससे पहले स्वस्थ का दूसरा घश कृत्य हैं, अप्ये जबकि

$b_{12\cdot 1} \! = \! a_{22} \! - \! a_{21} b_{12}, \ b_{13\cdot 1} \! = \! a_{21} b_{13}, \ b_{14\cdot 1} \! = \! a_{24} \! - \! a_{21} b_{14}$

(3) इसी प्रकार 2₃₁ व 2₄₁ में जनग पित (5) को शुगाकरके पित (3) थ (4) में से घटा देते हैं जिनमें पहने स्तम्म के 1 को छोडकर पत्य धन्न ग्रुग्य हो जाते

हैं। पत्तियों (7) व (8) दे सन पत्ति (6) दी मौति ज्ञात दिये गये हैं।

(4) भव पति (5) व पहले स्तम्भ को छोड़ निया जाता है इस अकार एक मास्यूह (3×3) विभिन्न का रह जाता है, उत्तर ही हुँदै कियामी को फिर से डोहराडे हैं, विसके परिणामस्वरण (2×2) विभिन्न का एक मास्यूह पिक (9) व दूसरे स्तम्म की छोड़ने पर प्राप्त होता है।

(5) इसे (2×2) विभिन्न ने आन्यूह पर पहली तीन कियाओं को दोहराते हैं जिसके परिणामस्वरूप पित (12) व तीसरे स्वम्भ को बाह (1×1) विभिन्न का एक साध्य

प्राप्त हो जाता है।

(6) b₃₄₁ से पित (13) को भाग करने पर IV कीलकीय पिता प्रान्त हो बाढी है। इसके क्यों को c₄₁, c₄₂, c₄₁ मान सिया गया है। कीलकीय पितायों की सस्या साब्युह में पितायों की सरमा के समान होती है।

(7) मब देवन कीलरीय पत्तियों को लिख दिया। इसे देवने से स्वष्ट है वि दार्थी भीर के मास्यूह में निम्न विमुत के सब 0 है। सब फिर कारी विमुत के सरी को प्रूप्य

करना है जिससे बायों भोर का भाव्यूह ऐकिक मान्यूह 1 मे परिवर्तित हो जाता है।

(8) पहले प्रक्ति (16) को b_{12} मे गुमा करके प्रक्ति (15) मे से घटाया किर प्रक्ति (17) को b_{23} से गुमा करके प्रक्ति (18) के से घटाया, इसी प्रकार प्रक्ति (18) को b_{24} से गुमा करने प्रक्ति (17) म से घटाया। इस प्रकार तीन सब सौर सूत्र ही जाने हैं जबकि b_{33} 1= b_{13} - b_{12} b_{23} - b_{34} b_{35} b_{35} 1= b_{13} - b_{12} b_{23} - b_{34} b_{35} b_{35}

(9) इसी प्रकार पाक्त (21) वा b53 1 से गुना करने पाक 19 में से घटाया, पति

(22) को b₆₁₁ से मुना करव पक्ति 20 में में घटाया।

(10) पक्ति (26) को b अर्थ से गुपा करके, पक्ति 23 में मे घटा दिया।

(11) दायो घोर का प्राच्यूह जिसके प्रया c₀ हैं प्राच्यूह A ने प्रतितोम प्राच्यूह A नो निरूपित नरता है। इस बिधि वा पहला लान यह है कि इसके द्वारा समीवरणों को नो हल निया वा सकता है। यदि श्राच्यूह समीवरणों में श्रद्धात मानो के गुलाकों द्वार िंग है तो कीतकीय पत्रियों नी सहायता से धवात मान ज्ञात हो जाते हैं। दूसरा लाभ यह है कि इस दिशि द्वारा घास्यूह के सारणिक का भाव कीलकीय पक्तियों के प्रथम खन्नों की गुणा करने पर बात हो जाता है।

कीलकीय समनन विधि किसी भी मब्बुरकमणांस वर्ग झाब्यूह के लिए उपमुक्त है। इस विधि मे मूटिन होने की जांच करने का भी साधन है। प्रत्येक पिक के सोग को भत मे एक स्तम्भ मे रल लिया जाता है। इस स्तम्भ के मणो पर वही निया नरते रहते हैं जो उसके माग के तरनुपार पिक पर की गई है। इस प्रकार सदैव किसी भी पिक्त ना मोग, उपके मित्स स्तम्भ मे मण के समान होता है। यदि ऐसा न हाता भी समफ लेता चाहिसे कि कही परिकलन में मूटि हो गई है। इन्ही नारणो से कीवनीय समनन विधि का प्रयोग बहुधा किया जाता है।

संक्षिप्त बुलिटिल विधि

इस विषि का प्रयोग केवल अब्युत्कमणीय, समित, वर्ष प्राब्यूह का प्रतिकोच कात करते के हेतु ही किया जाता है। माना कि वर्षों के योग तथा गुणनपना के योग द्वारा रिवत (3×3) विभिन्न का प्राव्यूह S है जिसके प्रश्न S, है। S का प्रतिनोम प्राव्यूह S है जिसके प्रश्न S, है। S का प्रतिनोम प्राव्यूह S है जिसके प्रश्न S है। इस विधि के प्रत्यांत पहले S में सिता विभिन्नीय ऐकिक प्राव्यूह I के तुत्व रख दिया जाता है किर पत्तियोग रा विभिन्न किप प्रति प्राप्त है। इस विधि के प्रत्यांत पहले S को समान विभिन्नीय ऐकिक प्राव्यूह I के तुत्व रख दिया जाता है किर पत्तियोग रा विभिन्न हिया था कि प्राप्त के जिल्ला का प्राप्त है। अपना विभिन्न का विभिन्न हिया था है।

		क्या जाता ह	श्वम				योग
4fts R1 R2 R3 R4 R5 R6 R7 R8 R9	C ₁ S ₁₁ S ₁₂ S ₁₃ S ₁₃ S ₁₁ 1 0 0	C ₂ S ₁₂ S ₂₂ S ₂₃ S ₁₃ S ₁₂ S ₁₂₁ S ₂₂₁	C ₃ S ₁₃ S ₂₃ S ₂₃ S ₃₃ S ₁₃ S _{13,1} S _{23,1} S _{23,1} S _{23,2}	C ₄ 1 0 0 1 d ₁₁ d ₁₁ 1 d ₁₁ 2 d ₁₁ 2	C ₅ 0 1 0 0 0 1 d ₂₃ d ₂₂₁ d ₇₁₃	C ₆ 0 0 1 D 0 1 d ₂₂	T ₁ T ₂ T ₃ T ₁ T ₁ T ₁ T ₂ T ₃ T ₃ T ₃

प्रतिसोग ग्राब्य्ह के धश हैं।

$$\begin{array}{l} C_{11} = 1 \times d_{11} + d_{11} \cdot d_{11} \cdot 2 + d_{11} \cdot 3^{d_{11}} \cdot 4 \\ C_{12} = 1 \times 0 \quad + d_{11} \cdot d_{22} \quad + d_{11} \cdot 3^{d_{22}} \cdot 2 \\ C_{13} = 1 \times 0 \quad + d_{11} \cdot X \cdot 0 \quad + d_{11} \cdot 2^{d_{23}} \cdot 2 \\ C_{21} = 0 \times 0 \quad + 1 \times k_{22} \quad + d_{22} \cdot 2^{d_{22}} \cdot 2 \\ C_{22} = 0 \times 0 \quad + 1 \times 0 \quad + d_{23} \cdot 1^{d_{23}} \cdot 2 \\ C_{23} = 0 \times 0 \quad + 0 \times 0 \quad + 1 \times d_{33} \cdot 2 \end{array}$$

किया विधि

(1) पक्ति R1 को पक्ति R4 में फिर से लिख दिया।

(2) पक्ति R4 के प्रत्येक अग को इसके पहले अग S11 से भाग दिया अर्थात् R4

S, किया को किया और प्राप्त मशो का R म रख दिया।

(3) पक्ति R_{5} को S_{12} से गुणा करके, पक्ति R_{2} में घटा दिया ग्रयांत् R_{2} R_{42} R_{5} किया को क्या । इस प्रकार अस है, $S_{22.1} = S_{23} - S_{12} S_{22.1} S_{23.1} = S_{23} - S_{12} S_{13.1}$

जीर d_{11 1}= 0-S₁₂d₁₁,T_{2 1}=T₂-S₁₂T_{1 1} इन बाशो को R₆ म रक्ला गया है। (4) पक्ति R_3 म स S_{13} मीर पक्ति R_5 के सशी की गुणा करके सीर S_{23} 1 की R_7

के सशो से गुणा करके घटा दिया सर्यात्

Raj-RajRag-RajRag

इस प्रकार सश है,

 $S_{221} = S_{33} - S_{13}S_{131} - S_{231}S_{232}$ d113=0-1 S131-d111S232

(5) पिक्त R₈ वे मशो को S_{33 1} संभाग कर दिया। यदि मान्यूह की विभित्ति (4×4) या प्रधिक त्रम नी हो तो डूलिटिल विधि को विस्तरित करके ऊपर की मीति प्रयोग कर सकत हैं।

परिशिष्ट-स

कुछ उपयोगी सूत्र

संघुगणक सम्बन्धी सूत्र

हम जानते हैं कि

इसी को लघुके रूप में इस प्रकार लिख सकत हैं।

$$\log_{10} 100 = 2$$
 ($= 11$)

इसी प्रकार यदि

$$e^x = a$$
 (tf 2)

दी लघुनगक के रूप ने

$$\log_{\bullet} a = x \qquad (\sigma 21)$$

म्पजरू (स. 1.1) या (स. 2.1) म. 10 याट सपुगणर का बाधार है। यदि ब मीर b दो सस्याएँ हैं फ्रीर क्राधार व्हेती

$$\log_{\bullet} (ab) = \log_{\bullet} a + \log_{\bullet} b \tag{3}$$

$$\log_{\bullet}\left(\frac{a}{b}\right) = \log_{\bullet}^{2} a - \log_{\bullet} b \tag{4}$$

$$\log_{\bullet} (a)^n = n \log_{\bullet} a \tag{3.5}$$

यदि प्राप्तार का परिवतन e से 10 मंबा 10 स ट म करना हाता निब्न सूद का प्रवान करते हैं —

क्रमचय भीर सचय सम्ब धी सूत्र

यदि कुल बस्तुर्षं छ हैं और इनमें से वस्तुष्य के कमवयों की (a), से निर्दाश करते हैं भीर सबयों को (;') से निर्दाणन करते हैं।

$$(n)_r = n(n-1)(n-2)$$
 $(n-r+1)$ $(n7)$

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = (n)_{r/r1} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot (n-r+1)}{r1} \qquad (rr 8)$$

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{r! (n-r)!} \qquad \dots (n + 1)$$

a = n (n-1) (n-2) -3.2.1

(a+b)" का द्विपद विस्तार

$$(a+b)^n = a^n + {n \choose 1} a^{n-1} b + {n \choose 2} a^{n-2} b^2 + \dots$$

$$+\binom{n}{r}a^{n-r}b^r+....+b^n$$
(47.9)

जबकि (",) a" t b', (r+1) वा ध्यापक वद है। r==0, 1, 2, n, रखने पर द्विपद विस्तार के सब पद प्राध्त हो जाते हैं।

घातीय श्रेणी

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2I} + \frac{x^3}{3I} + \frac{x^4}{4I} + \dots$$
 (4.2)

धोर
$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2I} - \frac{x^3}{3I} + \frac{x^6}{4I} - \frac{x^5}{5I} +$$
 (ख.10.1)

लघुगणकीय श्रेणी

$$\log_e (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$
 (4.11)

मीर

$$\log_{\bullet} (1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$
 (6.12)

$$\log_{\bullet}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...\right)$$
 (4.13)

थेणी (ल.13) मे माना कि.

$$\frac{1+x}{1-x} = Z \qquad \qquad x = \frac{z-1}{z+1}$$

$$\log_{\bullet} Z = 2 \left\{ \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right\} \quad \dots (\leqslant 14)$$

al के सन्निकट मान के लिए स्टॉलग-मुत्र

$$nl = \sqrt{2\pi} e^{-n} \cdot n^{n + \frac{1}{2}}$$
(415)

गामा-फलन

गामा फतन G (α, n) को α व n के वास्तविक पनात्मक मानो (α>0 मीर n>0) के लिए निम्न समावलन द्वारा दिया जाता है :---

$$G(a, n) = \int_{a}^{\infty} x^{n-1} e^{-aX} dx \qquad(\pi 16)$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{a^{n}} \qquad(\pi 161)$$

यदि a = 1

$$x = 1$$

$$\sqrt{n} = \int_{0}^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \qquad(6.16.2)$$

बोटा-फलन

बीटा फलन $oldsymbol{eta}$ (m,n) को m व n के वास्तविक धनारमक मानो m>0 मीर n>0 के लिए निम्न समाकल द्वारा दिया जाता है।

$$\beta(m, n) = \int_{0}^{1} x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \qquad \dots (4.1)$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx \qquad(\pi 17.1)$$

$$= \frac{|\overline{m}| \overline{n}}{|m+n|} \qquad(\pi 17.2)$$

$$= \frac{|\overline{m}| \overline{n}}{|m+n|} = n |\overline{n}|$$

परिजिल्ह-ग

समुख्यप सिद्धान्त का परिचय

समुच्चय1 को हम इस प्रकार समन्त सकते हैं । यह उन ध्रवयबों या घटकों (elements) प्रयता एकको वा समुदाय है जो कि विचाराधीन हैं। जैसे यदि एक घैल्छ पर रखी पुस्तकें एक समुख्यम है तो इस पर रक्षी प्रत्येक पुस्तक इस समुख्यम का घवमव है।

ग्रवयद x के समुख्या A में होते को x∈A द्वारा मुचित करते हैं। भवमद x के

समूब्द्य A में न होते को x∈A द्वारा सूचित करते हैं।

उपसमुख्य :--माना कि A और A, दो समुख्य हैं जिनमें A का प्रत्येक सवयद A का भी एक सदयद हो तो A, को A का उपसमुख्यय कहते हैं। इसके लिए प्रदीक A, CA है भयांत् A, A में घन्तिवय्ट (Contains) है। या A⊃A, है मर्यांत् A, A, को प्रन्तविष्ट करना है। इस स्थिति में x∈A,⇒x∈A [जहाँ ⇒ : प्रन्तिनिहित्त] यदि दो समृत्वय A मौर B इस प्रकार हो कि A⊂B मौर B⊂A दो ये समृत्वय समान बहलाते हैं।

गुन्य समुच्चय :-- एक समुच्चय जिसमें नोई सबयद न हो ती इसे गून्य समुच्चय कहते हैं। भून्य समुख्यय को 💠 द्वारा निरूपित करते हैं। यह कह सकते हैं कि भून्य समुख्यय िक्सी भी समुख्य A का उपसमुख्य होता है।

पुरक समुच्चय :--- यदि समुच्चय S का एक उपसमुच्चय A है सर्यात् A⊂S हो S के उन सब अवयवों का समुदाय जो कि A से नहीं हैं A का पूरक समुख्यय कहलाते हैं भीर इसे A द्वारा सुचित करते हैं।

समुख्यमें का यौग :-- समुख्यमें के किसी सग्रह (collection) # में यदि एक ऐसा रामुन्त्य है जिसका प्रत्येक सवयव उस संग्रह के रूम से रूम एक समुन्त्य का सवयव ही तो वह सम्बद्य, संग्रह के सभी समुब्बयों का योग कहताता है और इसके लिए प्रतीक U A का प्रयोग करते हैं। समुख्ययों के योग सम्बन्धी कुछ तथ्य निम्न प्रकार हैं जिनको कि मावश्यकता पढने पर मुगमता से सिद्ध किया जा सकता है :-

- (i) AU 6 = A
- (ii) AUB = BUA; यह योग का कम विनिमेय (commutative) नियम है ।
- (iii) (AUB) UC=AU (BUC); यह योग का साहचर्य (associative) नियम है ।
- (iv) A⊂B यदि भौर केवल यदि AUB=B

समुच्दवों का प्रतिच्छेद :--समुच्चयो के प्रत्येक संग्रह 🄉 के लिए यदि एक ऐसे समुच्चय का प्रस्तित्व है जिसका कि अत्येक प्रवयव कवित संग्रह के अत्येक समुख्यम का प्रवयव ही

समुख्य को अर्राव्यक्ति हो छोड़ दिया नया है।

तो उस समुच्यम को संग्रह के क्षभुच्यमों का प्रतिय्वेद नहते हैं घौर इसके लिए प्रतीव ⋒ み का प्रयोग करते हैं।

प्रतिवसं सम्रिट .-- निसी बाहच्छिक प्रयोग के समस्त सम्प्रव हाय-परिणामों
 (outcomes) के सग्रह को प्रतिवसं सम्रिट कहते हैं और इसे प्री से सुनित करते हैं।

सारंपुक्त समुच्चय: —कोई भी दो समुच्चय A व B सत्तमुक्त कहे आते हैं यदि कार्ये कोई भी मवयब सार्थ न हो सम्पाद् A B == ♦ हो । इस वरिकाया को दो से प्राधिक समुच्चयों के लिए विस्तरित किया जा सकता है।

बोरल क्षेत्र '---समुज्ययो का एक वर्ग 'β' बोरल क्षेत्र कहलाता है यदि इसमें निम्न गुण हों :--

- ह एक झब्स्य वर्गहै भीर इसमें रि झस्तिंबस्ट है।
- (u) बदि एक समुच्चय A∈β तो Ā∈β
- (in) यदि $\{A_i\}$ गणनीयतः धनन्त समुख्यमें (countably infinite sets) का एक समुख्य है जबकि प्रायेक $A_i \subset B_i$ तो

[∞] U A₁∈β



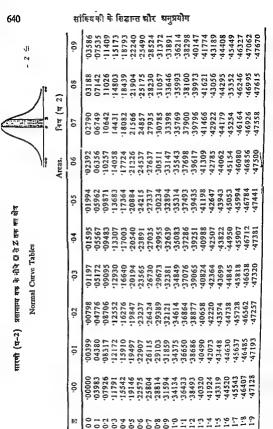
परिशिष्ट-घ सारको (घ-1) प्रसामान्य बंटन को कोटियाँ

X. -00 -01 -02 -03 -04 0·0 -3989 -3989 -3989 -3988 -3986 -3988 -3986 -3956 -3951 -3956 -3951 -3956 -3951 -3956 -3951 -3956 -3951 -3956 -3951 -3956 -3951 -3956 -3951 -3885 -3876 -3876 -3885 -3876 -3478 -3756 -3488 -3683 -3668 -3653 -3637 -3621 -3503 -3485 -3467 -3448 -3667 -3448 -3667 -3448 -3683 -3668 -3653 -3356 -3034 -3056 -3034 -3056 -3034 -3687 -3448 -3667 -3448 -3667 -3488 -3667 -3488 -3667 -3643 -3667 -3480 -3034 -3056 -3034 -3056 -3034 -3056 -3034 -3056 -3034 -3087 -3056 -3034 -3034 -3056 -3034 -3056			सारव	ग्रे(घ⊶1) प्रस	ग्रमान्य बंटन व	ने कारिया	
0°1		x.	.00	-01	·02	-03	-04
0·2 ·3910 ·3902 ·3894 ·3885 ·3876 0·3 ·3814 ·3802 ·3790 ·3778 ·3765 0·4 ·3683 ·3668 ·3653 ·3637 ·3621 0·5 ·3321 ·3503 ·3485 ·3467 ·3448 0·6 ·3332 ·33112 ·3292 ·3271 ·3251 0·7 ·3123 ·3101 ·3079 ·3056 ·3034 0·8 ·2897 ·2874 ·2850 ·2827 ·2803 0·9 ·2661 ·2637 ·2613 ·2589 ·2565 1·0 ·2420 ·2396 ·2371 ·2347 ·2323 1·1 ·2179 ·2155 ·2131 ·2107 ·2083 1·2 ·1942 ·1919 ·1895 ·1872 ·1849 1·3 ·1942 ·1919 ·1895 ·1872 ·1849 1·3 ·1942 ·1919 ·1895 ·1872 ·1849 1·3 <th></th> <td>0.0</td> <td>-3989</td> <td>-3989</td> <td>-3989</td> <td>-3988</td> <td>-3986</td>		0.0	-3989	-3989	-3989	-3988	-3986
0°3		0.1	.3970	-3965	-3961	-3956	-3951
0.4		0.5	.3910	-3902	-3894	.3885	.3876
0.5 .3521 .3503 .3485 .3467 .3448 0.6 .3332 .3312 .3292 .3271 .3251 0.7 .9123 .3101 .3079 .3056 .3034 0.8 .2887 .2874 .2850 .2827 .2803 0.9 .2661 .2637 .2613 .2589 .2565 1.0 .2420 .2396 .2371 .2347 .2323 1.1 .2179 .2155 .2131 .2107 .2083 1.2 .1942 .1919 .1895 .1872 .1849 1.3 .1714 .1691 .1669 .1647 .1626 1.4 .1497 .1476 .1456 .1435 .1415 1.5 .1295 .1276 .1257 .1238 .1219 1.6 .1109 .1092 .1074 .1057 .1041 1.7 .0940 .0925 .0909 .0893 .0878 1.8		0.3	·3814	.3802	-3790	-3778	-3765
0.6		0.4	.3683	*3668	·3653	.3637	.3621
0.7 -3123 -3101 -3079 -3056 -3034 0.8 -2897 -2874 -2850 -2827 -2803 0.9 -2661 -2637 -2613 -2589 -2565 1.0 -2420 -2396 -2371 -2347 -2323 1.1 -2179 -2155 -2131 -2107 -2083 1.2 -1942 -1919 -1895 -1872 -1849 1.3 -1714 -1691 -1669 -1647 -1626 1.4 -1497 -1476 -1456 -1435 -1415 1.5 -1295 -1276 -1257 -1238 -1219 1.6 -1109 -1092 -1074 -1057 -1040 1.7 -0940 -0925 -0909 -0893 -0878 1.8 -0790 -0775 -0761 -0748 -0734 1.9 -0656 -0644 -0632 -0620 -0608 2.0		0.5	3521	-3503	-3485	.3467	-3448
0.8 .2897 .2874 .2850 .2827 .2803 0.9 .2661 .2637 .2613 .2589 .2565 1.0 .2420 .2396 .2371 .2347 .2323 1.1 .2179 .2155 .2131 .2107 .2083 1.2 .1942 .1919 .1895 .1872 .1849 1.3 .1714 .1691 .1669 .1647 .1626 1.4 .1497 .1476 .1436 .1435 .1415 1.5 .1295 .1276 .1257 .1238 .1219 1.6 .1109 .1092 .1074 .1057 .1040 1.7 .0940 .0925 .0909 .0893 .0873 1.8 .0790 .0775 .0761 .0748 .0734 1.9 .0656 .0644 .0632 .0620 .0608 2.0 .0540 .0529 .0519 .0508 .0498 2.1		0.6	*3332	.3312	-3292	.3271	.3251
0.9		0.7	3123	-3101	*3079	-3056	.3034
1.0		0.8	.2897	.2874	·2850	*2827	-2803
1*1		0.9	.2661	·2637	.2613	-2589	.2565
1.2 .1942 .1919 .1895 .1872 .1849 1.3 .1714 .1691 .1669 .1647 .1626 1.4 .1497 .1476 .1456 .1435 .1415 1.5 .1295 .1276 .1257 .1238 .1219 1.6 .1109 .1092 .1074 .1057 .1040 1.7 .0940 .0925 .0909 .0893 .0878 1.8 .0790 .0775 .0761 .0748 .0734 1.9 .0656 .0644 .0632 .0620 .0608 2.0 .0540 .0529 .0519 .0508 .0498 2.1 .0440 .0431 .0422 .0413 .0404 2.2 .0355 .0347 .0339 .0332 .0325 2.3 .0283 .0277 .0270 .0264 .0258 2.4 .0224 .0219 .0213 .0208 .0203 2.5 .0175 .0171 .0167 .0153 .1058 2.6 .0136 .0132 .0129 .0126 .0122 2.7 .0104 .0101 .0099 .0096 .0093 2.8 .0079 .0075 .0076 .0055 .0053		1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323
1.3		1.1	2179	2155	·2131	2107	-2083
1.4		1.2	1942	.1919	-1895	1872	1849
1.5 .1295 .1276 .1257 .1238 .1219 1.6 .1109 .1092 .1074 .1057 .1040 1.7 .0940 .0925 .0909 .0893 .0878 1.8 .0790 .0775 .0761 .0748 .0734 1.9 .0656 .0644 .0632 .0620 .0608 2.0 .0540 .0529 .0519 .0508 .0498 2.1 .0440 .0431 .0422 .0413 .0404 2.2 .0355 .0347 .0339 .0332 .0325 2.3 .0283 .0277 .0270 .0264 .0258 2.4 .0224 .0219 .0213 .0208 .0203 2.5 .0175 .0171 .0167 .0153 .1058 2.6 .0136 .0132 .0129 .0126 .0122 2.7 .0104 .0101 .0099 .0096 .0093 2.8		1.3	1714	-1691	·1669	1647	.1626
1.6		1.4	1497	1476	.1456	1435	·1415
1.7 .0940 .0925 .0909 .0893 .0878 1.8 .0790 .0775 .0761 .0748 .0734 1.9 .0556 .0644 .0632 .0620 .0608 2.0 .0540 .0529 .0519 .0508 .0498 2.1 .0440 .0431 .0422 .0413 .0404 2.2 .0355 .0347 .0339 .0332 .0325 2.3 .0283 .0277 .0270 .0264 .0258 2.4 .0224 .0219 .0213 .0208 .0203 2.5 .0175 .0171 .0167 .0153 .1058 2.6 .0136 .0132 .0129 .0126 .0122 2.7 .0104 .0101 .0099 .0096 .0093 2.8 .0079 .0077 .0075 .0073 .0071 2.9 .0060 .0058 .0056 .0055 .0053		1.5	1295	1276	-1257	1238	1219
1.8		1.6	.1109	1092	1074	1057	-1040
1.9		1.7	-0940	.0925	-0909	10893	-0878
2·0		1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	-0734
2·1		1.9	.0656	.0644	-0632	-0620	-0608
2'2- '0355 '0347 '0339 '0332 '0325 2'3 '0283 '0277 '0270 '0264 '0258 2'4 '0224 '0219 '0213 '0208 '0203 2'5 '0175 '0171 '0167 '0153 '1058 2'6 '0136 '0132 '0129 '0126 '0122 2'7 '0104 '0101 '0099 '0096 '0093 2'8 '0079 '0077 '0075 '0073 '0071 2'9 '0060 '0058 '0056 '0055 '0053 *01 '1 '2 '3 '4			.0540	.0529	.0519	-0508	-0498
2·3 ·0283 ·0277 ·0270 ·0264 ·0258 2·4 ·0224 ·0219 ·0213 ·0208 ·0203 2·5 ·0175 ·0171 ·0167 ·0153 ·1058 2·6 ·0136 ·0132 ·0129 ·0126 ·0122 2·7 ·0104 ·0101 ·0099 ·0096 ·0093 2·8 ·0079 ·0077 ·0075 ·0073 ·0071 2·9 ·0060 ·0058 ·0056 ·0055 ·0053		2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	•0404
2·4			.0355	.0347	-0339	-0332	.0325
2.5			.0283	·0277	-0270	.0264	-0258
2.6			.0224	·0219	·0213	.0208	
2·7				.0171	.0167	.0153	
2:8				.0132	.0129	.0126	
2·9 ·0060 ·0058 ·0056 ·0055 ·0053		•		.0101	-0099	-0096	
·01 ·1 ·2 ·3 ·4				.0077	-0075		
2 2 3 .		2.9	.0060	-0058	-0056	-0055	-0053
3.0 .0044 .0033 .0024 .0017 .0012							•
	_	3.0	*0044	-0033	-0024	-0017	*0012

विसत सारएरी (घ-1)

۰05	06	07	08	09	1	2	3	4	5
.3984	3982	3980	3977	3973	0	0	-1	-1	-1
.3945	3939	3932	3925	3918	-1	-1	-2	~2	-3
3867	3857	3847	3836	3825	-1	-2	-3	-4	-5
3752	3739	3725	3712	3697	-1	-3	-4	~5	-6
3605	3589	3572	3555	3538	-2	-3	-5	~6	-8
3429	3410	3391	3372	3352	-2	-4	-6	-8	-9
3230	3209	3187	3166	3144	-2	-4	-6	8	~10
3011	2989	2966	2943	2920	-2	-5	-7	-9	-11
2780	2756	12732	2709	2685	-2	-5	-7	-9	-12
2541	2516	12492	2468	2444	-2	-5	-7	-10	-12
2299	2275	*2251	2227	2203	- 2	-5	-7	-10	-12
'2059	2036	2012	1989	1965	-2	-5	-7	-10	-12
1826	1804	1781	1785	1736	-2	-5	-7	-9	-11
1604	1582	1561	1539	1518	-2	-4	-7	-9	-11
1394	1374	1354	1334	1315	-2	-4	-6	-8	-10
1200	1182	1163	1145	1127	-2	-4	-6	-7	-9
1023	1006	0989	0973	0957	-2	-3	-5	-7	-8
0863	0848	0833	0818	0804	-2	-3	-5	-6	~8
1270	0707	0694	0681	0669	-1	-3	-4	-5	-7
0596	0584	0573	0562	0551	-1	-2	4.	-5	-6
0488	0478	0468	4059	0449	-1	-2	-3 .	-4	-5
0396	0387	0397	0371	0363	-1	-2	-3 -		-4
0317	0310	0303	0297	0290	-1	-1	-2 -		-4
0252	0246	0241	0235	0229	-1	-1	-2 -		-3
8910	0194	0189	0184	0810	0	-1	-1 -		-2
0154	0151	0147	0143	0139	0	-1	-1 -		-2
0119	.0116	0113	0110	0107	o	-1	-1 -		-2
1600	8800	0036	0084	1800	0		-1 -		-1
0069	0067	2065	0063	0061	0		-i -		-1
0051	0050	0048	0047	0346	û	4	0 -	<u> </u>	2
5	6	7	8	9					
0009	0006	0004	0003	0002					

Table x-1 is taken from Table II of Fisher and Yates: Statistical Tables for Biological, Articultural and Medical Research Published by Longman Group Lid, London (previously published by Oliver & Boyd, Eduburth) and by the permission of the authors and publishers



दितत सारको (च−2) (2)

		,	١	1	1	1	1	1	1999997	•
			1	1	į	,	ł	1	499997	*
			1		1	ŧ	1	1	49997	40
4 19 17	26564	40996	49996	49996	49996	49996	49996	19995		9
49915	49995	40005	19994	49994	16661	49994	49993	18083		ec oc
19992	4 1992	4 1992	10005	49991	49991	40990	49990	49990		7
49989	40048	4000	49987	49987	49986	49986	49985	49985		36
49983	40083	10083	49981	17664	44930	49979	19978	49078		3 8
49976	49975	40074	49973	49972	49971	49970	19969	89665		4
49965	19661	44962	49961	49960	85664.	10051	49955	19953		~
94950	81661	91061	\$\$66\$	49942	49940	19938	19936	16631		2
+49929	49926	19924	49921	49918	44916	19913	49910	49906		-
49900	49896	19893	49889	49886	49882	49878	4) \$ 7 4	40869		30
49861	49856	49851	19816	10841	49836	19841	49825	49819		51
49807	49801	19795	19788	19781	49774	49767	49760	49752		60
49736	49728	49720	49711	49702	.49693	.49683	49674	19661		11
49643	49632	49621	49609	49598	49585	49573	49560	19817		9
49520	49506	49492	49477	-49461	49146	.49430	49413	49396		5.5
49361	49343	49324	-49305	49286	-49266	49245	-49224	49202		-T
-49158	-49134	-49111	-4908c	49061	-49036	49010	48983	48956		1 -
44899	-48870	48840	-48809	-48778	48745	-48713	48679	18645	•	
-48574	-48537	18500	.48461	.48422	48182	1875	-48300	48257	•	
48169	18124	-48077	-4803C	-47982	-47932	-47882	.47831	17784	•	١

Table 4-2 as taken from Table 11, of Fisher and Yates Statistical Tables for Biological Agricultural and Medical Recearch, Published by Longman Group Ltd., London (previously published by Olivers & bond Libishurgh and by the permission of the authors and publishers

सारको (ध-3), १ धा भटन

स्य महो					आविकता					
(d f)	s	4	3	4	••	0.5	02	10	100	
~	1 000	1 376	1 963	3 0 7 8	6 314	12 706	31 821	63 657	636 619	
7	816	1061	286	1 886	2 920	4 303	6 965	9 925		
m	765	978	1 250	1 638	2 353	3 182	4 541	5 841	=	
4	741	941	1 190	1 533	2 132	2 776	3 747	4 604		
\$	727	920	1 156	1 476	2 0 1 5	2 571	3 365	4 032	6 8 6 9	
ø	718	906	1 134	1 440	1 943	2 447	3 143	3 707		
7	711	896	1 119	1415	1 895	2 365	2 998	3 499		·
00	206	889	1 108	1 397	1 860	2 306	2 896	3 355		-
6	703	6000	1 100	1 383	1 833	2 262	2 821	1 250		
0	700	879	1 093	1372	1812	2 228	2 764	3 169		_
= :	697	876	1 088	1 363	1 796	2 201	2 7 1 8	3 106		
21 :	695	873	1 083	1356	1 782	2 179	2 681	3 055		
13	694	870	1 079	1350	1771	2 160	2 650	3 012		
4 :	692	868	1 076	1 345	1 761	2 145	2 624	2 977		
2 .	169	866	1 074	1341	1 753	2 131	2 602	2 947		
0 !	690	865	1 071	1 337	1 746	2 120	2 583	2 921		
2 5	689	863	1 069	1 333	1 740	2 110	2 567	2 898		
0 0	688	862	1 067	1 330	1 734	2 101	2 552	2 878		
7 5	889	861	1 066	1 328	1 729	2 093	2 539	2 861		
7 .	687	860	1 064	1 325	1 725	2 086	2 528	2 845		
1 6	980	859	1 063	1 323	1 721	2 080	2518	2 831		
;	080	828	1001	1 321	1717	2 074	2,508	2 819		

He T		,	•	•	प्राथिश तह	6	;	į	
(g 1)	8	4	,	ا.	-	ŝ	70	5	100
23	685	8.58	1 060	1319	1 714	2 069	2 500	2 807	3 767
3.4	685	857	1059	1 318	1711	2 0 6 4	2 492	2 797	3 745
č	684	856	1 058	1316	1 708	2 060	2 485	2 787	3 725
,	684	856	1058	1315	1 706	2 0 5 6	2 479	2 779	3 707
2 6	684	855	1057	1314	1 703	2022	2 473	2 771	3 690
e fo	683	855	1056	1 313	1 701	2 048	2 467	2 763	3 674
50	683	854	1 055	1311	1 699	2 045	2 462	2 756	3 659
2	683	854	1 055	1310	1 697	2 0 4 2	2 457	2 750	3 646
40	189	851	1 050	1 303	1684	2 021	2 423	2 704	3.551
9	619	84 48	1 046	1 296	1 671	2 000	2 390	2 660	3 460
120	677	845	1041	1 289	1 658	1 980	2 358	2 617	3 373
8	674	842	1 036	1 282	1 645	1 960	2 326	2 576	3 291

Research, Pablished by Longman Group Lid , London (previously published by Oliver & boyd Edinburgh) and by Table 4-3 is taken from Table III of Fisher and Yates Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical the permission of the authors and publishers,

सारत्मे (ध-4), काई वर्ग बटन

म्ब का				TE.	प्राधिकत			
(4 L)	20	30	20	10	0.5	0.5	10	100
	455	1 074	1 642	2 706	1841	5412	6 635	10 827
2	1 386	2 408	3.219	4 605	1665	7 824	9 210	13 815
	2 366	3 665	4 642	6 251	7 815	9 837	11 345	16 266
_	3 357	4 8 7 8	8 6 8 6	7 7 7 9	9 488	11 668	13 277	18 467
	4 351	6 064	7 289	9 236	11 070	13 388	15 086	20 515
	5 348	7 231	8 558	10 645	12 592	15033	16812	22 457
	6 346	8 383	9 803	12 017	14 067	16 622	18 475	24 327
	7 344	9 524	11 030	13 362	15 507	18 168	20 090	26 125
_	8 343	10 656	12 242	14 684	16919	19 679	21 666	27 877
_	9 142	11 781	13 442	15987	18 307	21 161	23 209	29 588
	10 141	12 899	14 638	17 275	19 675	22 618	24 725	31 264
	11 340	14011	15812	18 549	21 026	24 054	26 217	32 909
	12 140	15119	16 985	19 812	22 362	25 472	27 688	34 528
	13 339	16 222	18 151	21 064	23685	26 871	29 141	36 123
	14 339	17 322	116 911	22 107	24 996	28 259	30 578	37 697
_	15 338	18 418	20 465	23-542	26 296	29 633	32 000	39 252
_	16 {38	19 5'1	21 615	24 769	27 587	30 995	33 409	40 790
80	17 118	20 (01	22 760	25 989	28 869	32 346	34 805	42 312

निवत सारुते (प-4) (2)

61	18 338	21 689	23 900	27 204	30 144	33 687	36 191	43 820
۰	19 337	22 775	25 018	28 412	31 410	35 020	37 566	45 315
_	20 337	23 858	26 171	29 615	32 671	36 343	38 932	16 797
~	21 337	24 939	27 101	30813	33 924	37 659	40 289	48 268
•	22 337	26018	28 429	32 007	35 172	38 968	41 638	49 728
4	23 137	27 096	29 553	33 196	36 415	40 270	42 980	51 179
v)	24 337	28 172	30 675	34382	37 652	41 566	44 314	52 620
10	25 336	29 246	31 795	35 463	38 885	42 856	45 642	54052
	26 3 16	30 119	32 912	16 741	40 (13	44 140	46 963	55476
80	27 136	31 391	34 027	37 9 16	41 337	45 419	48 278	56 893
6	28 336	32 461	35 139	39087	42 257	46 693	49 588	58 302
٥	29 336	31 430	36 250	40 256	43 773	47 962	50 892	59 703
7	31 336	34665	33 466	42 585	16197	40 487	5" 486	62 487
4	33 334	37 795	40 676	44 903	48 602	52 995	56 061	65 247
9	35 336	39 922	42 879	47 212	\$0 999	55 489	58 619	67 985
	37 335	42 045	45 076	49 513	53 384	57 969	61 162	70 703
0	39 335	44 165	47 269	51 805	55 7.9	60 416	63 691	73 402
2	41 335	46 282	49 456	54 000	48 124	62 892	66 206	76 084
<u>.</u>	43 335	48 396	51 639	\$6369	60 481	65 337	63 710	76 750

सतत सारची (प-4)

ŀ	16 136	503.03	62-818	\$8.641	62-830	177 73	71.201	81 400
2 !	0000	100.00	13.010	60.007	65 171	70 197	73-683	84.037
00	47 333	22.010	266.00	200 00			100	122 661
	49 335	54 723	58 164	63 167	67-505	72613	10124	100 99
	2000	66 637	60 113	65 422	69832	75 021	78 616	89-272
4 -	21.22	20.02	707 69	67 673	72.153	77-422	81 069	91872
* •	2000	0000	64 6 60	010 09	74 468	79.815	83.513	94.461
	000.00	150.10	00000		1 1 1	100 00	84 950	97.03
200	57 335	63 29	91899	0017/	9//9/	107 70	000	
_	\$9.335	65 227	68 972	74 397	79 082	84 580	88 379	66.07
	134	67 133	71.125	76 630	81381	86953	90.802	102 166
1 7	7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7	200	73 276	78 860	83 675	89 320	93 217	104 716
, «	65 335	71 508	75 424	81 085	85 965	91 681	95 626	107 258
o ac	67 335	73 600	77 571	83 308	MH 250	94 037	98 028	109 791
	69 334	75 689	79715	85 527	90.531	96 388	100 425	112-317

For larger values of n, the expression $\sqrt{2} x^2 - \sqrt{2n-1}$ may be used as a normal deviate with unit variance, For odd values of n between 30 and 70 the mean of the tabular values for n - 1 and n + 1 may be taken.

remembering that the probability for X2 corresponds with that of a single tail of the normal curve.

Table u. 4 is taken from Table IV of Pistier and Yates Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, Published by Longman Group Ltd., London (previously published by Oliver & Boyd, Edinburgh), and by the permission of the authors and publishers

सार**ची (य-5)** प्रमरण झनुषात ६²² के 0 1 प्रतिशत बि^{न्}डु

998 5 999 0 999 2 999 3 999 3 999 3 999 4 998 6 999 2 999 2 999 3 999 3 999 4 999 4 167 0 148 5 141 1 137 1 146 132 8 130 6 130 6 130 6 130 6 140	res 430	-	74	m	4	۰	9	80	12	24	В	,
990 999 2 999 2 999 3 999 3 999 4 999 4 999 4 999 5 148 5 1411 1371 1346 1328 1306 128 3 135 9 6 12 5 5618 5344 5171 5053 490 4994 999 5 1 612 5 5618 5344 5171 5053 490 4277 1459 1 270 2320 2192 2081 2003 1764 2642 2374 2 1849 1831 1621 152 1463 1371 1273 2 1849 1831 1439 1349 1364 1179 1689 4 1491 1256 1171 1113 1037 950 845 764 4 1491 1255 1128 1048 992 920 845 764 4 1491 1255 1131 1048 992 920 845 764 14 1491 1255 1134		10000	40000		\$62500	57640*	585937	598144	199019	623497	v	
(6) 13 14	- (10100		,	000	999 3	9993	999 4	999 4	9 666		
16.2 56.18 3.3.4 51.71 50.53 49.00 47.41 45.77 37.12 33.20 31.09 29.75 28.84 27.64 26.42 25.14 27.00 23.70 21.92 20.81 20.03 19.03 17.99 16.89 21.69 18.77 17.19 16.21 15.52 14.63 13.71 12.73 16.49 11.83 14.39 12.46 12.64 117 12.73 16.99 15.81 11.71 11.3 10.37 9.57 87.2 16.91 12.66 11.71 11.13 10.37 9.57 87.2 11.81 11.56 10.35 9.58 9.05 8.45 7.64 11.81 11.56 10.35 9.58 9.05 8.35 7.61 6.85 11.29 10.80 9.63 8.35 7.71 7.00 6.25 11.34 9.73 8.62 7.92 7.43 6.80 <	ra e	0 0 0	9 2 2 4 0	1 1 1 1 1	117.1	134.6	1328	1306	1283	1259		
15.2 3.0.9 3.0.9 3.0.9 3.0.9 3.0.9 3.0.9 3.0.9 3.0.9 3.0.9 3.0.0 3.10 3.10 3.10 3.0.3 3.0.9 3.10 3.10 3.10 3.10 3.10 1.0.9 16.89 21.69 18.77 17.19 16.21 15.52 14.63 13.71 12.73 18.49 15.83 14.39 13.49 12.86 13.71 11.19 10.30 14.59 11.26 11.71 11.13 10.37 9.27 8.45 7.64 14.91 12.56 11.71 11.13 10.37 9.20 8.45 7.64 14.91 12.56 11.71 11.13 10.37 9.20 8.45 7.64 11.38 11.58 10.86 9.58 9.05 8.45 7.64 6.85 11.38 10.21 9.07 8.89 8.38 7.71 7.00 6.25 11.39 10.21 9.07 8.85	n .	167.0	480	1 1 6 7 9	81 44	51.71	50 53	49 00	47 41	45 77		
15.71 17.00 2.17.0 2.17.0 2.17.0 2.17.0 2.17.0 2.17.0 2.17.0 2.17.0 2.17.0 2.17.0 2.17.0 2.17.0 2.17.1 2.17.2 1.17.1 1.17.2 1.17.1 1.17.2 1.17.1 1.17.2 1.17.1 1.17.2 <td>٠,</td> <td>41 41</td> <td>0 - 73</td> <td>3330</td> <td>3100</td> <td>29 75</td> <td>28 84</td> <td>27 64</td> <td>26 42</td> <td>25 14</td> <td></td> <td></td>	٠,	41 41	0 - 73	3330	3100	29 75	28 84	27 64	26 42	25 14		
16.49 18.77 17.19 16.21 15.52 14.63 13.71 12.73 18.49 15.83 14.39 13.49 12.86 12.04 11.19 10.30 16.39 13.90 12.56 11.71 11.13 10.37 9.57 8.72 14.91 12.55 11.78 10.88 9.62 8.35 76.4 6.85 11.29 10.80 9.63 8.89 8.38 77.1 70.0 6.25 11.39 10.21 9.07 8.35 7.86 7.21 6.52 5.78 11.78 10.21 9.07 8.25 7.92 7.43 6.80 6.13 5.41 11.78 9.73 8.62 7.92 7.43 6.80 6.13 5.41 11.78 9.14 8.25 7.57 7.09 6.47 5.81 5.10 110.7 9.0 7.9 7.0 6.86 5.55 4.85 10.6 8.73 <	^ ¥	14 75	27.00	23.70	21 92	20 81	20 03	19 03	17 99	68 91		11 /1
18.49 15.83 14.39 13.49 12.86 12.04 11.19 10.30 16.39 13.90 12.56 11.71 11.13 10.37 9.57 872 14.91 12.55 11.28 10.48 99.2 9.20 8.45 76.4 12.91 11.56 10.35 9.63 8.89 8.38 77.1 70.0 6.25 12.31 10.21 9.07 8.35 77.1 70.0 6.25 11.78 9.73 8.62 79.2 74.3 6.80 6.13 5.41 11.34 9.14 8.62 79.2 74.3 6.80 6.13 5.41 11.78 9.73 8.62 79.2 74.3 6.80 6.13 5.41 11.97 9.04 7.27 6.81 6.19 5.55 4.85 11.07 9.06 7.94 7.27 6.81 6.19 5.55 4.63 10.07 9.0 7.94 7.	5 1	20.00	21 69	1877	17 19	1621	15 52	1463	13 71	12 73		41-6
16.39 13.90 12.56 11.71 11.13 10.37 957 872 14.91 12.55 11.28 10.48 992 920 845 764 13.81 11.56 10.35 9.58 9.05 8.35 76.4 6.85 12.97 10.80 9.63 8.89 8.38 771 700 6.25 11.29 10.21 9.07 8.35 7.86 721 6.52 5.78 11.34 9.73 8.62 7.92 7.43 6.80 6.13 5.41 11.34 9.14 8.25 7.57 7.09 6.47 5.81 5.10 10.97 9.00 7.94 7.27 6.81 6.19 5.55 4.85 10.66 8.73 7.68 7.02 6.56 5.96 5.32 4.63	- 0	25.43	18.49	15 83	14 39	13 49	1286	1204	61 11	10 30		. 1
14 91 12.55 11.28 10.48 99.2 9.20 8.45 7.64 13 81 11.56 10.35 9.58 9.05 8.35 7.6J 6.85 12.97 10.80 9.63 8.89 8.38 771 7.00 6.25 12.31 10.21 9.07 8.35 7.86 7.21 6.52 5.78 11.34 9.73 8.62 7.92 7.43 6.80 6.13 5.41 11.34 9.14 8.25 7.57 7.09 6.47 5.81 5.10 10.97 9.00 7.94 7.27 6.81 6.19 5.55 4.85 10.66 8.73 7.68 7.66 5.96 5.32 4.63	. 6	98 66	16.39	13.90	12.56	11 71	11 13	10 37	9 57	8 72		
1381 1156 10.35 958 905 8.35 76J 6.85 12.97 10.80 963 8.89 8.38 771 700 6.25 11.31 10.21 907 8.35 786 721 6.52 5.78 11.34 9.14 8.62 7.92 743 6.80 6.13 5.41 11.34 9.14 8.25 7.57 70.9 6.47 5.81 5.10 10.97 9.00 7.94 7.27 6.81 6.19 5.55 4.85 10.66 8.73 7.68 7.02 6.56 5.96 5.32 4.63	, 5	2010	1491	12.55	11 28	10 48	9 92	9 20	8 45	7 64		
12.97 10.80 9.63 8.89 8.38 771 700 6.25 12.31 10.21 9.07 8.35 7.86 7.21 6.52 5.78 11.78 9.73 8.62 7.92 7.43 6.80 6.13 5.41 11.34 9.34 8.25 7.57 7.09 6.47 5.81 5.10 10.05 8.73 7.68 7.27 6.81 6.19 5.55 4.85 10.66 8.73 7.68 7.02 6.56 5.96 5.32 4.63	2 =	1961	1381	1156	1035	9 58	9 05	8 35	763	6 85		
12.31 10.21 9.07 8.35 7.86 7.21 6.52 5.78 11.78 9.73 8.62 7.92 7.43 6.80 6.13 5.41 11.34 9.34 8.25 7.97 7.09 6.47 5.81 5.10 11.04 9.00 7.94 7.27 6.81 6.19 5.55 4.85 10.66 8.73 7.68 7.02 6.56 5.96 5.32 4.63	. 2	7981	1 1297	10 80	9 63	8 89	8 38	771	7 00	6 2 5		
1178 973 8 62 792 743 680 613 541 1134 934 8 25 757 709 647 581 510 1097 900 794 727 681 619 555 485 1066 8 73 768 702 656 596 532 463	-	17.8	1 12 31	1021	9 07	8 35	7 86	7 21	6 52	5 78		
1134 934 825 757 709 647 581 510 1097 900 794 727 681 619 555 485 1066 873 768 702 656 596 532 463	! _	171	4 11.73	9 73	8 62	7 92	7 43	6 80	6 13	5 41		
10.97 9.00 7.94 7.27 6.81 6.19 5.55 4.85 10.66 8.73 7.68 7.02 6.56 5.96 5.32 4.63	12	16.5	9 11 3	4 934	8 25	7.57	7 09	6 47	5 81	5 10		
1066 873 768 702 656 596 532 463 3	91	191	2 109	7 9 00	7 94	7 2 T	681	619	5 5 5	4 85		
	17	157	2 106	6 873	3 7 68	7 02	6 56	596	5 32	4 63	Ю	

सांख्यिकी के सिद्धान्त भीर भ्रनुप्रयोग

15-38 10-39 849 7'46 15-08 10-16 828 726 14-82 9'95 8'10 7'10 14-83 9'61 7'80 6'81 14-19 9'47 7'67 6'69 14-19 9'47 7'67 6'69 14-19 9'47 7'67 6'69 13-88 9'22 7'45 6'49 13-74 9'12 7'17 6'13 13-50 8'97 7'17 6'13 13-50 8'97 7'17 6'19 13-50 8'77 7'05 6'12 13-50 8'77 7'05 6'12 13-61 8'25 6'60 5'70 13-61 8'25 6'60 13-61 8'75 8'75 13-						
15-08 10-16 8-28 14-59 9-75 14-19 14-59 9-77 7-94 14-19 9-47 7-67 14-19 9-47 7-67 14-18 9-12 7-45 13-61 9-12 8-25 6-60 12-21 8		635	576	513	4 45	3.67
14.82 9.95 8.10 14.59 9.75 8.10 14.19 9.47 7.67 14.03 9.34 7.55 13.74 9.12 7.45 13.50 8.91 7.19 13.50 8.97 7.19 13.29 8.77 7.05		6 18	5 59	1 97	4 29	3.52
14:59 977 794 14:38 961 786 1419 947 7:67 1403 9:34 7:67 13:74 9:12 7:45 13:61 9:02 7:17 13:50 8:91 7:17 13:50 8:91 7:17 13:50 8:91 7:17 13:50 8:91 7:17 13:50 8:91 7:17 13:50 8:91 7:17 13:50 8:91 7:17 13:50 8:91 7:17 13:50 8:91 7:17 13:50 8:91 7:17 13:50 8:50 8:50 8:50 8:50 8:50 8:50 8:50 8		6 02	5 44	4 92	4-15	3.38
14-38 961 780 14-19 947 7-67 14-03 9-34 7-55 17-88 9-22 7-45 13-74 9-12 7-16 13-61 9-02 7-17 13-50 8-91 7-19 13-29 8-87 7-12 13-29 8-77 7-05 13-61 8-25 6-60	695 6.32	5.88	5 31	4 70	4-03	3.26
9.34 7.67 9.34 7.65 9.34 7.65 9.34 7.65 9.32 7.45 9.02 7.27 8.85 7.19 8.77 7.05 8.25 6.66		5 76	5 19	4.58	3 92	3.15
14 03 9-34 7-55 13 74 9 12 7-45 13 74 9 12 7-16 13 50 8 9 7 7-17 13 29 8 77 7 0.5 12-21 8 25 6-60 12-21 8 25 6		5.65	5 0 9	4.48	3 22	3 05
13-88 9 22 7-45 13-74 9 12 7-16 13-50 8 9 7-17 13-29 8 77 7 0.5 13-29 8 77 7 0.5 12-61 8 25 6-60		4.5	4 99	4.19	3 74	2.97
13.74 9.12 7.16 13.61 9.02 7.27 13.50 8.91 7.19 13.29 8.77 7.05 12.21 8.25 6.60		6 46	164	4 31	3.66	2 89
13.50		5 38	4 83	4 24	3 59	2.8
13.50		3.31	4 76	4 17	1.52	2.75
13.39 8:85 7:12 13.29 8:77 7.05 12:61 8:25 6:60		5 24	4 69	4 1	3 46	2.70
12:61 8 25 6:60		5 18	4 64	4 0 5	3-41	2 64
12.61 8.25 6.60		5 12	4 58	4.00	3 36	2.59
78.5		4-73	4 21	3.64	3 01	2 23
11.9 9/1/ /611		4.37	387	3 31	2.69	1 90
11.38 7-32 579		4 0.4	3 55	3 02	2.40	1 54
691 542		3-74	3 27	2.74		1.00

Lower 01 percent points are found by interchange of P, and P2 i m P, must always correspond with the greater mean square.

मारको (य-51) प्रमरण घनुषात ८²² के 1 प्रतिभत बिन्डु

- C) - L											
14/14(JP)		2	3	-	s	9	80	12	24	8	
_	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5982	9019	6234	6366	
el	98 50	99 00	99 17	99 28	99 30	99 33	9937	99 42	99.46	06 50	
	34 12	30 62	29 46	23 71	28 24	27 91	27 49	27 05	26.60	26 12	
4	21 20	18 00	16 69	1598	15 22	15 21	14 80	14 37	13.93	13.46	
٠,	16 26	13 27	12 06	11 39	1097	10 67	10 29	9 89	9 47	600	
9	1374	1092	9 78	9 15	8 75	8 47	8 10	7 72	7.33	K 8 9	परि
-	12 25	9 55	8 4 5	785	7 46	7 19	6 8 4	6.47	6 0 7		P
**	11 26	8 65	7 59	7 01	6 63	6 37	6 03	5 67	96.5	200	प्ट-
6	10 56	8 02	6 0 9	6.42	909	\$ 80	5 47		0 1	0 4	ч
٥	10 04	7 \$6	6.54	\$ 99	6 64	30	90 9			4 35	
_	9 6 5	20	6 22	\$ 67	6 3 3		000	1/4	4 33	3 91	
rı.	9 33	6 93	5 95	5 41	808	6 6	7 7	4 40	4 02	3 60	
,,,	9 07	6 70	574	5.26	4 9 6	107	20.0	97 7	78	3 36	
4	8 86	6.51	\$ 56	5-03	4 60	70 7	9 30	3 96	3 49	3.16	
8	8 68	\$ 36	5.42	4 89	4 56	4 40	41.4	3 80	3 43	3 00	
ş	8 53	6 23	5 29	477	4 44	4 6	200	3 67	1 29	287	
7	8 40	6 11	5 18	4 67	4.34	4 10	3 89	7 7	ee :	2.75	6

а-5.1)	
सारको (4 7 7
וננט	

				स	स्यि	की	के	सिद	ान्त	য়	र १	प्रनुष	यो	η			
	2.57	2.49	2.42	2.36	2.41	2.26	2.21	2.17	2.13	2.10	5.06	2.03	2.01	1.80	1.60	1.38	1.00
	3.00	2.92	2.86	2.80	2.75	2.70	2.66	2.62	2.58	2.55	2.52	2.49	2.47	2.29	2.13	1.95	1.79
	3-37	3.30	3.23	3-17	3.12	3.07	3.03	2.99	2.96	2.93	2.90	2.87	2.84	5.66	2.50	2.34	2.18
	3-71	3-63	3.26	3.51	3.45	3-41	3.36	3.32	3.29	3.26	3.23	3.20	3.17	2.99	2.82	2.66	2.51
	4.01	3-94	3.87	3.81	3.76	3.71	3-67	3.63	3.59	3.86	3.53	3.50	3.47	3.29	3.12	2.96	2.80
(2)	4.25	4-17	4.10	4.04	3.99	3.94	3.90	3.36	3.82	3.78	3.75	3-73	3.70	3.51	3-34	3.17	3.02
	4.58	4.50	4-43	4.37	4.31	4.26	4.22	4.18	4.14	4.11	4.07	4.04	4.02	3.83	3.65	3.48	1.32
	2-09	5.01	4.94	4.87	4-82	4.76	4.72	4.68	4.64	4.60	4.57	4.54	4.51	4.31	4.13	3.95	3.78
	6.03	8.03	5.85	5.78	5.72	2.66	5.61	5.57	5.53	5.49	5.45	5.42	\$.39	5.18	4.98	4.79	4.60
	8-28	87.0	8.10	8.02	7.94	7.88	7.82	7.77	7.73	7.68	7.64	09.4	7.56	7.31	7.08	9.85	6.64
	18	19	30	21	22	23	4	2.5	52	72	28	53	30	40	9	120	Ð

Lower 1 per cent points are found by interchange of s. and s. i. c. s. must always correspond with the greater mean square.

सतरची (य-^{4.}2) प्रसरण धनुषात e²² क[े]ं प्रति^{न्}त बिन्ड

יום כן:										
14/84(1 P)	~	۲,	£	4	'n	9	a	2	24	8
-	191	1995	2157	2246	2302	2140	2389	2439	249 00	2543
r)	18 51	19 00	9161	19 25	1930	19 33	19 37	19 41	19 45	19 40
•	1013	9 88	9 28	9 12	9 0 1	*6 8	\$8 \$	8 74	8 64	8 53
*	1 2 1	6 94	6 89	619	6 26	919	6 04	5 91	5 77	5 63
s	9 9	\$ 79	5.41	5 19	4 O 4	495	4 82	4 68	4 33	4 36
s	\$ 99	5.14	476	4 53	4 39	4 28	4 15	4 00	3 84	3 67
1	5 59	47.4	4 36	4 12	3 97	3 87	3 73	3 57	3 41	3 23
£	5 33	4 46	4 07	3 84	3 69	3 58	3 44	1 28	3 12	2 93
2	-12	4 26	3 86	3 63	3 48	3 37	1 23	107	2 90	2 71
30	496	4 10	371	3 48	3 33	3 22	3 07	2 91	2 74	1 54
=	48	3 98	3.59	336	3 20	3 09	295	2 79	2 61	3 40
17	4 75	3 88	3.49	3 26	3 11	3 00	285	2 69	2 40	2 30
13	4 67	3 80	341	3 18	3 02	2 92	277	2 60	r r	
=	4 60	174	3 34	311	2 96	2 8 \$	2.70	2 53	2 35	
15	4 54	3 68	3 29	306	2 90	2 79	2 64	6.4 00	2 19	
16	4 49	3 63	3 24	301	285	2.74	2.59	2.42	2 24	
11	4 45	3 59	3 20	2 96	2 8 1	2 70	2.55	138	2 19	1 96

धनत हारछो (च-५ 2)

0	4 4	3.55	3.16	2 0 4	7 / 7	7 00	16.7	10.7	7	
62	2,0	3 52	3-13	2 90	2.74	2 63	2 48	2.31	2 11	1 88
20	4 7	3 49	3.10	2 87	271	2 60	2 45	2 28	2.08	1.84
21	4.33	147	3.07	2 84	2 68	2 57	2 42	2 25	2.05	18:
22	4 30	3 44	3.03	2 8 2	2 66	2.55	2.40	2 23	2 03	1 78
23	7	54.5	103	2 80	2.64	2.53	2 38	2 20	2 00	1.16
24	4.16	3 40	3.01	2 78	2 62	2 51	2 36	2 18	1 98	1 73
3.5	17	3 38	2 9 9	2.76	2.60	2 49	2 34	2 16	1 96	1.7.1
	4 22	3.37	2 98	2.74	2.59	2 47	2 32	2 15	1 95	1.69
1.2	4.21	338	2 96	2 73	2.57	2 46	2 00	2.13	1.93	1.67
	4 20	3.34	295	2 71	2 56	2 44	2 29	2 , 2	16.1	1 65
6	4.18	3 33	293	2 70	2.54	2 43	2 28	2 10	1 90	1 64
0	4 17	3 32	2 9 2	5.69	2453	2 42	2 27	2 09	68.1	1 62
0	4 03	3 23	284	2 61	2 45	2.34	2 18	2 00	1 79	1.51
9	4 00	3.15	2.76	2.52	2 37	2 2 5	2 10	1 92	1.70	1.39
20	3 92	3 07	2 68	2.45	2.29	2 17	2 02	1 83	19	1 25
8	3.84	2 99	2 60	2 37	2 21	2 10	1 94	1 75	1.52	1 00

grater mean square

1 2 3 4 5 6 8 12 24 \times 0 3 3 4 5 6 8 12 24 \times 0 3 3 3 3 3 3 3 3 3					, प्रसरण धन्	लारखो (थ–53) पात ८ ²² के 10 श	लारखी (थ-53) प्रनरण कनुपात स् ^{टर} के 10 अतिवान विस्ट	<u>it</u>			
49.50 53.59 55.83 57.24 58.20 59.44 60.70 62.00 9.76 53.9 53.84 57.24 58.20 59.44 60.70 62.00 5.86 53.9 53.4 57.24 58.20 59.44 60.70 62.00 5.86 53.9 53.4 53.8 52.8 52.8 52.2 51.8 57.8 52.2 51.8 57.8 52.2 52.2 51.8 57.8 52.2 52.2 51.8 57.8 52.2 52.2 51.8 57.8 52.2 52.2 52.2 52.2 52.2 52.2 52.2 52	1				1			7			
49 50 53 59 55 83 5724 58 20 59 44 60 70 62 00 5 6 5 39 5 34 5 31 5 22 5 18 5 41 9 45 5 4 4 19 4 11 4 05 9 33 9 37 9 41 9 45 4 3 2 4 11 4 05 4 01 3 93 3 22 5 18 3 7 8 3 62 3 52 3 45 3 40 3 44 3 27 3 19 3 46 3 29 3 18 3 11 3 05 2 98 2 96 2 96 3 27 3 19 3 6 3 5 2 3 40 3 46 3 34 3 27 3 19	J	-	-	9	4	S	9	aò	12	24	8
9 00 9 16 9 24 9 29 9 33 9 37 9 41 9 20 9 34 9 37 9 45 9 40 9 35 9 40 9 35 9 35 2 40 2 40 2 40 2 40 2 40 2 38 2 28 2 40 2 38 2 28 2 18 2 28 2 18 2 28 2 18 2 30 2 28 2 8 2 8 2 8 2 8 2 8		3986	49 50	53 59	55 83	57.24	58 20	59 44	60 70	63.00	
346 539 534 531 528 525 542 542 543 544 543 544 234 <td></td> <td>8 53</td> <td>9 00</td> <td>916</td> <td>9 24</td> <td>9 29</td> <td>9.33</td> <td>0 17</td> <td>2 0</td> <td>00 70</td> <td>55.50</td>		8 53	9 00	916	9 24	9 29	9.33	0 17	2 0	00 70	55.50
432 419 411 404 401 323 342 518 53 346 329 318 311 305 296 290 282 344 327 319 339 330 383 33 346 329 318 311 305 296 290 282 311 205 281 275 267 268 2 311 292 281 269 281 267 267 268 2 292 273 261 252 246 239 230 221 218 2 286 266 254 247 239 230 221 210 198 1 276 256 249 236 221 224 215 204 1 277 249 236 227 221 212 202 199 187 1 267 246 231 226 218 209 199 187 1 267 246 231 227 221 219 219 187 1 267 246 231 226 218 209 189 187 1		5 54	5.46	5 39	5 34	5 12	40.0			4	9 49
378 362 352 345 349 399 390 383 346 329 318 311 305 298 299 390 387 319 311 305 398 328 328 326 327 319 319 301 281 282 283 267 259 250 240 292 273 261 265 246 247 258 282 292 273 261 262 246 248 247 248 247 248 247 248 247 248 247 248 247 248 247 248 247 248 248 248 248 248 248 248 248 248 248		4.54	4.32	4 10	7	200	9 9	275	2 2 2	5 18	5 13
346 3.29 3.34 3.40 334 327 3.19 3 326 3.07 2.96 2.81 2.83 2.96 2.90 2.82 2 311 2.92 2.81 2.3 2.67 2.59 2.50 2.40 2 2.92 2.73 2.61 2.55 2.47 2.38 2.28 2.28 2 2.86 2.66 2.34 2.44 2.39 2.30 2.21 2.10 1 2.76 2.56 2.49 2.35 2.39 2.30 2.21 2.10 1 2.70 2.49 2.36 2.23 2.24 2.15 2.04 1 2.70 2.49 2.36 2.27 2.21 2.12 2.02 1.90 1 2.67 2.44 2.31 2.22 2.21 2.12 2.02 1.90 1 2.67 2.44 2.29 2.20 2.13 2.06 1.96 1.87 1 2.67 2.44 2.29 2.20 2.13 2.06 1.96 1.87 1		40.6	3 28		: :	5	50	3 95	3 90	3 83	3 76
3.6 3.7 3.18 3.11 3.05 2.98 2.90 2.82 2.33 3.11 2.05 2.81 2.05 2.83 2.83 2.83 2.84 2.05 2.05 2.05 2.05 3.01 2.81 2.69 2.61 2.85 2.45 2.39 2.30 2.40 2.20 2.82 2.82 2.82 2.82 2.82 2.82 2.8		178	2 4K	400	70 7	6 4 5	3 40	3 34	3 27	3 19	3 10
3.70 3.07 2.96 2.88 2.83 2.75 2.67 2.58 3.11 2.92 2.81 2.73 2.67 2.59 2.40 2.40 2.92 2.73 2.61 2.55 2.47 2.38 2.28 2.86 2.54 2.46 2.39 2.30 2.21 2.18 2.86 2.66 2.54 2.46 2.39 2.30 2.21 2.18 2.76 2.46 2.39 2.30 2.31 2.24 2.15 2.04 2.76 2.48 2.39 2.33 2.24 2.15 2.04 2.70 2.49 2.36 2.31 2.15 2.05 1.94 2.70 2.49 2.36 2.27 2.21 2.15 2.05 1.94 2.67 2.44 2.37 2.27 2.21 2.05 1.94 2.62 2.44 2.37 2.27 2.27 2.13 2.09 1.99 1.84 <td></td> <td></td> <td>3 4</td> <td>670</td> <td>2</td> <td>3 11</td> <td>3 05</td> <td>2 98</td> <td>2 90</td> <td>2 8 2</td> <td>2 7 2</td>			3 4	670	2	3 11	3 05	2 98	2 90	2 8 2	2 7 2
311 292 281 2"3 267 259 250 240 301 281 269 261 255 247 238 228 286 266 254 239 230 231 228 286 266 243 239 230 231 221 210 276 256 243 239 239 230 231 224 270 259 239 231 224 215 200 270 249 236 227 221 212 202 267 246 233 222 229 239 187 262 244 231 222 239 233 264 298 189		7 .	3 70	3 07	2 96	17	283	275	2 67	2.59	4 4 4
301 281 269 261 255 247 238 228 249 250 256 258 246 238 228 228 258 251 251 251 252 246 238 228 218 251 251 251 252 252 251 251 251 251 251		3 46	3	2 92	2 81	2 3	2 67	2 59	2.50	2 4	1 0
292 273 261 252 246 238 228 218 286 266 254 244 239 230 221 218 276 256 243 235 239 230 221 210 276 256 243 235 239 224 215 204 270 249 236 227 224 215 205 194 267 246 233 227 221 212 205 199 267 246 233 222 221 215 209 187 262 244 231 222 221 206 199 187		336	3 01	2 81	2 69	2 61	2.55	2 47	7 0	2 6	7 73
2 86 2 66 2 34 24 24 2 3 2 3 2 2 8 2 18 2 18 2 18 2 16 2 48 2 19 2 3 2 2 10 2 10 2 10 2 10 2 10 2 10 2 1		3 28	2 92	273	2 61	2 83	3 46		2 3 8	2 28	2 16
281 261 248 249 230 221 210 276 256 243 239 233 224 215 204 273 252 239 231 234 210 198 270 249 236 227 221 212 202 194 267 244 231 222 218 209 199 187 262 244 229 220 213 206 196 184		3 23	2 86	2 66	3		9 4 4	2 30	2 28	2 18	2 06
276 256 243 233 224 215 204 275 276 256 243 235 248 220 210 198 270 249 236 227 221 212 205 194 267 246 233 224 215 205 194 267 246 233 224 218 209 199 187 267 244 231 222 225 233 206 196 184 262 242 229 220 233 206 196 184		60	2 8 1	3 6.	1 0	4 4	2.39	2 30	2 21	2 10	1 97
2.73 2.50 2.43 2.35 2.48 2.20 2.10 198 2.73 2.49 2.36 2.27 2.21 2.15 2.05 194 2.67 2.46 2.33 2.24 2.18 2.02 1.90 2.64 2.44 2.31 2.22 2.18 2.09 1.99 1.87 2.62 2.42 2.29 2.20 2.13 2.04 1.96 1.84		714	276	2 6	6 7 7 4	4 39	133	2 24	2 15	2 04	1 90
270 249 236 227 224 215 205 194 2570 249 236 227 221 212 202 190 264 244 231 222 215 206 196 187 262 242 229 220 213 206 196 184			2 5	2 4	5 4 4	23	2 78	2 20	2 10	1 98	**
267 246 235 227 221 212 202 190 267 246 233 226 218 209 199 187 264 244 231 222 218 206 196 184 262 24.2 229 220 213 206 196 184		2 2	3 6	707	2.39	2 31	2 24	2.15	2 05	1 94	
267 246 233 224 218 209 199 187 264 234 231 222 218 206 196 184 262 242 229 213 106 196 184			2 ,	7.49	2 36	2 23	2.23	2 12	2 0 2	061	2 .
262 244 238 222 215 206 196 184		3 6	707	2 46	233	2.24	2.18	2 09	1 99		
262 242 229 320 213 204		5	2 64	2 44	238	2 22	2 15	2.06	1 04		7/1
	- 1	0.0	2 62	242	2 29	2.20	211	300		0.4	69 1

111 111 009 005 005 001 001 001 000 000 000 000 000	(2) (12) (13) (14) (15) (15) (16) (17) (17) (18) (18) (18) (18) (18) (18) (18) (18	France (12) 227 227 228 229 229 221 221 221 221 221	facts errord (4-4) (2) 27 21 23 24 25 25 26 27 21 21 21 21 21 21 21 21 21	C1 240 227 213 25 25 25 25 25 25 25 2
---	--	---	---	---

Tables 4-5 ate taken from Tables V of I'sher and Yates Statistical Inbles for Biological, Agricultural and Medical Lower 10 per cent points are found by interchange of p_1 and p_2 i. e. p_1 must any its correspond with the greifer mean square

Revearch, Published by Longman Gloup Ltd London (previously published by Oliver & boyd Edinburgh), and by

the permission of the authors and publishers

सारहा (घ-6) एक प्रतिरसं के लिए कोलगोगोरोब-स्थिरनील परीक्षा से D के क्यंतिक मानों की सारधी*

Sample size	Level of	f significance f	or D=ms	ximum Fal	Y)-F.(Y)
(n)	.30	15	-10	-05	01
1	.900	•925	•950	-975	995
2	684	726	776	*842	929
3	.565	-597	642	708	828
4	.494	-525	-564	·624	-733
5	446	·474	-510	-565	669
6	410	436	-470	*521	.618
7	.381	-405	*438	-486	1577
8	.358	*381	-411	457	·543
9	•339	-360	-388	*432	1514
10	.322	•342	*368	410	-490
11	.307	·326	352	1391	468
12	295	-313	+338	*375	*450
13	284	.302	*325	1361	·433
14	.274	-292	-314	1349	418
15	266	-283	-304	*338	404
16	258	-274	.295	.328	·392
17	.250	.266	.286	*318	.381
18	.244	-259	-278	.309	'371
19_	.237	-252	.272	.301	.363
20	·23I	-246	*264	*294	-356
25	.21	.22	•24	•27	•32
30	19	-20	.22	•24	•29
31	-18	-19	'21	·23	•27
Over 35 -	1 07	1 14	1 22	1 36	1 63
O461 33	√n	√n	√ n	√ <u>n</u>	√ n

^{*}Adapted from Massey, F. J. Jr 1951. The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit J Amer Statust, Ass., 46, 70, with the kind permission of the author and publisher.

सारकी (प-7) दो प्रतिदर्शों के लिए कोलमोगोरोव-स्मिरतीय वरीक्षा में M_D के जातिक मान (उ.सु प्रतिदर्श)

	One-tail	ed test*	Two tailed	test**	-
n	α=·05	σ=·01	a=:05	a=.01	
3	3				-
			_	_	
4	4	_	4	_	
•	4	5	5	5	
б	5	6	5	6	
7	5	6	6	6	
8	5	6	6	7	
9	6	7	6	7	
10	6	7	7	8	
11	6	8	7	8	
12	6	8	7	8	
13	7	8	7	9	
14	7	8	8	9	
15	7	9	8	9	
16	3	9	28	10	
17	8	9	8	10	
18	2	10	9	10	
19	8	10	9	10	
20	8	10	9	11	
21	9	10	9	11	
22	9	11	9	11	
23	9	11	10	11	
24	9	11	10	12	
25	9	11	10	12	

		परिशिष्ट-	-घ		657
26	9	11	10	12	
27	9	12	10	12	
28	10	12	11	13	
29	10	12	11	13	
30	10	12	11	13	
35	11	13	12		
40	11	14	13		

Abridged from Goodman L A 1954 Kolmogorov Smirnov tests for psychological research Psychol Bull, 51, 167, with the kind permission of the author and the American Psychological association

^{**} Derived from Table 1 of Massey, F J 3r 1951 The distribution of the maximum deviation between two sample cumulative step functions Ann Math Statist, 22, 126-127 with the kind permission of the author and the publisher

सारसी (ध-8)

दो प्रतिदर्शों के लिए कोलमोगोरोव स्मिरनीव परीक्षा में D ने त्रानिक मान (Table of Cutucal Values of D in the Kolmogorov Smirnov Two Sample Test)

बृहत् प्रतिदर्भ : दो पुच्छ परीक्षा)

(Large samples two tailed test)*

Level of significance	Value of D so large as to call for rejection of \mathbf{H}_0 at the indicated level of significance, where
	$D = \max_{m_1} \max \left S_{n_1}(X) - S_{n_2}(X) \right $
•10	$1\ 22\ \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}}$
05	$1\ 36\ \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1\ n_2}}$
•025	$1.48 \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$
•01	$1.63 \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1}}$
005	$1.73 \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$
-001	$1 95 \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$

^{*}Adapted from Smirnov, N 1948 Tables for estimating the goodness of fit of empirical distributions Ann Math Statist, 19,280-281 with the kind permission of the publisher

सारएमे (थ-9), परम्परा परीला में । वे श्रांतिक मान

Given in the bodies of Table F, and Table F, are various critical values of r for various values of n, and n, For the one sample runs test, any value of r which is equal to or smaller than that shown in Table F, or equal to or larger than that shown in Table F, in significant at the 05 level For the Wald Wolfwitz two-sample runs test, any value of r which is equal or smaller than that shown in Table F is significant at the O5 level

									_ T	AB	LE !	Fı							
n_1/n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2								_	_		2	2	2	2	2	2	2	2	2
3					2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
4				2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
5			2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5
6		2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6
7		2	2	3	3	3	4	4	5	5	\$	5	5	6	6	б	6	6	6
8		2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7
9		2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8
10		2	3	3	4	8	5	5	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9
11		2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9
12	2	2	3	4	4	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10
13	2	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	10
14	2	2	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11
15	2	3	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12
16	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9			10			11	•••	12
17	2	3	4	4	5	6	?	7	8	9	9							12	
18	2	3	4	5	5	6	7	8	8	9	9	-		11					13
19	2	3	4	5	6	6	7	8	8	9	10			11					13
20	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	10	10	11	12	12	13	13	13	14

^{*} Adapted from Swed, Frieda S, and Eisenhart, C 1943 Tables for testing randomness of grouping in a sequence of afternative Ann. Math Statist 14, 83-86 with the kind permission of the authors and the publisher

सारणी (य-9-1), परस्परा परीक्षा मे ह के उपरि कासिक मान रुक्षा सि

				411	160	17	١.	ti i	TI	914	<i>a</i> .	МI	•	পণ্	JA'	11.1				
	20						13	00	20	21	22	23	24	52	25	26	27	27	28	
1	19						7	18	20	21	22	23	23	24	25	56	26	27	27	l
١	18 19						-	18	19	20	21	22	23	5	25	25	26	26	27	١
Ì	11						11	82	19	20	21	22	23	23	24	25	25	56	56	l
	16						17	18	19	70	21	21	22	23	29	24	25	25	25	ļ
	15					15	91	18	18	19	20	21	22	22	23	23	24	24	25	
	41					15	16	17	82	19	20	20	21	22	22	23	23	23	24	١
	=	١				15	16	17	18	61	19	20	20	21	21	22	22	23	23	l
	12	Ì			13	14	16	16	17	18	19	19	20	20	21	21	21	22	22	l
ABLEF	=				13	14	15	16	17	17	18	19	19	19	20	20	20	21	21	ĺ
Z	2				13	14	15	16	16	17	17	80	18	18	19	19	19	20	20	l
	6	l			13	14	14	15	16	16	9	13	12	28	8	13	8	18	80	l
	∞	Ì		Ξ	12	13	14	4	15	15	91	16	16	16	17	17	13	11	17	l
	-	l		=	12	13	2	7	7	7	7	15	15	15						l
	9		0	10	=	12	12	2	2	3	13									l
	5		0	0	9	=	=													l
	1	1		6	Ø															İ
	"	1																		l
	177	1																		
	- P		 																	

* Adapted from Swed, Frieda S, and Eisenhart, C 1943 Tables for testing randomness of grouping in u sequence of alternatives Ann Math, Statist., 14, 83-86 with the kind permission of the authors and the publisher.

(TABLE OF PROBABILITIES ASSOCIATED WITH VALUES AS SMALL AS OBSERVED VALUES OF x !इषट् बटन में घटना (x<r) की प्राधिकता घर्षातु p (x<r) IN THE BINOMIAL TEST*)

G ven in the body of this table are one tailed probabilities under H₀ for the binomial test when P = Q = 1.

To save space, decimal points are ommitted in the p's

15														666
14													666	966
13														985
11 12 13 14										666	966	989	975	952
Ξ									866	994	982	962	928	881
10								-			941		_	
6					en		7 994						_	٠.
80				9			7 967	•					٠.	•
							887	•					٠.	• •
0				965										
~		984	938	855	746	623								
*	696	891	773	637	300	377								
~	812	656	200	363	254	172								
2	200	344	227	145	060	055					004	002	100	100
0 1 2 3 4 5	188	6 109	8 062	4 035	2 020	1 011	900	600	002	001				
٥	63	ă	ő	ò	00	0								
#/#	n	9	-	40	6	2	=	12	7	7	13	91	7	Ξ,

परिशिष्ट-ध

पितत तारंगे (प-10) (2)

19	002	010	032	084	180	324	200	929	820	916	896	066	866
20	100	900	021	058	132	252	412	588	784	868	942	979	994
21	100	004	013	039	095	192	332	200	899	808	905	196	987
22		002	800	026	190	143	262	416	584	738	857	933	974
23		001	005	017	047	105	202	339	200	199	798	895	953
24		100	003	011	032	920	154	271	419	585	729	846	9,54
25			002	200	022	054	115	212	345	200	655	788	885

* Adapted from Tabla IV, B, of Walker, Helan, and Lev J, 1953. Stutistical inference Newyork: Holt. p 458, with the kind permission of the authors and the publisher.

सारणी (थ-11) विस्कामनन विद्वित-मोटि वरीक्षा ये T के त्रातिक मान (TABLE OF CRITICAL VALUES OF T IN THE WILCOXON MATCHED-PAIRS SIGNED-RANKS TEST*)

		-	one-tailed test
N	025	01	005
			two-tailed test
	05	-02	·01
6	0	-	-
7	2	0	~~
8	4	2	5
9	6	3	2
10	8	5	3
11	11	7	5
12	14	10	7
13	17	13	10
14	21	16	13
15	25	20	16
16	30	24	20
17	35	28	23
18	40	33	28
19	46	38	32
20	52	43	38
21	\$9	49	43
22	66	56	49
23	73	62	55
24	81	69	61
25	89	77	68

*Adapted from Table I of Wilcoxon, F 1949 Some rapid approximate Statistical procedures. New York American Cyanamid Company, p. 13 with the kind permission of the author and publisher.

सारहो (प-12) मान ह्विटनी परीक्षा में बम से बम U वे प्रेक्षित मान में मम्बद प्राविबताएँ (TABLE OF PROBABILITES ASSOCIATED WITH VALUES AS SMALL AS OBSERVED VALUES OF U IN THE

MANN WHITNEY TEST*)

	ш2	.3	
U/n ₁	1	2	3
0	250	100	050
1	500	-200	-100
2	750	400	200
3		600	350
			•500

5				650
		n ₂ =4		
U/n_1	1	2	3	4
0	•200	-067	028	014
1	•400	*133	057	029
2	600	*267	-114	057
3		400	*200	-100
4		-600	*314	-171
5			-429	-243
6			•571	-343
7				-443
8				•557

Contd on2

Reproduced from Mann, H H and Whitney, D R 1947. On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other. Ann. Math Statist. 18, 52-54, With the kind permission of the authors and the publisher.

विसत सारणी (घ-12) (2)

n.=5

			,— o			
U/n ₁	1	2		3	4	3
0	167	047	0	18	008	1004
1	333	-095	0	36	016	800
2	•500	190	0	71	-032	016
3	.667	286	-1	25	056	028
4		429	1	96	995	048
5		571	2	86	143	075
6			3	93	206	111
7			-5	00	278	155
8			6	07	•365	210
9					.452	274
10					-548	.345
11						-421
12						500
13						579
		D-	=6			
U/n,	1	2	3	4	5	6
0	143	.036	012	005	002	100
i	286	.071	024	010	004	002
2 3	428	143	048	610	009	004
3	571	*214	083 131	033 057	015 026	008
4		321 •429	190	086	041	-021
5 6		-577	-274	129	063	032
7			-357	-176	-089	-047
8			452	238	-123	066
9			548	-305	-165	090
10				.381	-214	*120
11				457	*268	-155
12				.545	-331	-197
13					-396	*242 •294
14					-465 -535	-350
15					-333	-409
16 17						-469
17						-531

वितत सारणी (घ-12)

TABLE OF PROBABILITES ASSOCIATED WITH VALUES AS SMALL AS OBSERVED VALUES OF U IN THE MANNWHITNEY TEST*

 $n_2 = 7$

U/n _i	1	2	3	4	5	5	7
	·125	028	008	·003	.001	001	.000
1	*250	.056	017	.006	.003	100	1001
2	.375	111	.033	012	.005	.002	*001
3	*500	167	058	021	009	-004	.002
4	625	250	092	036	015	007	.003
5		.333	133	055	024	011	.006
6		.444	-192	082	037	.017	.009
7		.556	258	115	053	.026	.013
8			•333	1158	*074	.037	.019
9			417	•206	101	-051	.027
10			500	·264	134	.069	.036
11			-583	•324	172	-090	·049
12				•394	.216	-117	·064
13				•464	•265	.147	.082
14				.538	.319	•183	.104
15					•371	-223	.130
16					438	-267	.159
17					1500	.314	-191
18					•526	*365	.228
19						-418	.267
20						.473	·310
21						-527	*355
22							·402
23 24							451
25							*500
. 23							*549

^{*} Reproduction from Mann, H. B. and Whitney, D R 1947. On test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other Ann. Math. Statist. 18, 52-54, with the kind permission of the authors and the publisher.

वितत सारसी (ध-12)

TABLE OF PROBABILITIES ASSOCIATED WITH VALUES AS SMALL AS OBSERVED VALUES OF U IN THE MANN-WHITNEY TEST*

n₂ = 8

					-z					
U/n ₁	1	2	3	4	5	6	7	8	t	Normal
0	1111	.022	.006	002	001	-000	000	000	3 308	001
1	.222	.044	012	004	002	001	000	.000	3 203	001
2	.333	089	024	008	003	001	100	000	3 098	.001
3	.444	.133	.042	014	005	002	100	001	2 993	001
4	.556	.200	067	024	009	004	002	001	2 888	002
5		.267	097	036	015	006	003	001	2 783	003
6		.356	139	055	023	010	005	002	2 678	004
7		444	188	077	033	015	007	003	2 573	005
8		-556	248	107	.047	021	010	005	2:462	007
9 -			315	141	064	030	014	007	2 3 6 3	009
10			.387	184	085	041	020	.010	2 258	012
11			.461	230	111	054	1027	014	2 153	016
12			539	*285	142	071	036	019	2 048	020
13				341	177	091	.047	025	1.943	026
14				404	*217	114	060	032	1838	033
15				467	262	141	076	041	1 733	041
16				533	311	172	095	052	1 628	052
17					362		116	065	1-523	064
18						•245		080	1418	-078
19					472		.168	097	1 313	094
20					.528	331	-198	117	1 208	.113
21						-377	232	139	1 102	135
22						426	268	-164	998	159
23							.306	191	-893	185
24						•525		221	.788	215
25								·253	.683	247
26							433	287	578	-282
27							478		•473	.318
28							-522		*368	.356
29								-199		.396
30								-439	-158	-437
31								-480	-052	481
32								520		

Reproduced from Mann II B and Whitney, D R. 1947 on a test of whether one of two-random variables is stochastically larger than the other Ann Math Statist, 18, 52-54 With the kind permission of the authors and the publisher.

सारणी (घ-121)

एक पुच्छ परीक्षा के लिए $\alpha = 025$ या दो पुच्छ परीक्षा के लिए $\alpha = 05$ साधकता स्तर पर U के कार्तिक मान

Tables of Critical Values of U in the Mann-Whitney Test (Critical values of U for a one tailed Test at $\alpha = 025$ or for a two tailed Test at $\alpha = 05$)

n_1/n_2	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	_
ı													_
2	0	0	0	î	1	1	1	1	2	2	2	2	
3	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	- 8	
4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	13	
5	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20	
6	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27	
7	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	
8	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41	
9	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48	
10	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55	
11	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62	
12	26	29	33	37	41	45	٠9	53	57	61	65	69	
13	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76	
14	31	36	40	45	5D	55	59	64	67	74	78	83	
15	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90	
15	37	42	47	53	59	54	70	75	81	86	92	98	
17	39	45	51	57	63	67	75	18	87	93	99	105	
18	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112	
19	45	52	58	li 5	72	78	85	92	99	106	113	119	
20	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127	

^{*} Adapted and abridged from Tables 1, 3 5 and 7 of Auble D 1953 Extended tables for the Mann-Whitney statistic Bulletin of the Institute of Educational research at Indiana Ur versity 1 No 2 with the kind permission of the authors and the publisher

सारजी (प-13)**,**

Services and
7
مزاته
b
TABLE

.:	0	~=	7	ጣ	4	VS	9	7	95	6
0	1	2 67	295	3 12	3 2 5	3 36	3 45	3.52	3.59	3 66
9	3 72	3 77	3 82	3 87	3 92	3 96	4 01	4 0 5	4 08	4 12
30	4 16	4 19	4 23	4 21	4 2 9	4 33	436	4 39	4 42	4 4 5
2	4.88	4 30	4 53	4 56	4 59	4 62	4 64	4 67	4 69	4 72
9	475	4 77	4 80	4 82	4 85	4 87	4 90	4 92	4 95	4 97
2	5 90	\$ 03	\$ 0.5	\$ 08	3 10	5 13	\$ 1.5	5 18	5 20	
0	5.25	5 38	531	5 33	5.36	5 39	5 41	8 44	7 7	3 4
2	5 52	5.55	5.58	5 61	5 64	4 67		1 1	1 1	2 .
2	*8 \$	\$ 8.8	5 92	4 0 4	9 4	2	- 6	* :	110	180
0	6 28	3.5	6.41	3 9	1 4		0 0 0	2 .	9	6 23
				0	0 22	0	6 7 5	6 83	7 05	7 33
,	9	-	7.0	0 3	0 4	0 5	90	0.7	80	6 0
66	7 33	737	7 41	7 46	7 51	7.58	7 65	7 75	7 88	80 8

Condensed Tables 4-13 is taken from Tables IX of Fisher and Yates Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, Published by Longman Group Ltd., London (previously published by Oliver & Bayd, Edmburg), and by the p rm ssion of the authors and the publishers

सोख्यिकी के सिद्धान्त भीर भनुप्रयोग

(सारची घ-14). भार गुणाक w= \overline{PQ}

>	0.0	0.1	0 2	0 3	0 4	0.5	90	0.7	8.0	60
-	0 001	0 001	0 001	0 002	0 002	0 003	0 005	9000	0 008	0 011
61	0 0 1 5	0.019	0 025	0 031	0 0 0 4 0	0 0 2 0	0 062	0 0 1 6	0 0 0 2	0 110
m	0 131	0 154	0 180	0 208	0 238	0 269	0 302	0 336	0 370	0 405
4	0 439	0 471	0 503	0 532	0 558	0 581	1090	9190	0 627	0 634
2	0 637	0 634	0 627	0 616	0 601	0 581	0 558	0 532	0 503	0 471
9	0 439	0 405	0 370	0 336	0 302	0 269	0 238	0 208	0 180	0 154
7	0 131	0110	0 082	0 0 0 0	0 0 62	0 0 0 0	0 0 0 4 0	0 031	0 2 5 0	0 000
00	0 013	0 011	0 008	9000	0 002	0 003	0.007	0 002	0 001	0 001

These tables are taken from Fisher and Yates · Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical

Research, Published by Longman Group Ltd , London (Previously published by Oliver & Boyd, Edinburgh), by the permission of the authors and the publishers

क्षारती (घ-15), बहु-परिवर परीक्षा के नित् 5% सार्थनता स्तर पर सार्थक परिगर

100	3.48	8	7								
	l	80	ι.υ 44	3 47	3 47	3 47	3 47	3 47	۵ 4	3 53	3 67
50	348	3 48	3 47	3 47	3 47	3 47	3 47	3 47	3 48	3-53	3 61
20	3.48	4 8	3 47	3 47	3 47	3 47	3 37	3 47	3 47	3 47	3 47
14	3 47	3 46	3 46	3 45	3 45	3 44	3 44	3 43	3 40	3 40	3 38
10	3 47	3 46	3 44	3 43	3 41	3 40	3 38	3 37	3 33	332	3 29
80	3 47	3 44	3 41	3 39	3 37	336	3 34	3 32	3 28	3 26	3 23
•	346	3 40	3 37	3 32	3 32	3 30	3 28	3 25	3 20	318	3 15
'n	3 43	336	3 33	3 30	3 27	3 25	3 22	3 20	3 14	3 12	3 09
-	3 37	3 33	3 27	3 23	3 21	3 18	3 15	3 12	308	3 0 5	3 02
-	3 29	3 23	3 18	3 15	3 12	3 10	307	3 0 4	2 98	2 9 5	2 9 2
	3.15	3 08	3 03	3 00	2 97	2 94	2 9 2	2 89	2 83	2 80	2 77
a/e	2	12	4	16	180	20	2.4	30	9	100	8

S gnificant ranges for n 1% level new a multiple range test

ı								1	,	,3,,	
	5 5 5	5 26	5 07	4 9 4	4 85	4 79	4 74	4 72	4 66	4 65	4 68
	5 5 5	5 26	5 07	4 94	4 85	4 79	4 74	4 72	4 66	4 64	4 60
	5.55	5.26	5 07	4 94	4 85	4 7 9	4 72	\$ 65	4 53	4 48	4.41
	5 42	5 17	2 00	4 88	4 78	4 73	4 64	4 58	4 44	4 38	4 31
(2)	5 28	5 07	4 91	4 79	4 7 1	4 65	4 57	4 48	4 34	4.29	4 20
	5 20	4 96	4 83	4 72	4 64	4.58	4 49	4 41	4 27	4 21	4.14
	5 06	4 84	4 70	4 60	4 53	4.47	4 39	4 32	4 17	4 11	4 04
	4 96	4 76	4 63	4 54	4 46	4 40	4 33	4 25	4 12	4 06	3 98
	4.88	4 68	4 55	4 45	4 38	4.33	4 2 4	4 16	4 03	3 98	3 90
	4 73	4 55	4 42	4 34	4 27	4 22	4 14	4 06	3.92	3 86	3 80
	4 4 8	4 32	4 2 1	4 13	4 07	4 02	3 96	3 89	3 76	3 71	3 64
	01	12	14	16	18	20	24	30	09	100	ន

This table was reproduced with the permission of the editor of Biometries from the paper by D B Duncan, Using special protection levels based on degrees of freedom. Biometrics 11 11-42, 1955

101-1	ध्यान्तर ज
75.200	ाने दमे क

Mean	15	001	80	2	* :	SA .	62	7.5	88		0	53	46	39	11	3 1	8 .
60		0868	1877	1696	40 6	**/5	45.42	\$299	2980	4 6 0 4		7114	7574	6964	3306		1600
80 '		0758			2635												
02		6890	1684	2636	0752	9 6	300	51 54	5350	6469	7014	7 10	1487	7895	8243	8538	8787
90	0030	240	-1586	2543	3452	4101		2000	-12724	6413	6963		200	7857	8210	8511	8764
0.5	0600	000	1489	-2449	3364	4219	2009	2002	2775	6351	6911	7308		818/	8178	8483	8741
04	0400		1391	2355	-3275	.4136	0207.	6640		6291	6858	.7352	01.64		8144	8455	8717
03	9300	3	1293	.2260	.3185	4053	4854	5 5.80		6233	6805	7306	7710		2110	8426	.8692
03	0200		1194	2165	-3095	3969	4777	1485		6169	67.51	7259	7699	8076		8397	8668
10	0010		1090	2070	-3004	3885	-4699	5441		610	9699	7213	.7658	8042		1958	8643
8	0000		6660	1974	.2913	.3800	.4621	-5370	*****	400	6640	7163	7616	8008	9117	61.0	8617
2	0		-	ei	~	7	*	S	ę	-	20	?	1 0	~		4	-

परिशिष्ट-घ

4-16)
सारकी
वितास

						(2)					
4	88 4	8875	9688	8917	-8937	8957	8977	9668	9015	9033	20
- 2	1506	6906	208	9104	9121	9138	9154	9170	9186	9201	17
9	9217	9232	9246	9261	9275	9289	9302	9316	9329	9341	14
7	9354	9366	9379	9391	9402	9414	9425	19436	9447	9458	12
æ	94681	94783	94884	94983	95080	95175	95268	95359	95449	95537	9.8
6	95624		95792	95873	95953	96032	600196	96185	96259	96331	79
7 0	96403	96473		60996	96475	96739	96803	96865	96926	98696	65
7	97045	97103	97159	97215	97269	97323	97375	97426	97477	97526	50
2 2	97574	97622	89926	97714	97759	97803	97846	97888	97929	07070	44
n 4	98010	98049	98087	98124	19186	98197	98233	98267	98301	98335	36
	10504	98399	98431	98462	98492	98522	98551	98579	70986	98635	30
י ע	19986	98688	98714	98739	98764	98788	98812	98835	98858	98881	24
, ,	50707	98924	98945	99686	48987	99007	99056	99045	99064	99083	20
:	10166	99118	99136	99153	99170	99186	99202	•99218	99233	99248	16

_	
9	
-	
F	
मगराजी	(3)
िकतत	

& E*4	99263	99278	99292	-99306	99320	-99333	99346	-99389	99372	99384	13
2.9	96266.	-99408	.99420	99431	-99443	99454	99464	99475	99485	99495	=
	0	-	ç	_	\$-	è	٥	-	85	٩	
~	99505	99595	89466	99728	99777	.99818	99 851	82866	99900	81666.	
4	-99933	\$\$666	99955	99963	99970	99975	08666	99983	98666	68666	

Table 4-16 gives the transformation $r=(e^{2X}-1)/(e^{2X}+1)$ or $z=\frac{1}{2}\log_{x}~(1+r)-\log_{x}~(1-r)$ with n defined an above 2 is distributed approximately normally with variance 1/(n-1). For exact work correct for bias in a by subtracting r/2 (n+1) from a

Table q-16 is taken from Tab'e VII, of Fisher and Yates Statistical Tables for Biological, Agricultural and Afedical Research, Published by Longman Group Ltd , London. (previously pablished by Olivers & Boyd, Edinburgh), and by the permission of the authors and the publishers

. साल्यिकी के सिद्धान्त और श्रनुप्रयोग

	60	\$ 44	7.92	08.6	11.39	12.79	14.06	15.23	16 32	17.16	18.34	19.28	20 18	30.10	3 6		22.71	23 50	24.37	25.03
	80	513	7.71	9 63	11 24	12.66	13-94	15-12	16 22	17-26	18 24	19 19	20 09	20 06	0.10	1014	22 63	23 42	24.20	24 95
	0.7	4 80	7 49	9.46	11 09	12.52	13.81	15 00	11.91	17.15	18-15	19 09	20 00	20.88	21 73		57 24	23 34	24-12	24 88
	90	4 4 4	7 2 7	9.58	10 94	12.38	13.69	14 89	16.00	17 05	18 05	19 00	19 91	20 79	2161		+ 77	23-26	24 04	24 80
न्तर्थ	0.5	4 05	7 03	9 10	10 78				1589											
कोणीय हत	• 0	3 63	08 9	8.91	10 61	12 11	13.44	14.65	15.79	16.85	17.85	18 81	19 76	20 62	21.47	22.30	2	23-11	23 89	2465
	0.3	3-14	6.55	8-72	10.47	11.97			15.68											
	0.2	2.36	6.59	8.53	10 30	11.83	13.18	1442	15 56	16.64	17 66	18 63	19 55	10 44	21.30	22-14		56.27	23 73	24.50
	70	1.81	6 02	8.33	10.14	11.68	13 05	14.30	15.45	16 54	17.56	18.53	19.46	20.36	21.22	22.06	23 64	10 = 7	23 66	24 43
	0.0	000	5.74	8.13	9 9 7	11.54	12.92	14 18	1534	16 43	17.46	18.43	19.37	20 27	21 13	21.97	22.70		23 28	14 35
	Ъ%	0	-	m	~	4	٧n	9	7	ec	6	2	=	12	13	7	~		2 !	

4-17)	
सारत्मे ((2)
lda	

	25 10	25 18	2524	25 13	2540	25 47	25 55	25 62	25 70	26.77
6	25 84	2591	25 99	26 06	26 13	26 21	26 28	26 35	26 42	26 49
2	16 57	26 64	26.71	26 78	2685	2692	26 92	27 06	27 13	27.20
33	72 72	27 35	27.42	27 49	27 46	27 62	27.69	27 76	27-83	27 90
22	27 97	28 03	28 13	18 18	28 25	28 32	28 39	28 45	28 52	28 59
23	28 66	28 73	28 79	2886	28 93	29 00	29 06	29 13	29 20	29 27
7.	29 33	29 40	29 47	29-43	29 60	29 67	29.73	29 80	29 87	29.93
25	30 00	30 07	30 13	0 2 0	30.26	30 33	30 40	30 46	30 53	30 39
36	30 66	10 72	30 "9	10 8 4	30 92	30 98	31 05	3111	31 18	31 24
27	31 31	31 37	31 44	31 50	31 56	19 61	3169	31.76	3182	31.88
34	3198	3201	12.0%	12 14	32 29	32 27	32 33	32.39	32 46	32 52
29	32 58	12 65	32 71	32 77	3281	32 90	32 96	33 02	33 09	3115
30	33.21	33 27	1134	33 40	3346	33 52	33 58	33.65	33.71	33 22
33	33 83	33 90	33 96	34 02	34 ()8	34 14	34 20	34 27	14 33	14.3
32	34 48	34 51	34 57	34.63	34 70	3476	34 82	34 88	34 94	200
23	3506	35 12	34 18	35 24	35 30	3537	3543	15.40	36.66	
34	35 67	3573	35 79	3585	35 1/1	35 97	36.03	36.09	34.18	0.5
33	36 27	36 33	36-39	36 45	36 51	36 57	19.91	36 60	36.76	77.00

7	
Ħ	
٤	
सारकी	, .,
IGE	

26.03	26.03	36.00	17.05	37-11	37 17	37-23	37-29	37.35	38.41
19.95	20.00	20.00	27.50	34.40	37 75	37.82	37.88	37.94	38 00
37.40	36.76	37.38	20.00			10.4	20.47	10.43	18.40
38.06	38.12	38.17	38.23	38.29	38.33	38.41	79.97	20.00	
38.65	38.70	38.16	38.82	38.88	38.94	39.00	39.00	39.11	39-17
39.23	39.29	39 35	39.41	39.47	39.52	39.58	39.64	.39.70	39.46
39.82	19 87	3993	39 99	40.05	40.11	40.16	40.22	40.28	40.34
40.40	40.45	40.51	40.57	40 63	45 69	40-74	40 80	40.86	40.92
40.98	41.03	41.09	41-15	41.21	41.27	41.32	41.38	41.44	41.50
41.55	41.61	41.67	41.73	41.78	41.84	41 90	41.96	42.02	42.07
42.13	42.19	42.25	42.30	42.36	42.42	42.48	42 53	42.59	42.65
42.71	42.76	41.82	42.88	42.94	42.99	4305	43.11	43.17	43.22
43.28	43.34	43.39	43.45	43.51	43.57	43.62	43.68	43.74	43.80
42.85	43.91	43.97	44 03	44.08	44 14	44.70	44.26	44.31	44.37
44.43	44.48	44.24	44.60	44.66	44.71	44 77	44-83	44.89	44.64
45.00	4506	44.11	44.17	45-23	45.29	44 34	45 40	45.46	45.52
45.57	45.63	45.69	45-74	45.80	45.86	45.92	45-97	46.03	46.09
46.15	46.20	46.26	46.32	46.38	46.43	46.49	46 55	49.61	46.66
46.72	46.78	46.83	46.89	46.04	47 n.t	47.06	47.10	44.40	

मितत सारछो (य-17) (4)

18-45	48 39	48-97	49.55	50.13	50 71	51 30	51 88	52.48	53 07	53 67	64.22	1 7	94.40	86.10	66.73	41.14	
47 75	48.33	48 91	49.49	50 07	50 63	52 24	51.83	\$2.42	53 01	33.61	54.78	2	55.43	S6 P2	28.44	57.79	
47.70	48.27	48 85	49 43	50 01	50 \$9	\$1.18	51 77	52.36	52.95	53.55	54.15	5476	55.37	51.08	3.6 KD	57.23	
47 64	48 22	48 79	49.37	49 95	50 53	51 12	51.71	\$2.30	52.86	53.49	54 03	54 70	55,30	55 92	86 54	57-17	
47-58	48.16	48.73	49.31	49 83	50 48	51 06	51 65	52.24	52 83	53-43	54 03	54-63	55.24	98 88	26.43	57 10	
47.52	48.10	48 68	49 26	48 67	50.42	81 00	51-59	\$2.28	52-17	53-37	53.97	54.57	55-18	55-60	56 42	57.04	***
47.47	48 04	48 62	49-20	49 78	30 36	30 94	51 53	32 12	5371	53-31	53.91	84-51	55-12	5573	56.35	86 98	20.00
47.41	47.98	48 56	49-14	49-72	50 30	50 89	51 47	52 06	52.65	53 25	53.85	54.45	\$5 06	55 67	36 29	1698	47 83
47.35	47 93	48-50	49 08	99 64	50 24	50 83	31.41	52 04	52.59	53 19	53 79	54-39	5500	5561	\$6 23	\$6 85	57.48
41 29	17 87	4849	49 62	49 60	30 18	50 77	5135	8594	52.54	5313	53 73	54.33	54-91	\$5.22	26 17	\$6 79	57 42
24	55	36	57	2	59	09	ž	62	ş	64	63	99	67	89	ě	2	7

(a-17)	
सारत्यी	101
विरात	

58 18 58 82 60 13 60 13 60 13 60 13 62 17 62 87 64 30 65 88 65 88 66 88 66 88 66 88	58.12 58.18 58.24 58.31 58.76 58.82 58.89 58.95 59.41 59.47 59.54 59.60 66.07 60.13 60.20 60.27 60.73 60.87 60.94 61.61 62.10 62.17 62.24 62.31 62.80 62.87 62.94 63.01 63.51 63.87 63.64 63.01 64.27 62.87 62.94 63.01 64.71 64.38 64.45 64.45 65.73 65.95 65.12 65.96 65.73 65.80 65.88 65.96 66.50 66.58 66.66 66.74 67.29 67.37 37.46 67.54 68.11 68.12 68.28 68.36
58 18 58 24 58 82 4 58 82 4 59 82 4 59 82 4 60 13 60 20 60 87 61 88 62 87 62 84 62 87 62 8	58 12 58 18 58 76 58 82 59 41 59 47 60 07 60 13 60 14 61 48 62 10 62 17 62 80 62 87 64 27 65 20 64 57 65 80 66 50 66 58 67 29 67 37 68 11 68 19
	58 12 58 76 58 76 56 77 60 73 61 41 62 10 62 10 64 23 64 23 66 50 66 50
	58 05 58 15 58 69 58 75 58 69 58 75 59 34 59 34 59 34 60 60 60 70 70 70 70 70 70 70 70 70 70 70 70 70

5
7
트
सारत्वी
Ernn

71 57	71 66	7176	71.85	7105	77.05	22 52			
**		i			77.77	617/	12 24	72 34	72 44
+0 41	+07/	72 74	72.85	7295	73 05	73 2 5	73 24	72 26	,,
73 57	73 68	73 78	73.89	24.00				000	040
****			3		11 4/	14 2	74 32	7444	74 55
00 *	14 1	74 88	75 00	75 11	75.23	75 24	76		
7582	75 94	76.06	76.10	37.0		2	0+0/	13.38	75 70
			200	10 01	76 44	76 56	76 69	76.82	7.6 0 6
77.08	17.2	77 34	77 48	77 62	77.74	27.00	0		
7846	78 63	78.76	70.01			20	/8 03	78 17	78 32
			100	200	79 22	7937	79 53	79 70	78 27
9000	0.7 D.	8037	80 54	80 72	80 90	81.00	000		
41.87	4208	82 29	43 68	9 1			97 10	8147	8167
		0 1	0 40	87 73	82.97	83 20	83.45	83.71	9
24 45	50 tr	8487	85.20	88.46	40 9 9				2

Tables q-17 is taken from Table & of Fisher and Yates Statistical Tables for Biological Agricultural and Medical Research Published by Longman Group Lid, Londor (previously published by Oliver & Boyd I dirbirgh) and by permiss on of the authors and the publishers.

FURTHER READ IN

- Anderson, R. L., and Bancroft, T A (1952), Statistical Theory in Research, Mc Graw Hill Book Company, Inc., New York. (For Chapters 5, 11, 13, 21)
- Anderson, T. W. (1958), An Introduction to Multivariate Analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York (For Chapters 18)
- 3 Anderson, T W (1971), The Statistical Analysis of Time Series, John Wiley & Sons, Inc., New York. (for Chapter 16)
- Arley, Niels and Buch, K. R (1953), Introduction to the Theory
 of Probability and Statistics John Wiley & Sons, Inc., New York,
 (For Chapters 5, 8)
 - 5 Bliss, C. I. (1970), Statistics in Biology, Vol. II, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York. (For Chapter 20)
 - Budid, Moris (1962), Statistical Measurements for Economics and Administration, Asia Publishing House, Bombay (For Chapters 15, 16)
 - 7 Cochran, William G (1959), Sampling Techniques, Asia Publishing House, Bombay (For Chapter 12)
 - 8. Cochran W G, and Cox, G M (1959), Experimental Designs
 - Asia Publishing House, Bombay. (For Chapter 21)
 9. Crammer, HARALD (1958) Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press, Princeton. (For Chapters 5, 6,
- 7, 8, 9, 14)
 10 Croxton, F E and Cowden, D J (1939), Applied General
- Statistics, Princeton Hall, New York. (For Chapters 2, 3, 4).

 11 Des Raj (1968), Sampling Theory, Tata McGraw Hill Publi-
- shing Company Ltd, Bombay (For Chapter 12)

 Dixon, W J, and Massey, F J, Jr (1957), Introduction to
- 12 Dixon, W J, and Massey, F J, Jr (1957), Introduction to Statistical Analysis, McGraw Hill Book Company, Inc., New York (For Chapters 9, 21, 23)
- 13 Federer, Walter T. (1955), Experimental Design, Oxford & IBH Pub ishing Company, Calcutta. (For Chapters 21, 22, 23).
- 14 Feller, William (1968), An Introduction to Probability Theory and its applications, Vol. I. (Third Edn.) John Wiley & Sons, Inc., New York. (For Chapters 5, 6, 8).
- 15 Finney, D J (1964), Probit Analysis, University Press, Caribridge. (For Chapter 20)
- 16 Fish, Marek, (1963) Probability Theory and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, Inc. New York. (For Chapters 5, 6, 7, 8)
- 17 Fisher, R. A., and Frank Yates (1963), Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research (Sixth Edition),

Oliver and Boyd Ltd., Edmburgh (For Chapters 9, 10, 12, 13, 14, 18, 19, 20, 21 23)

18 Goulden Cyril H (1952) Methods of Statistical Analysis, John Wiley & Sons Inc., New York (For Chapters 12, 19)

19 Graybil Franklin A (1961), An Introduction to Linear Statistical Models Vol 1, VeGraw-Hill Book Co, Inc. New York (For Chapter 18)

20 Hansen Morris H HURWITZ WILLIAM N and Madow, William G (1956), Sample Survey Methods and Theory Vol I II, John Wiley & Sons Inc., New York (For Chapters 12)

21 Hoel, Paul G (1961), Introduction to Mathematical statistics, John Wiley & Sons Inc. New York (For Chapters 6, 10)

22 Hogg, Robert V., Crug, Allen T., (1972), Introduction to Mathematical Statistics, Third Edition, Americal Publishing Co. Pvt Ltd., New Delhi (For Chapters 5, 6, 7, 10)

23 Kapur, J N, and Saxena H C (1960), Mathematical Statistics, S Chand & Co., New Delhi (For Chapters 4, 5, 6, 7)

24 Kempihone, Oscar (1952), The design and Analysis of Experiments, John Wiley & Sons, Inc., New York (For Chapter 21).

25 Kenny, J. F., and Keeping, E. S. (1951), Mathematics of Statistics, Part One, D. Von. Nostrand Company, Inc., New-York (For Chapters 2, 3, 4 5).

26 Kenny, J. F., and Keeping E. S. (1951), Mathematics of Statistics Part two, D. Von Nostrand Company, Inc., New York (For Chapters 5, 14)

27 Kshirsagar A M, (1972), Multivariate Analysis, Marcel Dekker, Inc., New York (For Chapter 18)

28 Mood, A M (1950), Introduction to the theory of Statistics, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York (For Chapters 10, 11).

29 Mudgett, Bruce D (1951), Index Numbers, John Wiley & Sons Inc., New York, (For Chapter 15)

30 Ostie, Bernard (1696), Statistics in Research, Oxford & IBH Publishing Co Calcutta (For Chapters 9 13, 14, 21)

31 Parzen, E., (1960). Modern Probability theory and its Applications, John Wiley & Sons. inc., New York (For Chapters 2, 6, 8)

32 Panse V G, and Suknatme P V (1967), Statistical Methods for Agricultural Workers Indian Council of Agricultural Research, New Delhi (For Chapter 21)

33 Pearson, Frank A. and Bennet Lenreth H (1955) Statistical Methods, John Wiley & Sons, Inc. New York (For chapters 15 16)

- Pearson, E. S. and Hartey's H. O. (1970), Biometrics Tables for Statisticians, Vol. I, Lower and Brydone (Printerrs) Ltd., London. (For Chapters 9, 10, 12, 13, 14, 18, 19, 20, 21, 23).
- Rao C R. (1952), Advanced Statistical Methods in Biometric Research, John Wiley & Sons, Inc., New York. (For Chapters 9, 11, 19).
- Rao C. R. (1967), Linear Statistical Inference and its Application, Jhon Wiley & Sons, Inc., New York. (For Chapters 8, 18)
 Searle, S. R. (1971), Linear Models, John Wiley & Sons, Inc.
- New York. (For Chapter 21)

 38. Siegel, Sidney (1956), Nonparametric Statistics, McGraw-Hill
- Siegel, Sidney (1956), Nonparametric Statistics, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York. (For Chapter 10).
 Snedecor, George W., and William G Cochran (1968), Statis-
- tical Methods, Oxford & IBH Publishing Co , Calcuita. (For Chapters 9, 13, 14, 21)
- Spear Mary Eleanor (1952), Charting statistics, McGraw-Hill Book Company Inc., New York (For Chapter 2)
- Steel, Robert G. D., and Torrie, James H. (1960), Principles and procedures of Statistics, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York (For Chapters 4, 21, 23, 23).
- Sukhatme, P. V. and Sukhatme, B. V. (1970), Sampling Theory of Surveys with application, Asia Publishing House, Bombay. (For Chapter 12)
- 43 Walker, Helen M and Lev, Joseph (1953), Statistics as Applied to Economics and Business, Holt Rinehart and Winston, New-York. (For Chapters 6, 7, 9, 10).
- Walker, Helen M and Lev Joseph (1953), Stristical inference, Henry Holt and Company, New York (For Chipters 6, 7, 9, 10)
- Henry Holt and Company, New York, (For Chipters 6, 7, 9, 10)
 Wessel, R. H. and Willet, E. R. (1963), Statistics as applied to Economics and Business, Holt Rinehart and Winston New York. (For Chapters 15, 16, 17).
- Wilks, S. S. (1962), Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, Inc a New York. (For Chapters 5, 6, 7, 11).



त्रानुकमणिका

w		धापूर्व जनश क्लन	86, 93
घने गरीय बंटन,		धानुशानिक निवतन	241
काई वर्ग	115	मायत चित्र	7
t	117	भावनानार बंटन	110
P	118	धान्त्रह,	
सर्गगुणोत्तर बंटन	100	परिभाषा	623
ग्रतिगरबमविक वदा व्यूत्त्रव		सूच	623
म्पा रतर्ग	604	चिया एँ	624
प्रधिरतम सम्भाविता विधि	220-24,	স্ ৰিদীল	628
	498	द्यानीय मुनांच	177
प्रविभववता	218	धार्मन सारणी	165
धनुषुसनम गुण्छ परिमान	256	(2×2) चम ची	170
भनुक्तातम नियतन	249	7	
मन्तरवर्गं सहगण्यम्	350-51	उपप्रतिचयन 54	4-48, 580
यातर्वेशन धीर वहिबेंजन	426	वर्गन बंदन	81, 457
प ल्यनग र्	+27	उपादान-उत्स्यम दरीक्षा	375
प्रश्तवेतन धीर वहिवेतन वी	विधियो	×	
नेतानिनीय विधि	427-28	ऋणारमन द्विपद बंटन	99
रैलासायक सर्वत्रत विधि	429-30	ऋगुनिष्ठ पश्चिमैन शमस्याः	418
दिवद बिरमार विशि	431	ऋनुनिष्ठ दिषरण	404
धानस्थनुर्वेश	45	उत्तरीत विरमन विवि	405
यपवर्ती घटनाएँ	69	उपनति ने धनुपान विवि	406
" ,निषयन पुढि	233-34	विश्वान बाध्य विवि	406
चप्राप्त मात्र 531, 549-53	2, 557, 616	र्शृतिहरू गारेस विधि	411-17
सभित्रसम् गणन 87, १	3, 97, 109	₹	
व्यक्तिगर्गी की गरिभागः	131	एर दुश्व वरीधा	143
uı	,	एर गमान शतनम परीका	226
द्रांतिक शंकरण	583	एवाट गूच	505
श्रातिक समाध्यम गुर्णाक	306	•	
धानिक महनाकाथ कुछाक	358-59	पपू रश	57
धारमन की धारुगत विधि	266	काई वर्ग परीक्षा	163
धारणन की समाध्यम विधि	268	वाई वर्ग बंटन	111
बापूर्ण	52, 84	काम थेनी	

		•	
विश्लेषण	390	व	
मनियमित विचरण	420	दण्ड झारेख	12
वालोत्त्रमण परीक्षा	374	दशमक	35
बीलकीय सघनन विधि	628	द्विघात या उच्चतर धा	तसमीकरण 292
कोकरान-प्रमेष	468	द्विधान रुपो का सम्मिनि	न बटन 467-68
कोटि महसम्बन्ध	343-45	द्विचर प्रसामान्य बटन	456
कौशी दटन	111	द्विचरण प्रतिचयन	257-59
त्रमथय	633	हिधा वर्गीव रण	531
कमबद्ध प्रतिचयन	251	द्विपद बटन	90
कम सास्यिकी	125-28	द्विपद विस्तार	634
ख		दीयंकालिक उपनति,	
बिचिन-प्रमेय	132	रेलनी या घागे से	391
ग		ग्रर्ध माध्य विधि	392
गणितीय प्रत्याना	84	माघ्य विधि	393
गामा फलन	634-35	गतिमान माध्य वि	ਬਿ 394-99
गामा बटन	112	न्यूनतम वर्गं विधि	399-400
ग्रीसीय-लैटिन वर्ग ग्रभिकल्पना	560-61	देशराज धारतर	265
गुच्छ प्रतिचयन	254	दो बाक्सको की बापेटि	विदक्षता 220
गुणोत्तर माध्य	28	दो पुच्छ परीक्षा	143
घ		दो या प्रधिक ग्रजान या	नो का धारलन
घटना	69	(मन्तर्वेशन या बहिर	লৈন) 432
षातीय श्रेणी	634	न्यूटन की श्रव्यवामी	बन्तर विधि
ঘ			433-36
चकीय विचरण का पृथककरण	419-20		बती विधि 436-39
चत्रीय विचरण मापन	418		বিলি 439–43
चतुर्यंक	34	लग्राच विधि	444
चरमाताकी समाश्रयण वक	289	दो सहसम्बन्धित चरो वे	
भाषच्या स्पान्तरण	602	तुलना	351-53
चिह्न परीक्षा	203	न	
वेबीचेफ ग्रसमिका	130	निराकरण क्षेत्र	142
ड		निर्घारण गुणाक	326
डकन-चहुपरास परीक्षा	520	नेत्र समजन विधि	490-98
डाडेकर–गुद्धि	173	न्यास का सक्तीकरण	59
हाक द्वारा पूछनाछ	272	न्यास का सम्रह	269
त		न्यूनतम वर्ग विधि	276, 399, 534
तोरण बक	11		

अ लुक्मणिका			
q		प्रसामान्य विवर	162
पदानुकमानुसार वर्गीकरण	526	प्रादस	2
परम्परा परीक्षाः	198-99	प्राबिट विश्लेषण	486
परिवस्पना	139	प्रादिट समाग्रयण रेख	र इ.स.म्ब
निराकरणीय	140	नेत्र समजन विधि	490-98
वैश ल्पिश	140	श्रविकतम सम्भा	विता विधि 498
परिमाण के समानुपातिक प्राधिक	ता	प्राधिकता की परिभाष	TT 162
प्रतिषयर	259	<i>विरामित विश्वत</i>	70
परिसर	44	मोक्यिनीय	72
परीक्षा निक्ष	144	चभिन्नहीतीय	73
परीक्षा मे तुटि	141	प्रायिकता बटन मिद्धान	79
परीक्षा सामर्थ	141	प्याप्ती बटन	96
पर्याप्त झानलक	219	4	i
पाई घारेल	18	फिशर Z बटन	122
पूर्ण सकरण	582	फिसर Z रूपान्तरण	338, 340, 605
पूर्णीकन	65	घ	
प्रतिचयन ढांचा	286	बटन,	
भ तिचयन बु टि	233	ব্রিপদ	90
प्रतिचयन यूनिट (एकन)	235	बरनूसी	94
प्रतिदर्श	2	व्यासों	96
4	240-43	ऋगारमण द्विपद	99
प्रतिलोम मान्यूह	628	वतिगुणोत्तर	,00
प्रयोग भनिकल्पना	510	प्रसामाग्य	104
प्रसरण	48	धायतारार	110
प्रसरण विश्लेषण,		ग ीशी	111
सरल रैलीय समाव्यय के नि		नाई वर्ग	111
रेतिक बहुसमाभयण के लिए	309	गामा	112
एकधा वर्गीकरण	514	धनेग्रीय नाई वर्ग	115
पूर्णतया वाहिन्छकी हतः सनि-		स्टुहेन्ट १	116
करपना	515	धवेन्द्रीय ६	117
याद्रन्तिक पूर्ण सण्डक प्रशि-		F	118
	44-48	धरेन्द्रीय F	121
	53-57	बिह्नर Z	122, 338 122
वेट्स विधि हारा	577	बीटा	94
विराटित क्षेत्र समिकस्पना	584	बरनूनी प्रमेष	426
प्रसामान्य बटन	104	वर्षियन	440

बहु-उपादानीय प्रयोग	561	₹	
बहुकम प्रतिचयन	257	रूपान्तरण,	
बहुबर प्रसामान्य बटन	456	लघुगणकीय	599
बहुपद बटन	468	वर्गमूल	600
बहुमुज	9	श्वापञ्या या कोणीय	602
बहुलक	39	ध्युत्कम	603
बहुसमाश्रवण रेला	302	श्रतिपरबलयिक ज्या	म्युस्कम 604
बहुसम्बन्ध	353-58	नागिट	605
बारम्बारता	3	फिशर 2	338, 605
बारम्बारता वटन	3	स	
बीटा फलन	635	लम्बकोणीय बहुपद बिधि	294
बेज का प्रमेथ	76	लघुगणकीय वृद्धि नियम	291
भृहत सस्या नानियम	131, 132	लघुगणकीय स्पान्तरण	599
म		लघुगणकीय श्रेणी	634
महालानबीस व्यापकीकृत दूरी		अधुगणक सम्बन्धी मूत्र	633
	465-66	सागिट रूपान्तरण)	605
माध्य प्रॉबिट बन्तर	509	लिबापुनीव प्रमेय	135
माध्य वर्गयोगो का प्रत्याशित	ा मान	लिंडवर्ग लेबी प्रमेय	132
	535-40	नेला चित्र	15
माध्य विचलन	46	र्वटिन बर्ग ग्रभिकल्पना	553
माध्यिका	28-32	ৰ	
माध्यिका परीक्षा	208	वक समजन	275
मान-ह्विटनी () परीक्षा	211	वर्गमूल रपान्तरण	603
मिच्या सहसम्बन्ध	353	Y की मानक बृटि	288
मिश्च्रिलस वश	290	विचरण गुणाक	48
দিখিব স্থাৰ সুবিভ্গ	524	विपाटित खण्डक ग्रामिकल्पन	rr 592
य		विपाटिन क्षेत्र प्रभिकल्पना	584
याहच्छिक चर	78	विल्क ∧ निकय	474-76
याद्दिसक (प्राधिकता) प्रति	चियन 234	विस्कावमन चिह्नित कोटि ।	यरीक्षा 2067
याद्दन्छिङ प्रभाव प्रतिरूप	524	विविक्तकर पत्तन	471-74
याहच्छित सस्या मारणी का	उपयाग 236	विश्वास्यना सीमाएँ व सन्त	राल 151–54,
युगल t-परीक्षा	154	15	5, 182, 239
येट्म विधि	577	समाध्यम गुणाक	286, 308
यर्म गुडि	171	P _{Y/X}	288
योग प्रमेय	73	सहसम्बन्ध गुणाक	339

	🕳 समुक	मणिका	689
विशार्ट बटन	462-63	सरस समाध्यण रैता	276
विषम बटन दक	55	सहमतरण विश्लेषण	606
वृत्तीय त्रमबद्ध प्रतिचयन	252	सहसम्बन्ध	323
वृत्तीय परीक्षा	376	सहगम्बन्ध भनुपात	349-50
वे षस्य	564	सहसम्बन्ध गुणांश	323, 330
वैषध्य-गुणांक	56	सहसम्बन्ध युणाक का	
ध्यक्तिगत पूछ-ताछ	270	समाथयण गुनाकी स सम	ৰদ্য 325
ग		ज्यासितीय निरुपण	326-30
शततमक	36	प्राधिकता धनस्य पत्रन	332-34
料		महराम्बन्ध गुणान पर सनेतीत	रण
शृक्षला सूचवार	383-85	का प्रभाव	334-35
स		गांत्रियशीय प्रतिरूपः	
सक्रम,		स्यिर प्रभाव	523
पूर्ण	582, 593	याहिन्छन प्रभाव	524
म्रांशिक	583	गिधिन प्रभाव	524
सक्षिप्त डिमिटिस विधि	631-32	सांस्यिकीय स्वतन्त्रमा	76
सगति	217	सापेश चन्त वति	508
सचय	633	मामत्रस्य गुर्णार	347-49
सचयी बारम्बारतः	3	सारणिक	628
सचयी योग विधि	259	सार्वस्ता परीक्षा,	
सजातीयता त्रुटि	382	दो समग्र माध्यो की समान	ता 146-51
सप्रतिबन्ध प्राधिकता	75	शारम्बारतायों में प्रन्तर	157
सप्रतिबन्ध बटन	82,459-61	प्रतिशतो में धन्तर	157
समजन-सुष्ठुता	178	द्यमुपाती मे धम्तर	157
(ब्रासनन सीम्ठक)		दो से घधिक समग्र माध्य	
रामजन-गुष्युना की वरीक्षा	178	ममानदा	159
समग्र	2, 235	द्विषर ने तिए	163
मगान्तर भार सर्वारत सूत्र	377	क्षे समान्तर प्रति रही ।	
समान्तर माध्य	24	समानीयवा	167
समाश्रमण	274	K वर्गों की स्थिति मे	175
ममाध्यण गुणांक	279	दो वर्गों की स्थिति में	176
रामाध्यण दक	461-62	5 ³ cm 5 ₀ ³	181
रागुण्यय शिद्धान्त	637–38	दासमद्रश्रमरको की समा	
मस्भाविता धनुपात	227	K समग्र प्रसरको ही समा	
सरम प्ररेतिक समाथयन	289	समाध्यम बुर्गान	285, 388
सरस <i>यार्थान्य</i> क प्रविचयन	236	$\beta_0 = 1$	267

590	सास्यिकी वे	हे सिद्धान्त	घौर ग्र	नप्रयोग
JJU	त्ताारपका न	D.138121 d	आ। ८ अ	74414

सहसम्बन्धं गुणाकः 3.	36-43	संजातायता त्रुाट	382
कोटि सहसम्बन्ध गुणाक 34	15-47	सूची पत्रक	270
द्याशिकसहसम्बन्धः गुणाकः 3	59-62	स्टुडेंट-१	116, 144
सार्थंवता स्तर	141	स्तरित प्रतिचयन	243
सूचकाक 30	68-69	स्थिर प्रभाव प्रतिरूप	523
सूचकाक रचना की विधियाँ,		स्वतन्त्र घटनाएँ	71
मूल्यों के योग के झनुपात द्वारा	370	स्वतन्त्रता कोटि (स्व० को०)	142
सापेक्ष मूल्यों के माध्य द्वारा 3	70-71	(स्वतन्त्र्य सस्या)	
भारित मापेक्ष द्वारा 3	71-73	8	
सूचकान रचनामे त्रुटियाँ,		हूरविट्ज-थामसन ग्राक्तक	264
सूत्र त्रुटि	381	होटलिंग T2-बटन	463-65
प्रतिचयन त्रुटि	381		

पारिमाषिक शब्दावली

(सास्यिकीय शब्दों का घ्रयेजी अनुवाद)

(अ) भग element, numerator सम्पानी advancing

अपरती forward अतितुचीकर hypergeometric

अतिरास्त्रिक hyperbolic

नपुर्वतम optimum नपुरुष scquence बरुषण suffix

बनुष्टिया response सनेष्ट्या (बहु) आधारामीट सन्दरास toterval

सन्तरको untra-class सन्तरको unterpolation

सन्तरपत्ती asymptotic सन्तरपत्तुपैक inter-quartile सप्तरों exclusive

MAIAM BOR batametine

व्यक्तिकार्यस्था design व्यक्तिकारीनीय axiomatic

क्षित्रशास्त्रा assumption क्षित्रि bias

afanari characteristic
afanari convergence
avan differential
author residual

समून्य non-central सत्तर discrete समीवन inequality

(बा) सर्लान्ड (सर्लान्ड) टार्राणशेली नार्डे moment बाह्यांडिक proportional

men-fer wastgram

बारेप diagram, graph बानवन plotting बान्धन mattix

भाषभ contingency भाषत्रन सौग्ठन goodness of fit

(सम्बन मुध्युता)

(3)

ভবৰাৰ (নাঘন) treatment ভবননি trand ভবননিবৰত subsampling

उर्रार upper स्रामम spproach उराम marginal

্ছ (ছ) ছভাবেদ negative

স্থানিক seasonal

(ए) एक्स (बुनिट) धतार. izidividual

एक्टर opeway एक समान धार्गाठामा/y

(F)

कारक factor कालोग्करण साम्यट reversal

बीनकोच सब्दन हिन्दि protal condensa-स्थान method

केन्द्रीय central कॉट tank कोट-क्स ordinate कोटीय appular

कार्या द्वा वर्ण्यमा द्वा वर्ण्यमा द्वा

ener systematic
(a)

east muck

(q)

गणना चिह्न tally marks गणितीय mathematical विजयन moving युग्छ cluster पूगाक coefficient

पटना evept

चनल deusity यात power

पातीय exponential (च)

चत्रीय cyclical चतुषक quartiles चर variable चरवाडाकी exponential चारका gresin

बायञ्चा श्रास्त्राधाः विक्रतिस्ति classical

चित्र इन्द्रम

(व)

जनक generating

तिकरण three stage सोरण ogsve

tos par trum decile

factor two stage fact two way faced buttary sheeting secular

(স) লিকৰ criterion

निम्न lower निमन allocation निराक्तल सेंग critical region

निराकरणीय null निरुपच representation

निर्मारक गुनाक coefficient of determi-

निरंग interpretation

न्यास data

(4)

पिक TOW परानुकरानुसार therarchical परमारा Tun

TRUTT mutual

परस्पर-विद्या interaction परिकास calculation

परिकासका hypothesis परिकास enumeration

परियाम size परियाम size

परिवर range परीमा test

पुण्ड tail

पुनचर्ति replication पूर्णनेन rounding of numbers

gre complementary

प्रतिकार sampling

प्रतिबदन बनुरात sampling fraction

মবিংল sample মবিংল model

प्रतिनीम INVerse

মরিকারৰ substitution মাবহ backward মাবহা expectation

प्रमेय theorem

प्रवृत्ति tendency प्रत्नावती questionnaire, excercise

प्रसास variance प्रसासन्य normal प्रेक्षण observation

(₹)

धनन function

(र) बहरू distribution बहिबेंबर extrapolation बहुत्सातीय factorial

क्ष्म multistage क्षम multivariate बहुपुत polygon बहुतन mode बहुतनाथवन multiple regression बारमारना frequency बोजीब algebraical बहुत large

(w)

मृक्षण्ड plot मेंडवर्त्ता 10.91

मेंटनर्ता investigator (य)

बारिष्डक sandom बुगम paired बुगिर (एक्च) unit

(र) रपान्तरण transformation

(ল) নমুগদৰ logarithm দাৰিক orthogonal নিমাৰিক graph

(च)
चच curve
चचे class, square
चचे पोग (च॰ च॰) sum of squares
चौकरम classification
चिच्छा deviate
चिच्छा source of variation
चिच्छान deviation

বিষয়নীয়া heterogeneous বিনিষ্টৰ commutative বিন্যান arrangement বিষয়নিত split বিবিশ্বসংশ discriminant

विस्तिका analysis विस्तासका confidence विषय akew, asymmetric विशेषम dispersion

र्षण्डिक alternative रेपम contrast, comparision

देशम् नुषांच coefficient of skewness भारतम् expression मारमाचेच reciprocal न्युताम derive

(₹)

बलतम most powerful बलतमक percentile बृद्ध correction बृद्ध null, zero

भूचला chāiti

(स ,

सहरण confounding सहेशीकरण coding संस्पष्ट calculator सब्द combination सब्दों cumulative

हरना continuous संपत्नी coincident स्थल composite

बर्क composite बहोबन नरम correction factor बरातीय homogeneous बरिस vector सरिमर approximate

सप्रतिक प conditional समझ population समंदर fitting समंदर सुप्रता goodness of fit

(शानंत्रव कोच्य) समस्ति symmetrical समाप्तत्रत integration समाप्तित्र adjustment समापेत्री nested

समाध्यम् regression समुख्यः set सम्बद्धः associated सम्बद्धाः likelihood सर्वेदाण् survey

REGIVE COFACTOR

REGIVE COVARIANCE

REGIVE CONCOUNTANT

REGIVE COTTESTOR

REGIVE ADCILLARY

REGIVE ADCILLARY

सद्दिष्णुता tolerance मारेश relative

मामजस्य-मृगान coefficient of concor-

dance

सार्य्य power सार्यणक determinant

नारची table

मारचीयन tabulation

सार्थनचा significance साहबर्ग associative

सीमा limit

gesis index number

सूची-पत्रक schedule स्तर्म column स्तर level स्तरम stratification

nortsUni होकि

स्वनन्त्रता-शेटि degrees of freedom (म्बरम्बरा-सच्चा)

ξ)
rotenimonor

(स)

सेंड plot, area

ञुद्धि-पत्र

षृष्ठ-संस्था	पंक्तिया सूत्र में	षगुढ	धुद
27	(34)	f, y,	$f_i Y_i$
34	* † 13	उदाहरण (3 1)	उदाहरण (21)
39	** 1 5	30 35	20.35
39	1 6	49 45	46.34
40	1 18	[3-4]	(3 - 3)
40	ষিস (3 – 3)		ग्रदार क, ल, ग, घ और न लिस दें।
41	1 1	(3,14)	(3 13)
46	1 12	उदाहरण (3.1)	उदाहरण (4.1)
46	1 10	सूत्र (3.5)	सूत्र (4,4)
49	† 13	\$	۴
56	1 7	संक्या	बह शब्द छोड़ दें।
101	(6.21)	हर मे (ⁿ)	(7)
101	†2 † 11	प्यासों व त्यासों	व्यासी
105	ৰিব (7–3)	रेबाञ्झदित क्षेत्र दायेँ पुन्छ वर दिया है	यह दीत्र बार्थे पुन्त यह समस्यि ।
117] 8	सामान्य	श्रतामान्य
132	1 2	6.3	8.3
135	13=17	য়য়িলয়খিৰ	द्यमितरात्र]
138	1 1	0 (1 ² n)	0 (n ⁻³)
140	1 3 H	: e2>0, HI · e2>0 1	
149	1 4	से प्रधिर	शे क्य
155	$15 \ \frac{1}{n-1}$	$\left\{ \begin{array}{l} \underline{x} \ d_i - (\underline{x} \ d_i)^2/n \end{array} \right\} \frac{1}{n-1}$	$1 \left\{ \begin{array}{l} x q^2 - (x q^2) \\ i \end{array} \right\}$
167	† 5	स्वरूप	शमरूर
171	1 3	(9.26)	(9.31)

पृष्ठ-संस्था	पंक्ति या सूत्र में	चमुद	যুহ
172	1.5	5 जोडकर	•5 घटारर
172	† 5	132 में में '5 घटाने	132 में ∙5 जोड़कर
174	1 4	(912)	(9.13)
175	110	(9.12)	(9.13)
183	বিশ্ব (9·4)	(x-1)	(n-1)
183	14 4 15	∑ X,2	×,2
185	† 2	(9.40)	(9-41)
199	1 7	a b 222 bb 22 bbb 22 b	b a bbb 222 b 222 bb 2
200	110	स्वीगर	ब स्वीकार
206	J 17	1, 2, -3, 4 ₹ 5	1, -2, 3, 4 = 5
208, 209	, † 3, 5, 7, 8	भीर	मोर
व 215	व 12 व 1	I	
217	† 8	٠ (٣) به	♦ (-)
230	1 6	$L = \left\{ \begin{array}{c} 1 \end{array} \right\}$	$L = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \right\}^{n/2}$
231	114	$\sqrt{n} (n-1)$	√n (n - 1)
285	(13.22)	Σy,	∑ y₁²
286	† 6	स्वीकार	भस्वीनार
291	† 15	2	1.8
302	† 2	प्रापलों	बा क्लकों
305	1 12	(c,) है तो b/s	((ca)) है तो b,'s
309	1 3	R X Y,, R2 X y,/K	$R^2 \stackrel{\Sigma}{\stackrel{\sim}{\stackrel{\sim}{\stackrel{\sim}{\stackrel{\sim}{\stackrel{\sim}{\stackrel{\sim}{\stackrel{\sim}{$
330	1 9	प्रतिदर्गज	प्रतिदर्गे
335	1,7 हर मे √	$\sum_{i} \{()-()^{2}\} \sum_{i} \{()-()^{2}\}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} \{()-()\}^2 \frac{1}{2} ()-()\}^2$
348	† 11	$\frac{pX(n+1)}{1}$	$\underbrace{P_{X}\left(n+1\right)}_{2}$

पृष्ठ सस्या	पितः यासूत्र है	च चगुद	पुद
356	1 1 हर में	¥2,	z X,t
377	1 10	मान	भार
401	1 2	Y	Ÿ
414	† 5 हर में	180	100
433	† 13 = 12	$1122 = \frac{386}{5} = 606$	1289 * 553 = 110 6
437	† 3	$\Delta^{3}_{0} = 3.7$	$\Delta_0^2 \approx -3.7$
464	(18 26)	$(\bar{X} - \mu_{i0})$	(X, - +0)
487	12 m 3	FT, LD So	和 LD 50
488	1 7	भीर	प्रोर
516	1 4	See n - K	See/n - K
533	1 1	ΣΣe _{il}	II eq 2
535	(21 19) E	$\sum_{i} \{X_{ij} \ \overline{X}_{j} - \overline{X}_{i} + \overline{X}\}$	$\sum_{j} \{X_{ij} - \overline{X}_{ij} - \overline{X}_{ij} + X\}^{2}$
536	1 13 22		$\sum_{i j} (X_{ij} - \vec{X}_{ij} - \vec{X}_{i} + X)$
536	† 5	$e_{ij} = -2e_{ij} - \overline{e_i}$	e4 4 - 2e, ē j
541	सारकी (219) সংবালির মা •ব•া	दः के स्तरभाग == हटाकार या सगार्टे
554	† 10	$P_l \cdot B_j$	$P_j^2 B_j^2$
569	सारक्ती (21 14)	1,3 एक्पिकि बहाये	
		A p-1 Axx A	$A_{xx} \rho - 1 = A' A'/s$, F_A
572	† 11	33593	3357 2
576	1 6 हर मे	t X d	1×q×p
584	1 7	23	23
590	1 4	=	त्राबार द∗प• ≃
592	1 1	R	P
623-	32	ৰিমিবি	ৰিমিনি

पृष्ठ सस्या	पक्तिया सूत्र में	धगुद्ध	युद
625	1 6	a _K b _{Kj}	a _K b _Q
628	137	A के तुन्य रख दिया	A के तुस्य I रख दिया
630	1 6	b _{13 1} - a ₂₁ b ₁₃	b13 1 = a23 - a21 b13
630	115	दायी	बावीं
633-34		ा व 2/ शादि	रोव 21 पादि
625	1 7	Fazii A	From A

^{* †} नीचे से ऊपर की भौर ** 🚶 ऊपर से नीचे नी भौर

GREEK ALPHABETS

	a	alpha	v	nu
	B	beta	£.	XI
Т	γ	gamma	0	omicros
Δ	8	delta	*	pı
	4	epsiton	Р	ıpo
	ξ	zeta	•	sigma
	7	eta	т	tau
	θ	theta	v	upsilon
	?	iota	4	phi
	K	kappa	×	chi
٨	λ	lambda	*	psi
	μ	mu	រ	omega